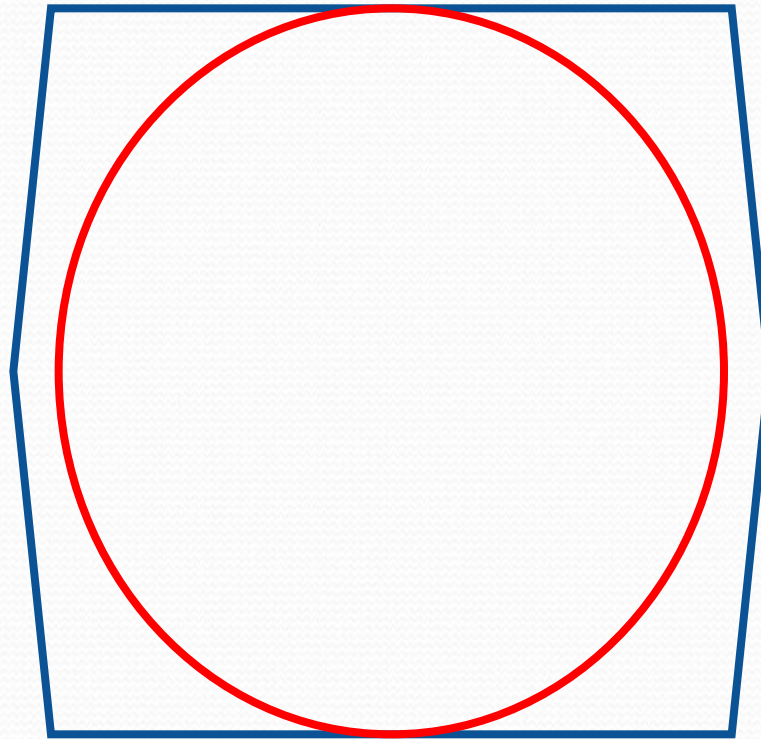


Вписанная и описанная окружности

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник - **описанным** около этой окружности.

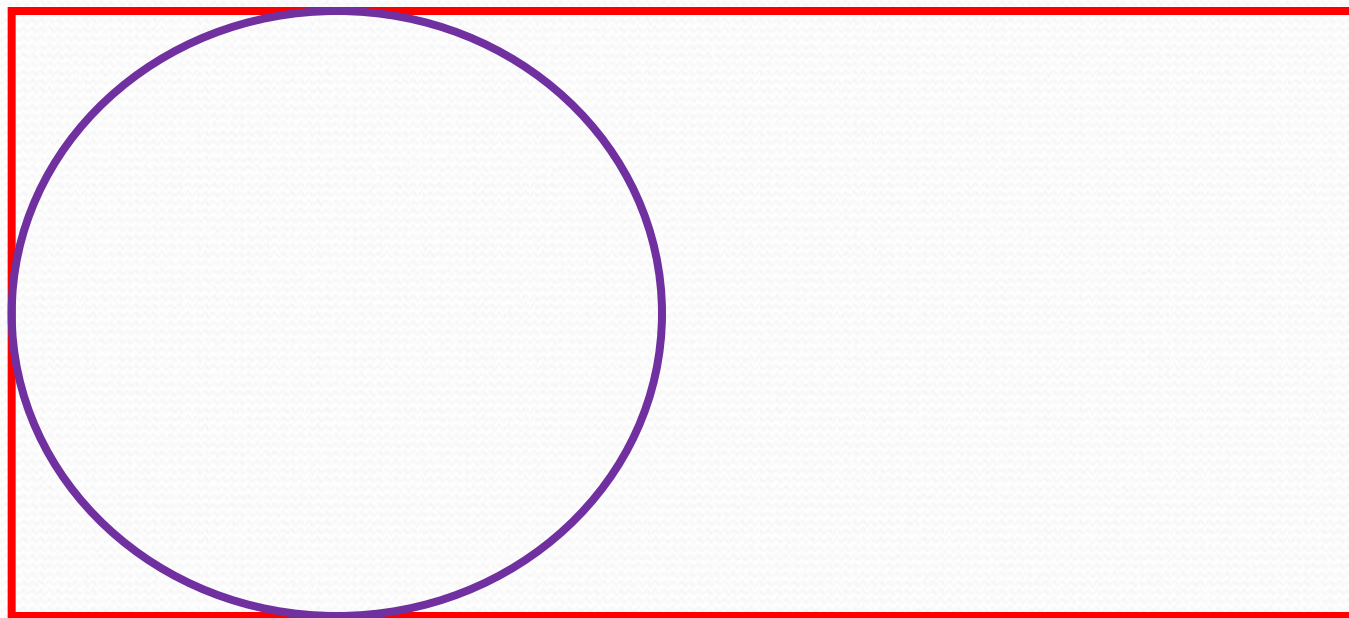


- Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис всех внутренних углов многоугольника.
- Радиус вписанной окружности вычисляется по формуле:

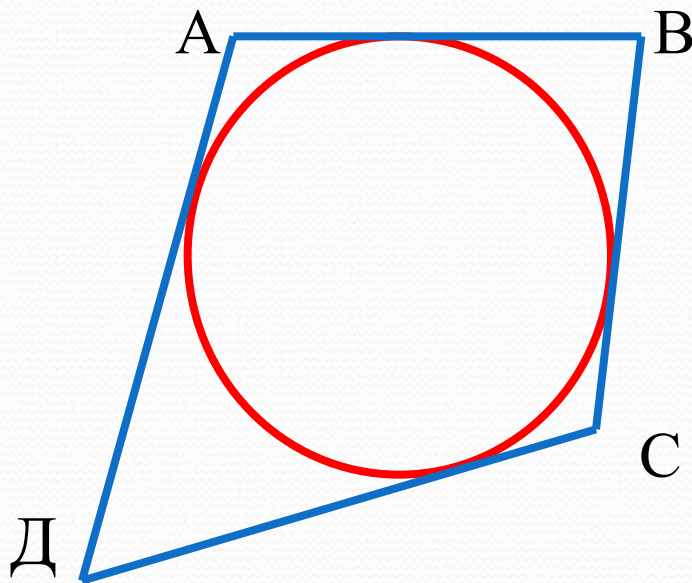
$$r = S/p,$$

где S – площадь, а p – полупериметр многоугольника.

- Не во всякий многоугольник можно вписать окружность.



В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

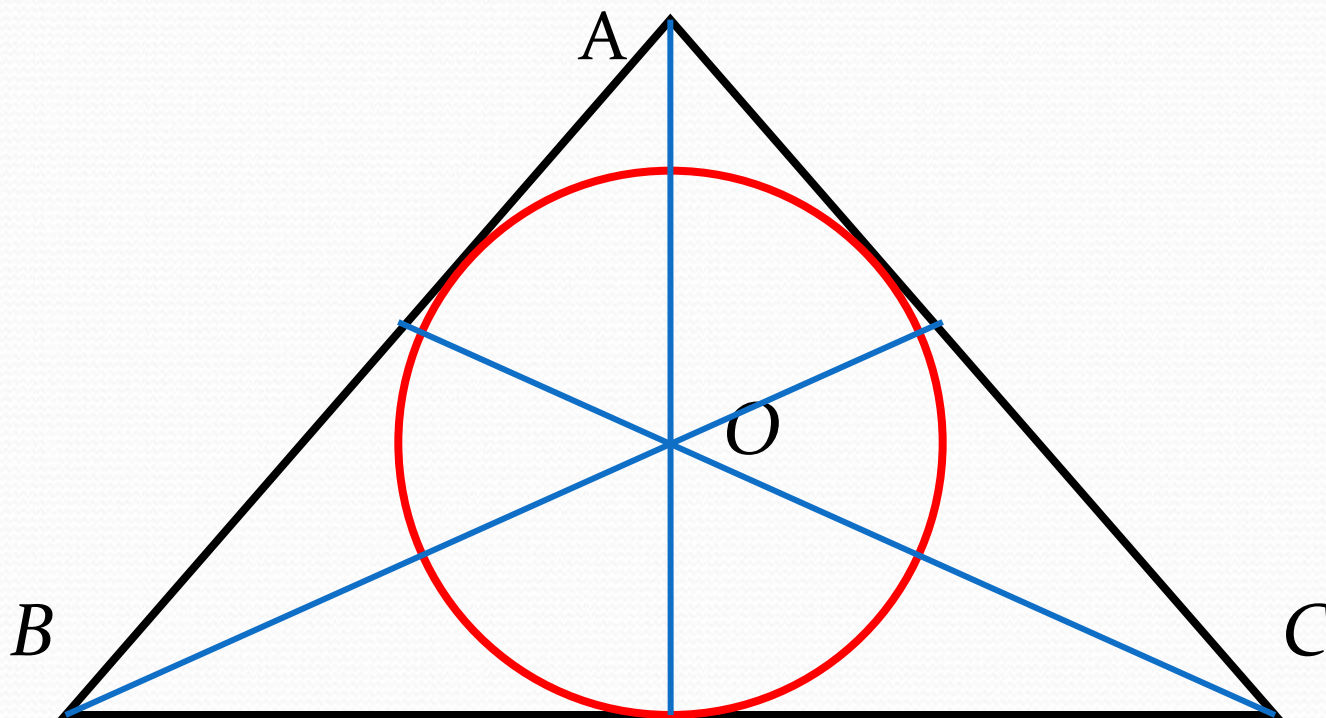


$$AB + CD = BC + AD$$

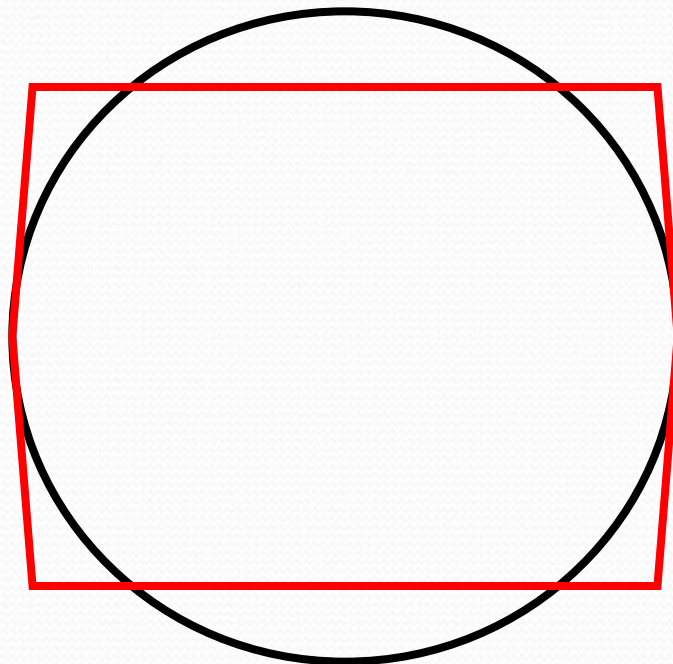
Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

В любой треугольник можно вписать окружность.

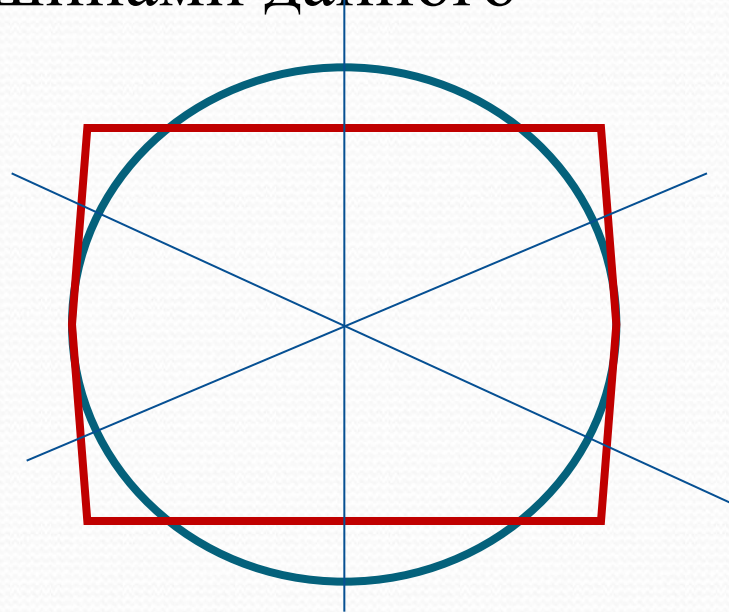
Центр окружности - точка пересечения биссектрис
треугольника.



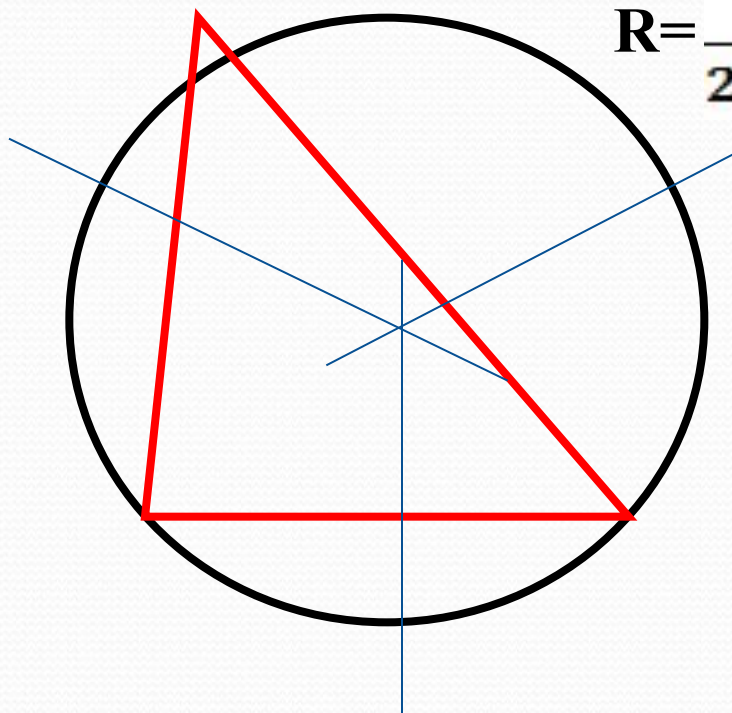
Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник - **вписанным** в эту окружность.



- Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам многоугольника.
- Радиус вычисляется как радиус окружности, описанной около треугольника, определённого любыми тремя вершинами данного многоугольника.



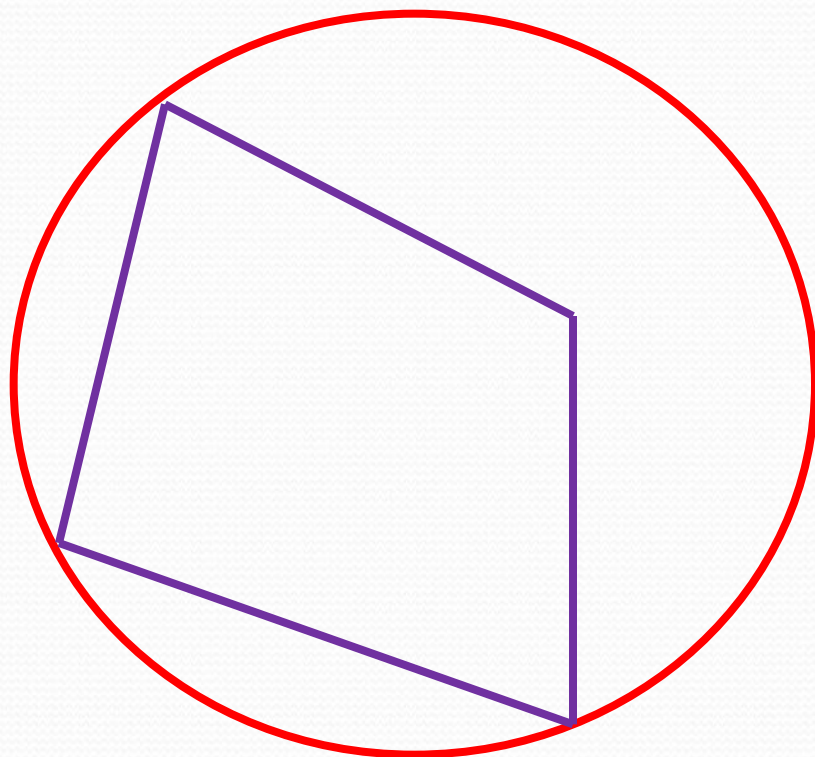
Около любого треугольника можно описать окружность.
Центр окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



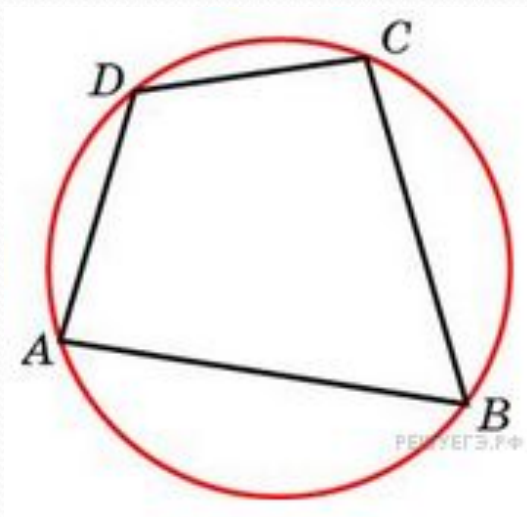
$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Около четырёхугольника не всегда можно описать окружность.



Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° .



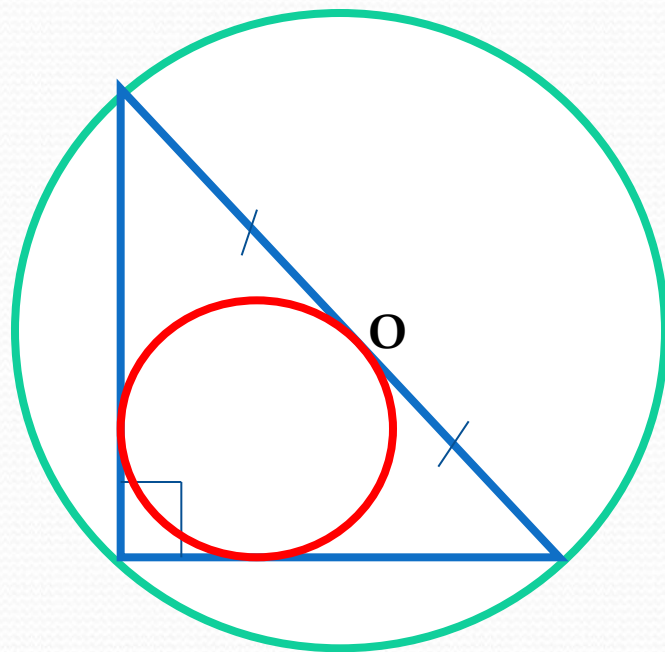
$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы. (гипотенуза является диаметром)

Радиус вписанной окружности находится по формуле:

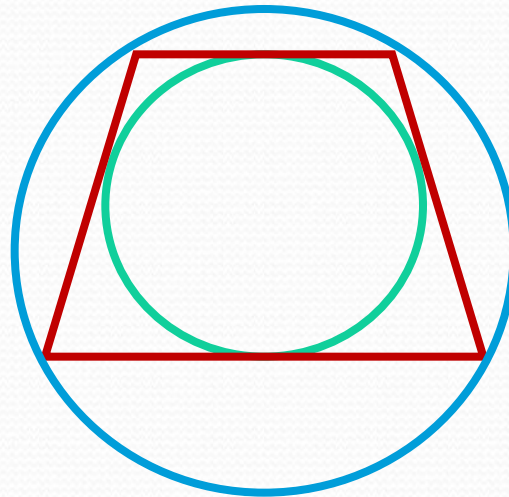
$$r = \frac{a+b-c}{2}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ – катеты, } c \text{ – гипотенуза.}$$

$$R = d/2$$

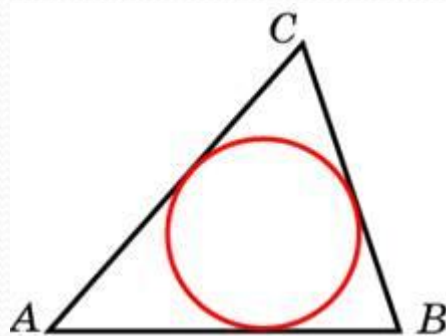


Только около равнобокой трапеции можно описать окружность.

В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна средней линии.



Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.



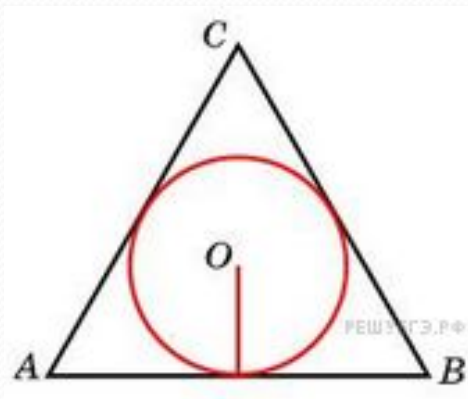
Решение.

Из формулы $S=pr$, где p - полупериметр, находим, что периметр описанного многоугольника равен отношению удвоенной площади к радиусу вписанной окружности:

$$P = \frac{2S}{r} = \frac{2 \cdot 24}{2} = 24$$

Ответ: 24

Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.

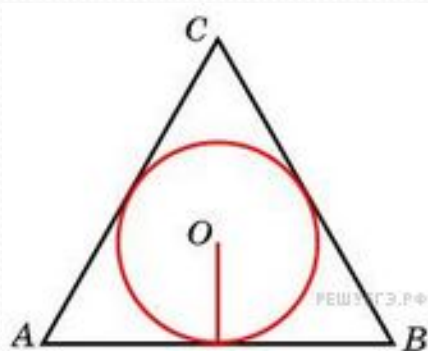


Решение.

Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен одной трети высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ: 2.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



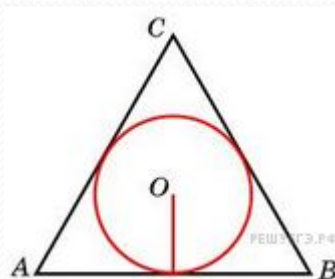
Решение.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ}{3AC} = \frac{AC \sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{3},$$

значит, $h = 3r = 18$.

Ответ: 18.

Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



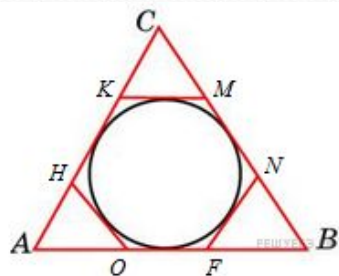
Решение.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

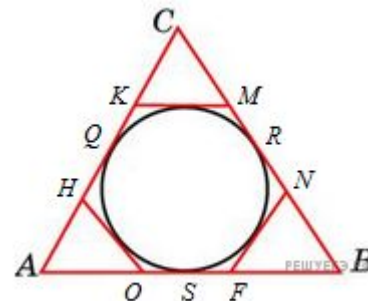
$$r = \frac{S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB^2 \sin A}{\frac{3AB}{2}} = \frac{\sqrt{3} \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



Решение.



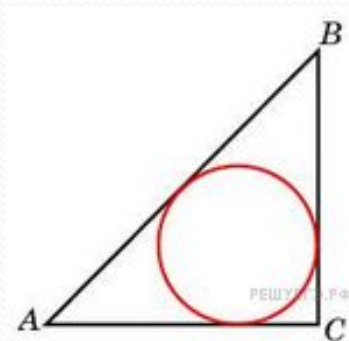
Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K, H, O, F, N, M соответственно равны друг другу. Поэтому

$$CQ + CR = P_{CKM}, \quad AQ + AS = P_{AHO}, \quad BS + BR = P_{BFN}.$$

Следовательно,
$$P_{ABC} = P_{AHO} + P_{CKM} + P_{FNB} = 24.$$

Ответ: 24.

Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

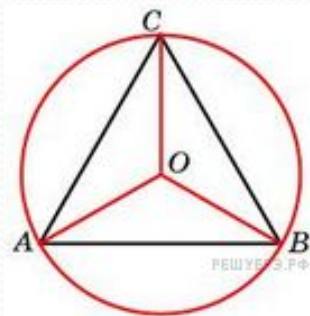


Решение.

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2} = \frac{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



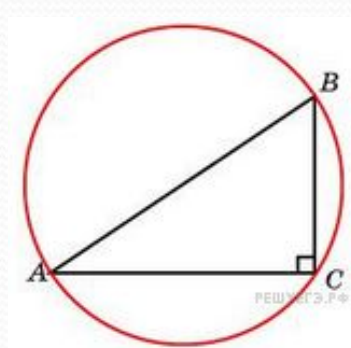
Решение.

Треугольник правильный, значит, все углы равны по 60° .

$$R = \frac{AC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



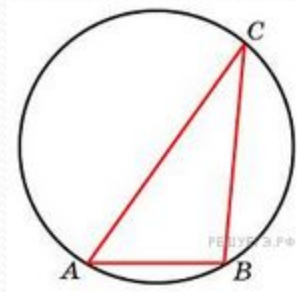
Решение.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, гипотенуза является диаметром и

$$R = 12/2=6.$$

Ответ: 6.

Сторона треугольника равна 1. Противлежащий ей угол равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



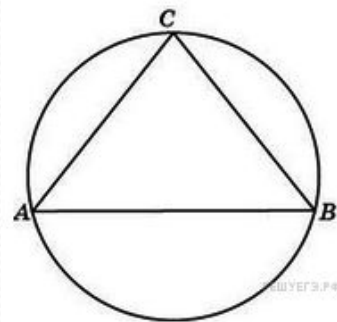
Решение.

По теореме синусов имеем:

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle C} = \frac{1}{2 \sin 30^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Решение.

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Для нахождения площади треугольника, воспользуемся формулой Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

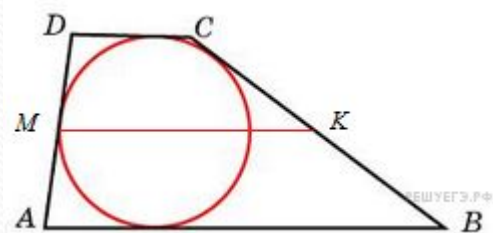
$$R = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot \sqrt{64 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 16}} = \frac{10 \cdot 40 \cdot 48}{24 \cdot 8 \cdot 4} = 25.$$

Ответ: 25

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение.

В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$



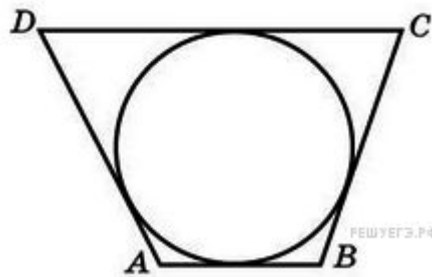
$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{AD + BC}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 1:2:3. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр равен 32.

Решение.

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD = AD+BC$.

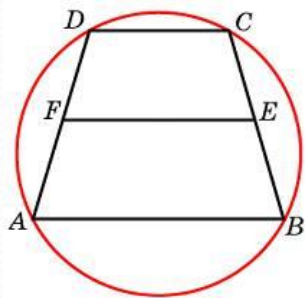


Пусть меньшая сторона равна x , тогда $x + 3x = P/2$; $4x = 16$; $x = 4$.

Тогда большая сторона равна $P/2 - 4 = 16 - 4 = 12$

Ответ: 12

Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.



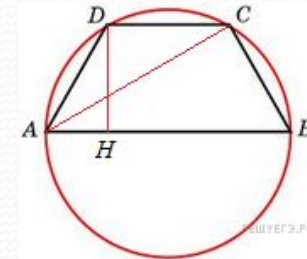
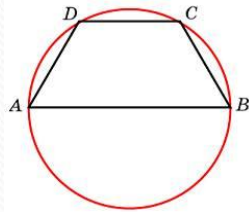
Решение.

Трапеция – равнобедренная, т. к. вокруг неё описана окружность.

$$AD = \frac{P_{ABCD} - (AB + CD)}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2} - \frac{AB + CD}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2} - FE = 11 - 5 = 6.$$

Ответ: 6.

Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60° , большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.



Решение.

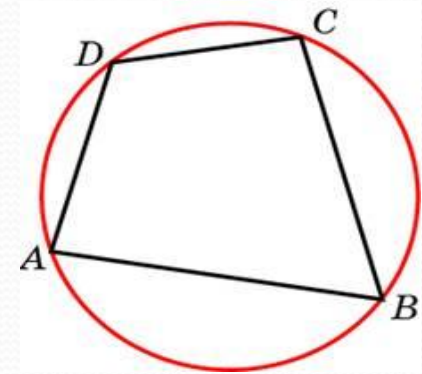
Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC . Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120° , углы при основании равны 30° . Найдем его боковую сторону:

$AD=DC=AB-2AH=AB-2AD\cos 60^\circ=12-AD$, откуда $AD=6$

$$R = \frac{AD}{2 \sin \angle DCA} = \frac{6}{2 \sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.

Углы А, В и С четырехугольника АВСД относятся как 1:2:3 .
Найдите угол Д , если около данного четырехугольника
можно описать окружность. Ответ дайте в градусах.

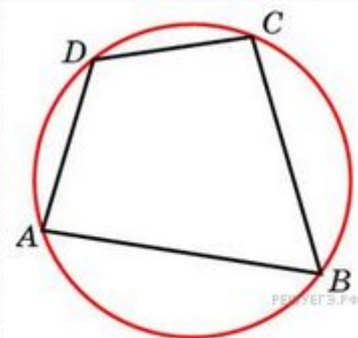


Решение.

Пусть угол А равен x° . Учитывая, что сумма противоположных углов во вписанном четырёхугольнике равна 180° , получим: $x+3x=180$; $4x=180$; $x=45$. Угол В равен $2x=2\cdot 45=90$. Тогда угол Д равен $180-90=90$.

Ответ: 90.

Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

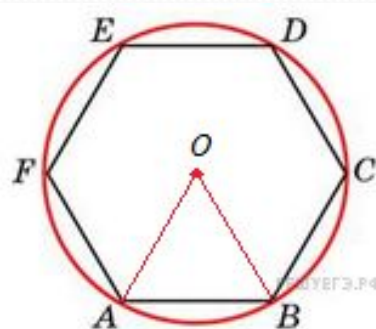


Решение.

Так как во вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° , то больший угол равен $180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$

Ответ: 122.

Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.

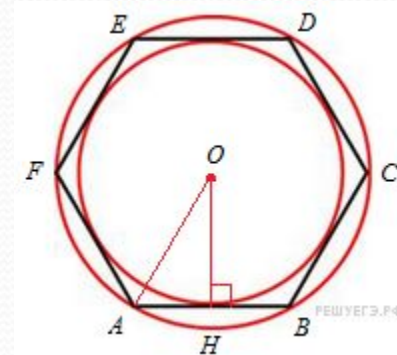


Решение.

Рассмотрим треугольник AOB . Он равносторонний, т.к. $AO=OB=R$ и угол AOB равен 60° , тогда $D=2R=2AO=2AB=2 \cdot 12=24$

Ответ: 24.

Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}/2$, описан правильный шестиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.



Решение.

Угол правильного шестиугольника равен 120° , тогда угол OAH в прямоугольном треугольнике OAH равен 60° .
Следовательно,

$$R = OA = \frac{OH}{\sin \angle OAH} = \frac{r}{\sin \angle OAH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

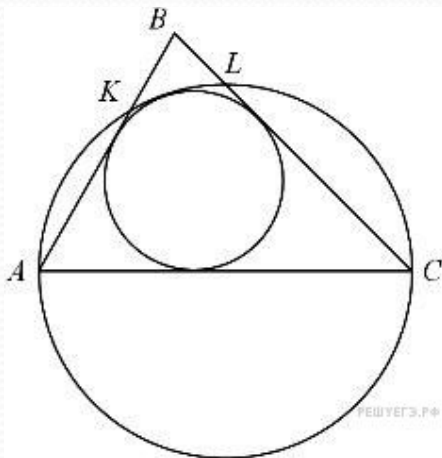
Ответ: 1.

С4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=6$, $BC=8$, $AC=9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

1) Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника. Четырехугольник AKLC — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK$.



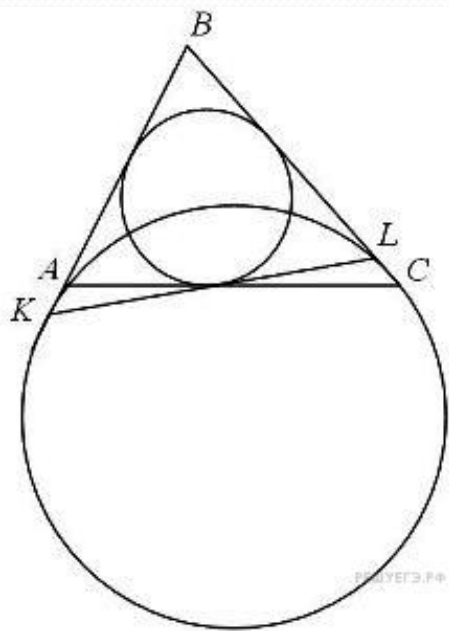
Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так ищий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL=kAB$,
 \therefore Суммы противоположных сторон описанного AKLC равны:

$$AK + LC = KL + AC;$$

Подставляя известные значения сторон, находим

$$k = \frac{AB(1-k) + BC(1-k) + AC(1+k) - kAC}{AC + AB + BC} = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}$$

$$KL = kAC = \frac{5}{23} \cdot 9 = \frac{45}{23}$$



2) Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB . Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LVK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть, треугольники LVK и ABC равны, поэтому $KL=AC=9$. Заметим, что $BK=BC>AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB .

Если точка L лежит на продолжении стороны BC , то $BL>BC$, но, аналогично предыдущему случаю, получаем $BL=AB<BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: 45/23; 9.

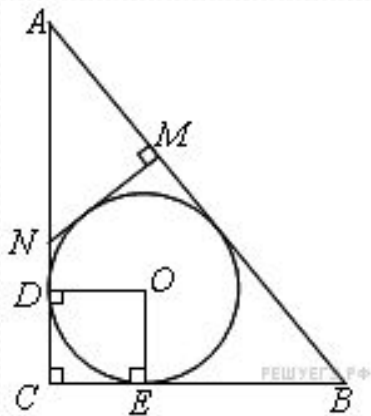
С 4. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 24, а отношение катетов треугольника равно $5/12$.

Решение.

Обозначим треугольник ABC , отношение катетов равно $5/12$, $AC=5x$ -катет, $BC=12x$ -катет, $AB=13x$ — гипотенуза. Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник ABC . Пусть O — её центр, а D и E — точки касания с катетами AC и BC соответственно. Тогда, так как $ODCE$ — квадрат, радиус этой окружности.

$OD=EC=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{12x+5x-13x}{2}=2x$. Пусть прямая MN на AB , касается окружности, пересекает AB в точке M , а AC в точке N . Тогда в равнобедренном треугольнике ANM подобен треугольнику ABC . В нём $AN=10$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны: $BC+MN=BM+CN$; $12x+24=(13x-26)+(5x-10)$, $x=10$.

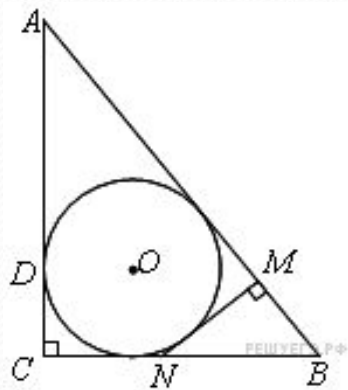
$$r=2x=20$$



Пусть прямая MN перпендикулярна AB , касается окружности, пересекает AB в точке M , а BC в точке N . Прямоугольный треугольник NBM подобен треугольнику ABC . В нём $MN=24$, $BM=57,6$, $BN=62,4$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

$MN+AC=CN+AM$; $24+5x=(12x-62,4)+(13x-57,6)$, откуда находим: $x=7,2$.

$$r=2x=14,4$$



Ответ: 20 или 14,4.

Список используемой литературы и ресурсов :

1. Атанасян Л.С. Геометрия, 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений-М.: Просвещение, 2010.
2. ЕГЭ-2013. типовые экзаменационные варианты: 10вариантов / под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2012
- 3.mathege.ru
- 4.reshuege.ru