

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Моделирование вертикального движения
под действием силы тяжести

ЕСЛИ ПОЛУЧИЛОСЬ
УРАВНЕНИЕ, КОТОРОЕ
ТРУДНО РЕШИТЬ

Решение уравнения

$$y'' = g,$$

при

$$y(0) = y_0,$$

$$y'(0) = v_0$$

имеет вид

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0$$

Общее решение уравнения

$$y'' = a - by',$$

$$a, b - \text{const}$$

ИМЕЕТ ВИД

$$y = \frac{a}{b}t + C_1 e^{-bt} + C_2$$

Решение уравнения $y'' = a - b(y')^2$,

при $y(0) = 0$

$$y'(0) = 0$$

имеет вид

$$y = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{1}{2} e^{2t\sqrt{ab}} + \frac{1}{2} \right) - t \sqrt{\frac{a}{b}}$$

КАК СОСТАВИТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ

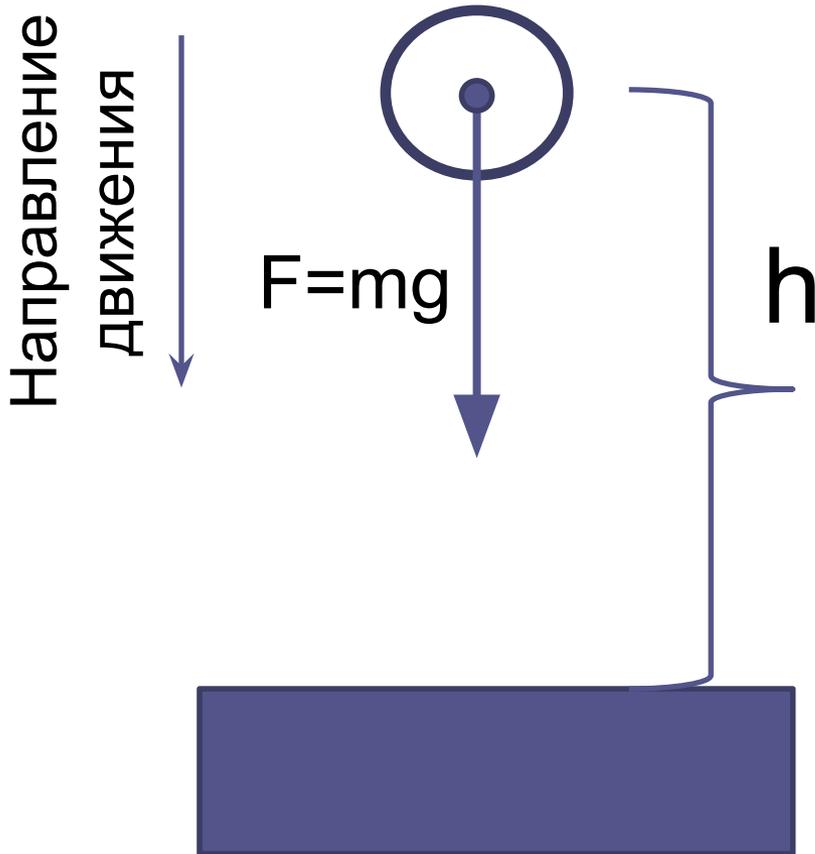
Введите обозначения

- Пусть $y(t)$ – путь, пройденный телом за время t ,
- $y'(t)$ – его скорость (v),
- $y''(t)$ – его ускорение (a),
- y_0 – путь, пройденный на момент начала движения (обычно $y_0=0$),
- v_0 – начальная скорость тела

ДАЛЕЕ ОПРЕДЕЛИТЕ, К
КАКОМУ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ
СЛУЧАЕВ ОТНОСИТСЯ
ЗАДАЧА

1. Тело падает вниз.

Сопротивлением среды можно пренебречь.



- На тело действует только сила тяжести
- По второму закону Ньютона

$$ma = mg$$

$$a = g$$

- Тогда

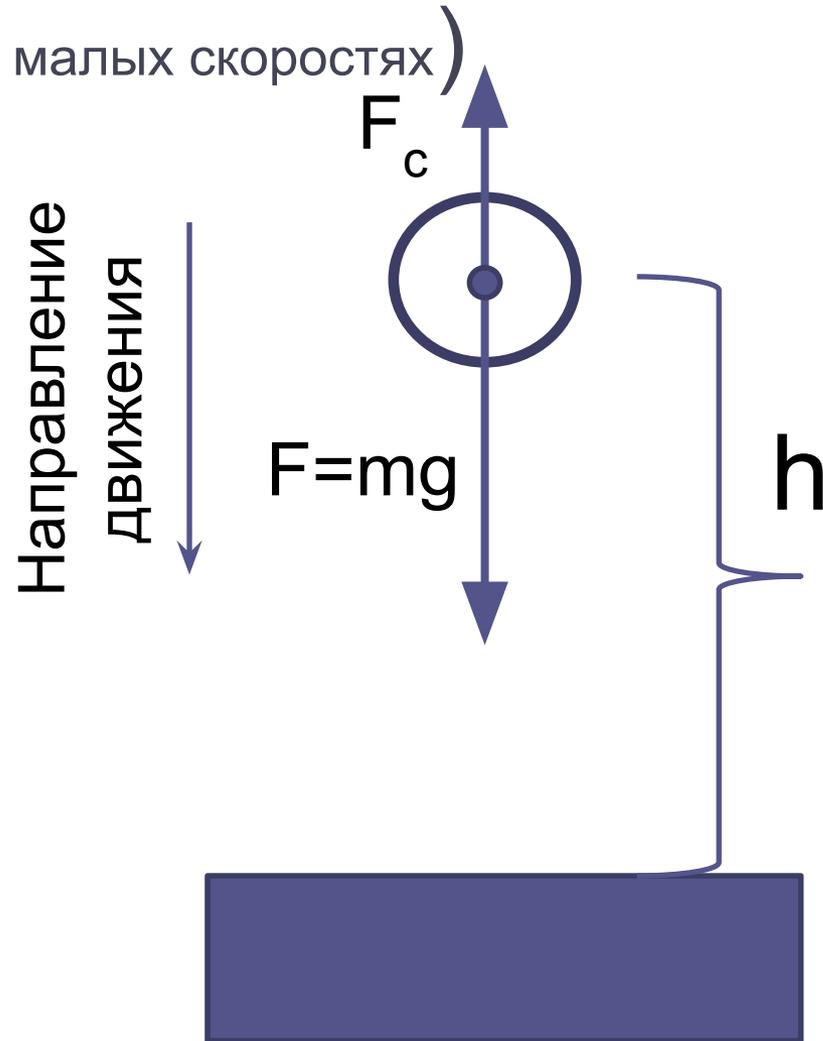
$$y'' = g$$

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = v_0$$

2. Тело падает вниз. Сила

сопротивления среды пропорциональна скорости тела. (обычно при погружении в вязкую среду и



- По второму закону Ньютона

$$ma = mg - F_c$$

- $F_c = k_1 v$
- Тогда

$$my'' = mg - k_1 y'$$

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = v_0$$

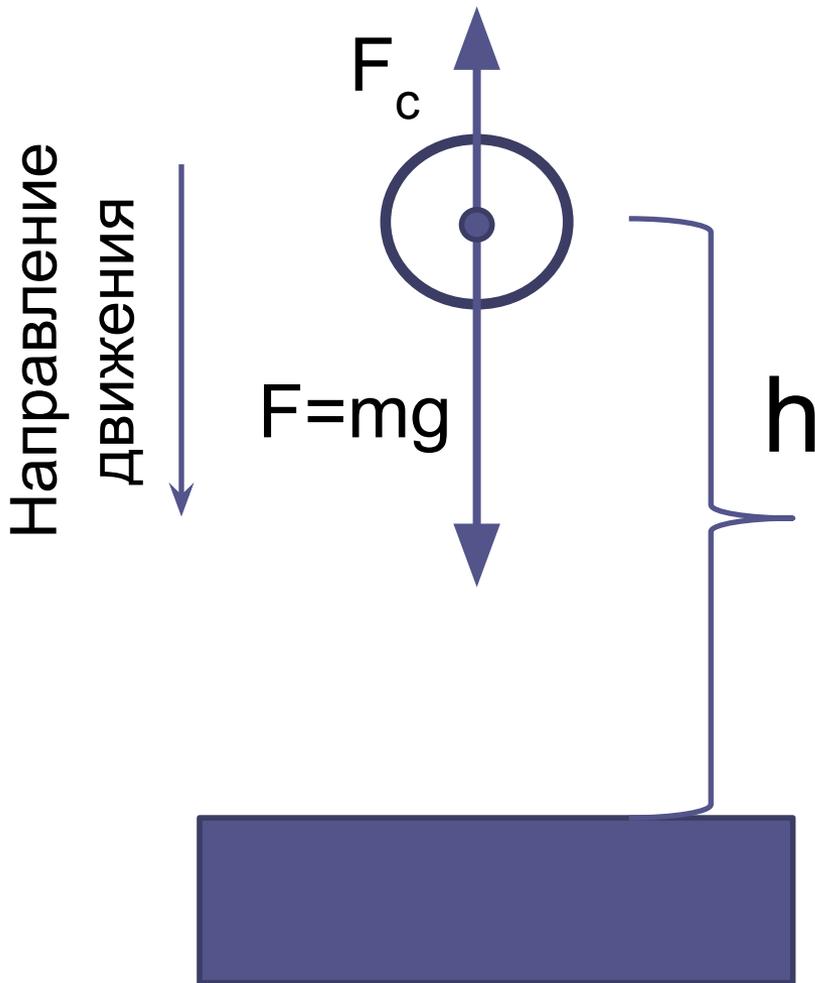
Если k_1 не дано, то как его найти см. далее

Для шара k_1 вычисляется по формуле

$$k_1 = 6\pi\mu r$$

- r – радиус шара
- μ - вязкость среды
- для воздуха ($t=20^\circ$, 1 атм) $\mu = 0,0182 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$,
- для воды $\mu = 1,002 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$,
- для глицерина $\mu = 1480 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$.

3. Тело падает вниз. Сила сопротивления среды пропорциональна **квадрату** скорости тела.



- По второму закону Ньютона

$$ma = mg - F_c$$

- $F_c = k_2 v^2$
- Тогда

$$my'' = mg - k_1 (y')^2$$

$$y(0) = y_0$$

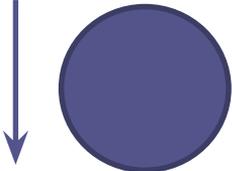
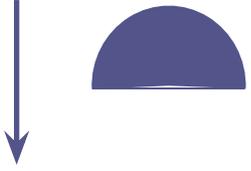
$$y'(0) = v_0$$

Если k_2 не дано, то как его найти см. далее

$$k_2 = \frac{1}{2} c S \rho_{\text{среды}}$$

- c - безразмерный коэффициент лобового сопротивления, зависит от формы тела
- S - площадь сечения тела, поперечного по отношению к потоку
- $\rho_{\text{среды}}$ – плотность среды

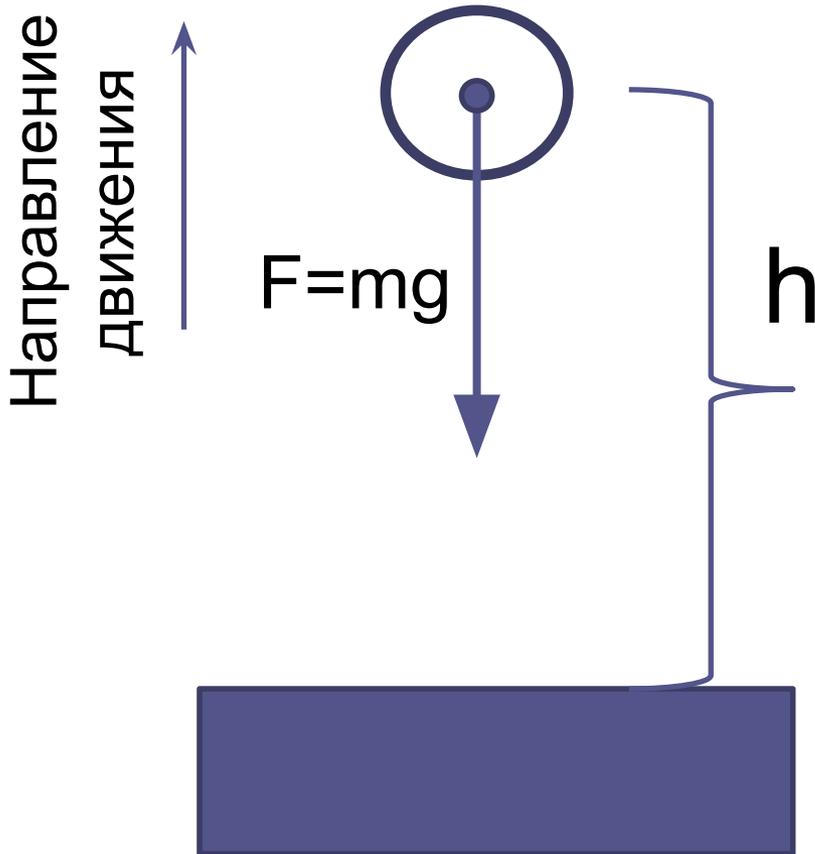
Коэффициент c

Шар	Полусфера	Диск
		
$c=0,4$	$c=0,55$	$c=1,11$

Плотность среды

- Плотность воздуха составляет $1,2041 \text{ кг/м}^3$

4. Тело подброшено вверх. Сопротивлением среды можно пренебречь



$$ma = -mg$$

$$a = -g$$

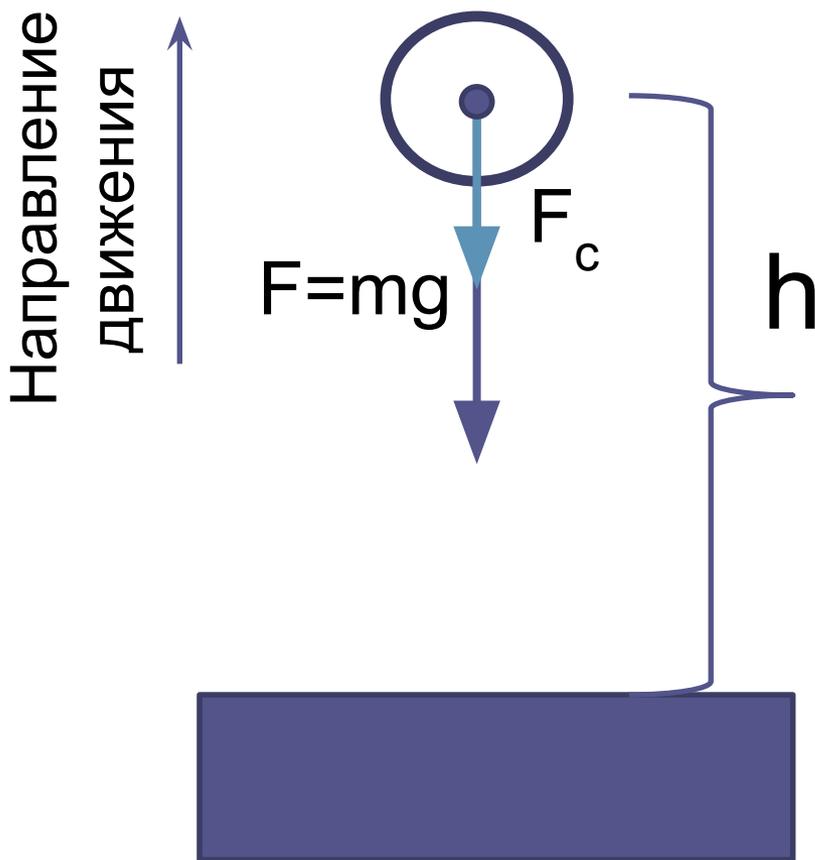
Тогда

$$y'' = -g$$

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = v_0$$

5. Тело подброшено вверх.
Сопротивление среды учитывается.



$$ma = -mg - F_c$$

F_c определяют как в случаях 2 или 3