

Компланарные векторы



Урок 5

Цели урока

- Ввести определение компланарных векторов.
- Рассмотреть признак компланарности трех векторов и правило параллелепипеда, сложение трех некопланарных векторов.

Новый материал

Определение.

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Иначе: векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Любые два вектора компланарны.

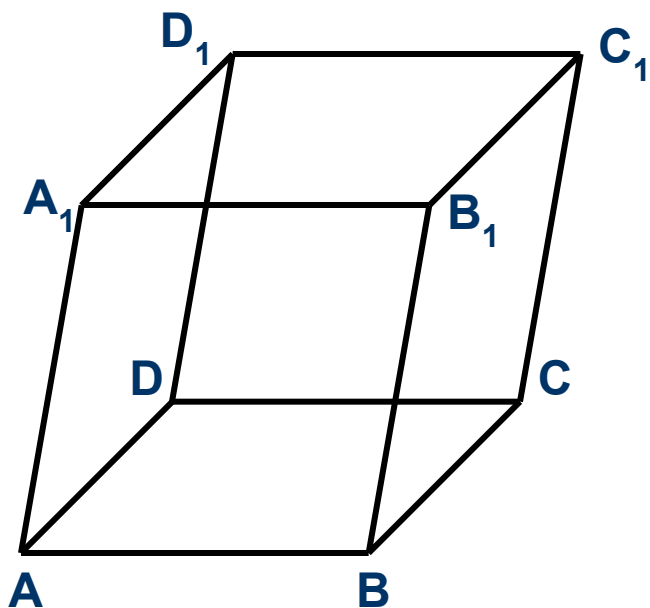
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

Почему?

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и некомпланарными.

Новый материал

Устно: 355

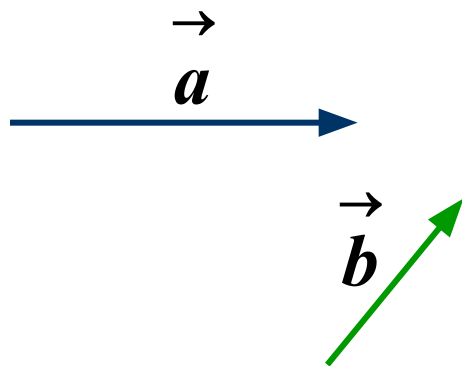


Новый материал

Признак компланарности трех векторов:

Если вектор \vec{c} можно представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$,

где x и y – некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.



Дано : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

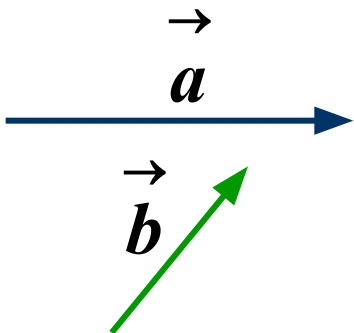
$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Доказать : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны

Новый материал

Признак компланарности трех векторов:

Доказательство.

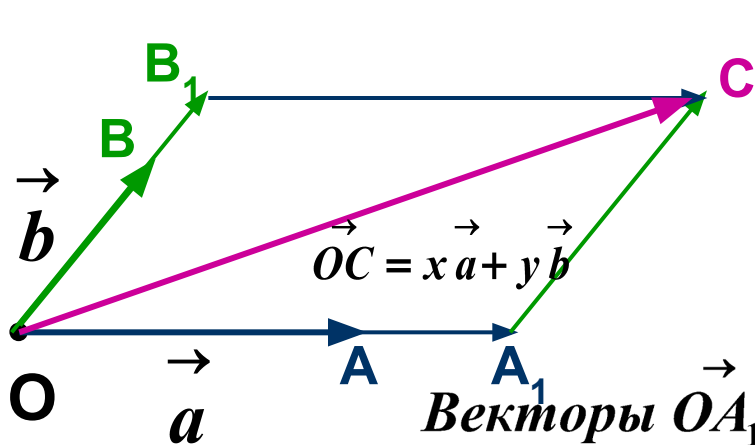


Пусть \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны.

Отложим от некоторой точки пространства O

векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$.

Векторы \vec{OA} и \vec{OB} лежат в плоскости OAB.



Построим векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{b}$.

Для определенности будем считать

что $x > 0$, $y > 0$. $\vec{OA}_1 = x\vec{a}$ и $\vec{OB}_1 = y\vec{b}$.

Векторы \vec{OA}_1 и \vec{OB}_1 также лежат в плоскости OAB.

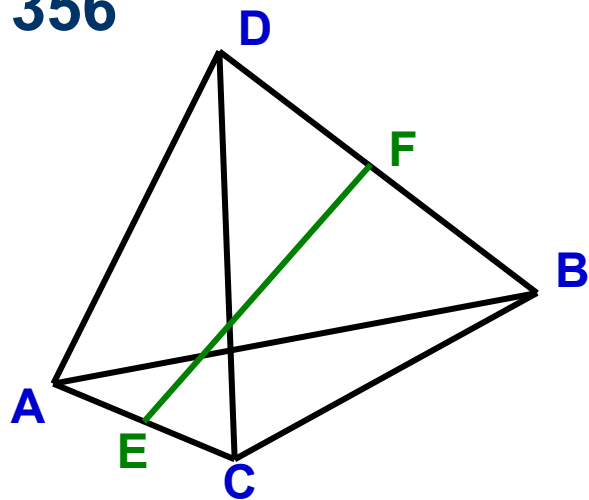
Их сумма – вектор $\vec{OC} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}$, равный вектору \vec{c} , лежит в плоскости OAB.

Новый материал

Итак, векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости,

т. е. векторы \vec{a} , \vec{b} , и \vec{c} – компланарны.

356



Дано : $ABCD$ – тетраэдр

E – середина AC ,

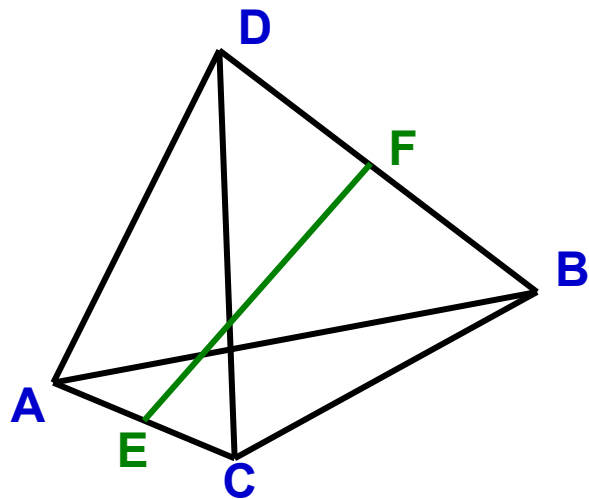
F – середина BD .

Доказать : $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$.

Компланарны ли векторы \vec{FE} , \vec{BA} и \vec{DC} ?

Новый материал

356



$$\begin{aligned}\vec{FE} &= \vec{DE} - \vec{DF} = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DC}) - \\ &- \frac{1}{2}(\vec{DB} + \vec{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{DC} - \vec{DB}) = \\ &= \frac{1}{2}(\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{DC}).\end{aligned}$$

Следовательно, $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$, ч.т.д.

По признаку векторы \vec{FE} , \vec{BA} и \vec{DC} – компланарны.

Ответ : компланарны.

Новый материал

Определение.

Разложить вектор \vec{r} по векторам \vec{a} и \vec{b} , это значит, представить его в виде $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

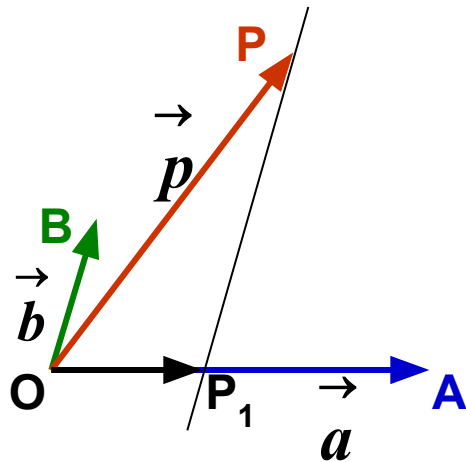
Утверждение, обратное признаку компланарности векторов:

Если векторы \vec{r} , \vec{a} и \vec{b} – компланарны, то вектор \vec{r} можно представить в виде $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа.

Докажем это.

Новый материал

Доказательство.



Пусть \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны.

Отложим от некоторой точки пространства O

векторы \vec{p} , \vec{a} и \vec{b} . Так как векторы компланарны, то они лежат в одной плоскости.

Проведем через точку P прямую, параллельную BO .

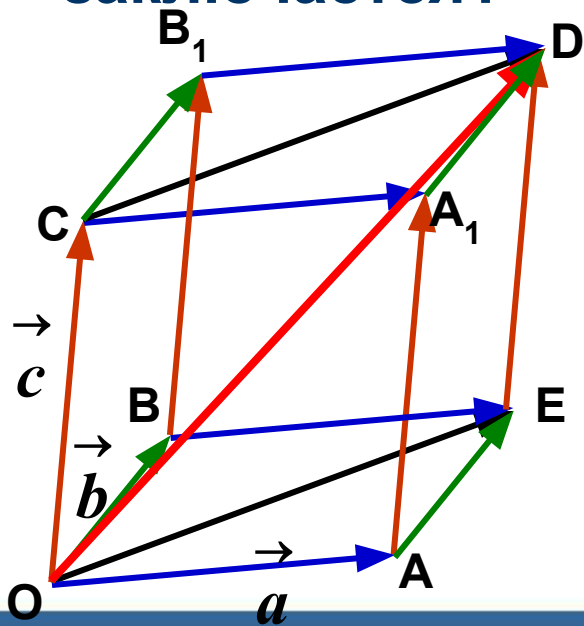
Тогда $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{P}_1P$, но $\vec{OP}_1 = x\vec{a}$, т.к. $\vec{OP}_1 \parallel \vec{a}$, $\vec{P}_1P = y\vec{b}$, т.к. $\vec{P}_1P \parallel \vec{b}$, следовательно, $\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т.е. $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, ч.т.д.

А если $\vec{p} \parallel \vec{b}$, то $\vec{p} = 0\vec{a} + y\vec{b}$.

Новый материал

Мы умеем на плоскости складывать векторы по правилу треугольника и параллелограмма. А если в пространстве?

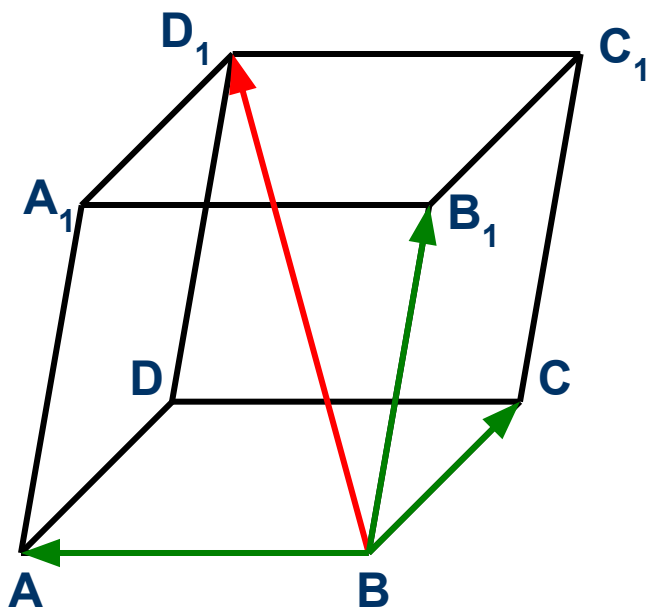
Для сложения трех некопланарных векторов пользуются **правилом параллелепипеда**. В чем оно заключается?



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OE} + \vec{OC} = \vec{OD}$$

Решение упражнений

360(a)



$$\vec{BD}_1 = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB}_1$$

Определение.

Разложить вектор \vec{r} по трем некопланарным векторам

\vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , это значит, представить его в виде $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Домашнее задание

п. 39, 40

вопросы 13-15 стр. 97

358, 360(б), 368(а, б)



Спасибо!