ТЕМА 5. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ АВТОМАТОВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1. Минимизация функций алгебры логики
2. Метод карт Карно.
3. Неполностью определенные логические функции и их минимизация

1 Минимизация функций алгебры логики

Минимизация функций алгебры логики (ФАЛ) является одним из основных этапов анализа и синтеза цифровых устройств. Основной целью минимизации логических функций является получение их минимальных дизъюнктивных или конъюнктивных форм.

ДНФ (КНФ) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число переменных x_i по сравнению со всеми другими эквивалентными ДНФ (КНФ).

Существуют различные аналитические и табличные методы минимизации.

1. **Метод непосредственных преобразований**.
2. **Метод карт Карно.**

1. Метод непосредственных преобразований. Сущность метода непосредственных преобразований заключается с том, что минимизация исходной ФАЛ осуществляется путем применения основных законов и тождеств алгебры логики.

Сокращенной ДНФ называется форма представления ФАЛ, которая получается из СНДФ путем склеивания вначале конституэнт единицы между собой по всем переменным, а затем конъюнкций ранга n-1, n-2 и т. д.

Простая импликанта – это конъюнкция, которая не склеивается ни с какой другой конъюнкцией, входящей в данную ФАЛ.

Используя понятие импликанты, сокращенную ДНФ можно определить как дизъюнкцию простых импликант.

Пример 1. Минимизировать функцию, заданную в СНДФ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overset{\boxed{1}}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \overset{\boxed{2}}{x_1 \bar{x}_2 x_3} \vee \overset{\boxed{3}}{\bar{x}_1 x_2 x_3} \vee \overset{\boxed{4}}{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \overset{\boxed{5}}{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3} \vee \overset{\boxed{6}}{x_1 x_2 \bar{x}_3}.$$

Решение: Используем законы склеивания и поглощения. При этом учтем, что одно и то же слагаемое СНДФ может склеиваться с несколькими другими.

1 и 5: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_3$ (по x_2)

2 и 4: $x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = x_1 \bar{x}_2$ (по x_3)

4 и 6: $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 = x_1 \bar{x}_3$ (по x_2)

3 и 5: $\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2$ (по x_3)

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2,$$

$$f = \overset{1}{\boxed{}}\ \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \overset{2}{\boxed{}}\ x_1\bar{x}_2 \vee \overset{3}{\boxed{}}\ x_1\bar{x}_3 \vee \overset{4}{\boxed{}}\ \bar{x}_1 x_2,$$

1 и 3: $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 = \bar{x}_3$ (по x_1)

В результате минимальная ДНФ имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

2. Метод карт Карно. Логическая функция, записанная в СНДФ, может быть представлена в виде специальных таблиц, известных под названием карт Карно или диаграмм Вейча.

2 Метод карт Карно.

Логическая функция, записанная в СНДФ, может быть представлена в виде специальных таблиц, известных под названием **карт Карно или диаграмм Вейча.**

Каждая клетка таблицы соответствует одному из наборов таблицы истинности. Клетки карты обозначаются таким образом, что любой соседней паре клеток соответствуют склеивающиеся слагаемые.

Для логической функции **двух** переменных карта Карно изображается в виде *горизонтального ряда из четырех клеток*.

В каждую клетку записывается значение функции единица или нуль, на соответствующем этой клетке наборе переменных.

Единицы в клетках карты Карно объединяются в группы и обводятся контуром.

Любая пара единиц, расположенных в соседних клетках, выражается одной переменной, той, которая присутствует в каждом из наборов, объединенных в группу.

Одна и та же клетка может входить в несколько групп.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2.$$

$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
0	1	1	1

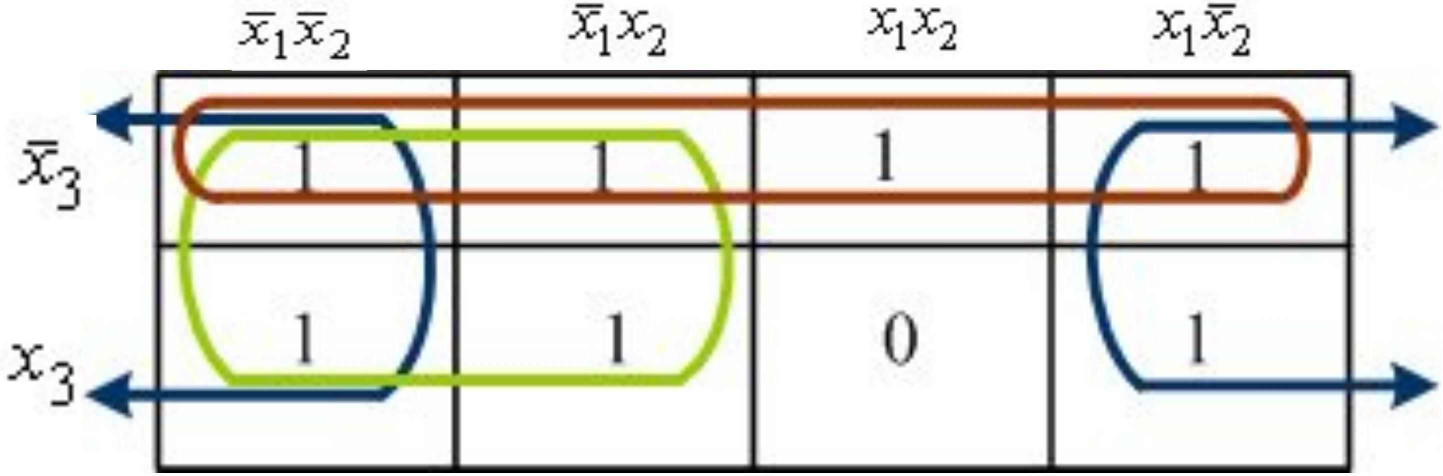
$$f(x_1 x_2) = x_1 \vee x_2$$

Карта Карно для функции трех переменных содержит восемь клеток (совпадает с числом строк таблицы истинности равным 2^3) .

Ее следует рассматривать не как плоскостную, а как свернутую в трубку (в виде цилиндра) соединением первого и последнего столбца. При этом соседними оказываются клетки на противоположных границах карты.

Для минимизации образуются группы из **двух** или **четырех** единиц, расположенных в соседних клетках.

Две единицы, расположенные в соседних клетках, выражаются *двумя переменными*, а **четыре единицы** – *одной переменной*, той, которая присутствует во всех наборах, объединенных в группу.



$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1.$$

Следует помнить, что количество единиц, объединяемых в группу, должно быть целой степенью двойки, т. е. может быть равно 1,2,4,8,... и т. д.

Контур должен быть *прямоугольным* или *квадратным*.

Каждый контур должен включать как можно больше единиц, а общее число контуров должно быть как можно меньше.

Все единицы карты должны быть охвачены контурами.

Карта Карно логической функции четырех переменных содержит $2^4 = 16$ клеток.

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	1	0	1
$\bar{x}_3 x_4$	1	0	1	1
$x_3 x_4$	1	0	0	1
$x_3\bar{x}_4$	1	1	1	1

$$f = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3 x_4.$$

Добавляется склеивание по тороиду, т. е. первую и последнюю колонку диаграммы, а также верхнюю и нижнюю строки следует считать соседними.

На этой диаграмме ***одной переменной*** соответствует **восемь единиц**, расположенных в соседних клетках, произведению, включающему ***две переменные*** – ***четыре соседних единицы***; произведению ***трех переменных*** – **две** и произведению **четырех переменных – одна единица**.

Одна и та же клетка может входить в несколько групп.

При минимизации функции пяти переменных пользуются картой из 32 клеток.

	x_1				$\bar{x}_1$			
	x_3		$\bar{x}_3$				x_3	
$\bar{x}_4\bar{x}_5$								
$\bar{x}_4 x_5$								
$x_4 x_5$								
$x_4\bar{x}_5$								
	$\bar{x}_2$	x_2		$\bar{x}_2$		x_2		$\bar{x}_2$

На этой диаграмме ***одной переменной*** соответствует **16 единиц**, расположенных в смежных клетках, произведению ***двух переменных*** – **восемь, единиц**, произведению ***трех переменных*** – **четыре**, произведению ***четырех переменных*** – **две единицы**.

Картами Карно можно пользоваться и для представления функций в минимальной конъюнктивной форме. Процесс склеивания определяется расположением нулей в карте Карно. В группы объединяются нулевые клетки.

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
x_3	1	1	0	1
$\bar{x}_3$	0	0	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

3 Неполностью определенные логические функции и их минимизация

На практике часто на ряде наборов значения логической функций не заданы, поскольку на этих наборах значение функции для проектировщика цифрового устройства не представляет интереса. Такие функции принято называть **неполностью определенными**.

Их обычно доопределяют таким образом, чтобы максимально упростить соответствующие ФАЛ.

Для этой цели удобно применять карты Карно.

x_1	x_2	x_3	x_4	***F***
0	0	0	0	*
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	*
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	*

	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	*	0	0	0
$\bar{x}_3 x_4$	1	0	1	1
$x_3 x_4$	1	1	*	1
$x_3\bar{x}_4$	1	*	0	0

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_4.$$