ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Правило Лопиталя

Рассмотрим отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$. Будем говорить, что это отношение при $x \to a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$

Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,

то вычисление этого предела называют *раскрытием* упомянутой *неопределенности*.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

В случае когда функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к бесконечности при $x \to a$, также применимо правило Лопиталя.

Справедливо правило Лопиталя и для функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к бесконечности при $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$;

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{(4x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{4}=\frac{3}{4};$$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$;

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x}}{1} = 3;$$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Экстремум функции

Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки выполняется неравенство

$$f(x_0) > f(x).$$

Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки выполняется неравенство

$$f(x_0) < f(x).$$

Общий термин для локального максимума и локального минимума – **локальный экстремум**.

Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции: для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ имела в точке x_0 локальный экстремум, необходимо, чтобы в этой точке выполнялось равенство $f'(x_0) = 0.$

Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются **критическими** (или **стационарными**).

Первое достаточное условие экстремума

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку, и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, может быть, самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в точке x_0 имеется локальный максимум, а если с «минуса» на «плюс», то минимум.

Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

1. Найти производную $y' = f'(x)$.
2. Найти критические точки.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии локальных экстремумов функции.
4. Найти значения функции в точках локального экстремума.

Пример. Исследовать функцию на экстремум:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10.$$

Решение.

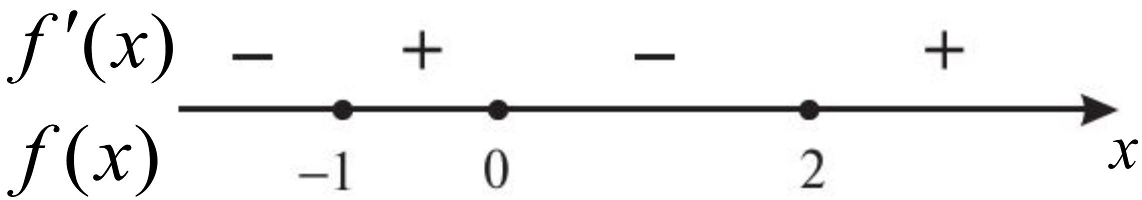
Найдем производную:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow x(x+1)(x-2) = 0$$

$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$ - критические точки

Исследуем знак производной:



$x=-1, x=2$ - точки локального минимума;

$f(-1)=5,\ f(2)=-22$ - минимальные значения функции;

$x = 0$ точка локального максимума,

$f(0) = 10$ - максимальное значение функции в этой точке.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Наибольшее или наименьшее значение функции может достигаться как в точках локального экстремума, так и на концах отрезка.

Схема для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке:

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки.
3. Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$ на отрезке [-3, 1].

Решение.

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x(x+2)\mathrm{e}^x.$$

$$f'(x) = 0\colon x(x+2)\mathrm{e}^x = 0.$$

Стационарные точки: $x_1 = 0,\ x_2 = -2.$

$$f(-3) = 9\mathrm{e}^{-3},\ \ f(-2) = 4\mathrm{e}^{-2},$$

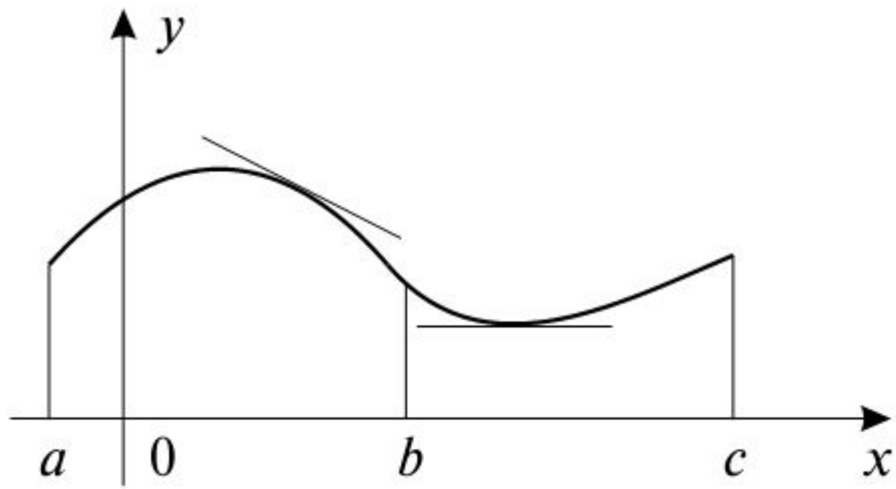
$$f(0) = 0,\ \ f(1) = \mathrm{e};$$

$$f_{\text{наиб}} = f(1) = \mathrm{e},\ \ f_{\text{наим}} = f(0) = 0.$$

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Кривая $y=f(x)$ имеет на $(a; b)$ **выпуклость, направленную вверх**, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая $y=f(x)$ имеет на $(b; c)$ **выпуклость, направленную вниз**, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.


y
a
0
b
c
x

Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную и $f''(x) > 0$ на $(a; b)$, то график этой функции имеет на $(a; b)$ выпуклость, направленную вниз; если же $f''(x) < 0$ на $(a; b)$, то график имеет на (a, b) выпуклость, направленную вверх.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Необходимое условие перегиба в точке x_0 для графика функции *f*(*x*), имеющей в этой точке непрерывную вторую производную, заключается в том, что $f''(x_0) = 0.$

Достаточным условием перегиба является смена знака второй производной функции *y=f(x)* при переходе через точку x_0 (т.е.если вторая производная имеет разные знаки слева и справа от x_0, то график функции имеет перегиб при $x = x_0$.

Асимптоты

Прямая линия называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки M, лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Различают три вида асимптот: *вертикальные*, *горизонтальные* и *наклонные* .

Прямая $x=a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \to a+} f(x)$ или $\lim_{x \to a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y=b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b\right)$.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции *y*=*f*(*x*) при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если *f*(*x*) можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$$

Пример.

Найти наклонную асимптоту графика функции

$$y=\frac{x^3}{x^2-x+1}.$$

Решение.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид: $y=kx+b$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x + 1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2 - x + 1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} = 1.$$

Уравнение наклонной асимптоты:

$$y = x + 1.$$

Пример.

Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$$

Решение.

$x = 1$ – вертикальная асимптота.

Горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонную асимптоту:

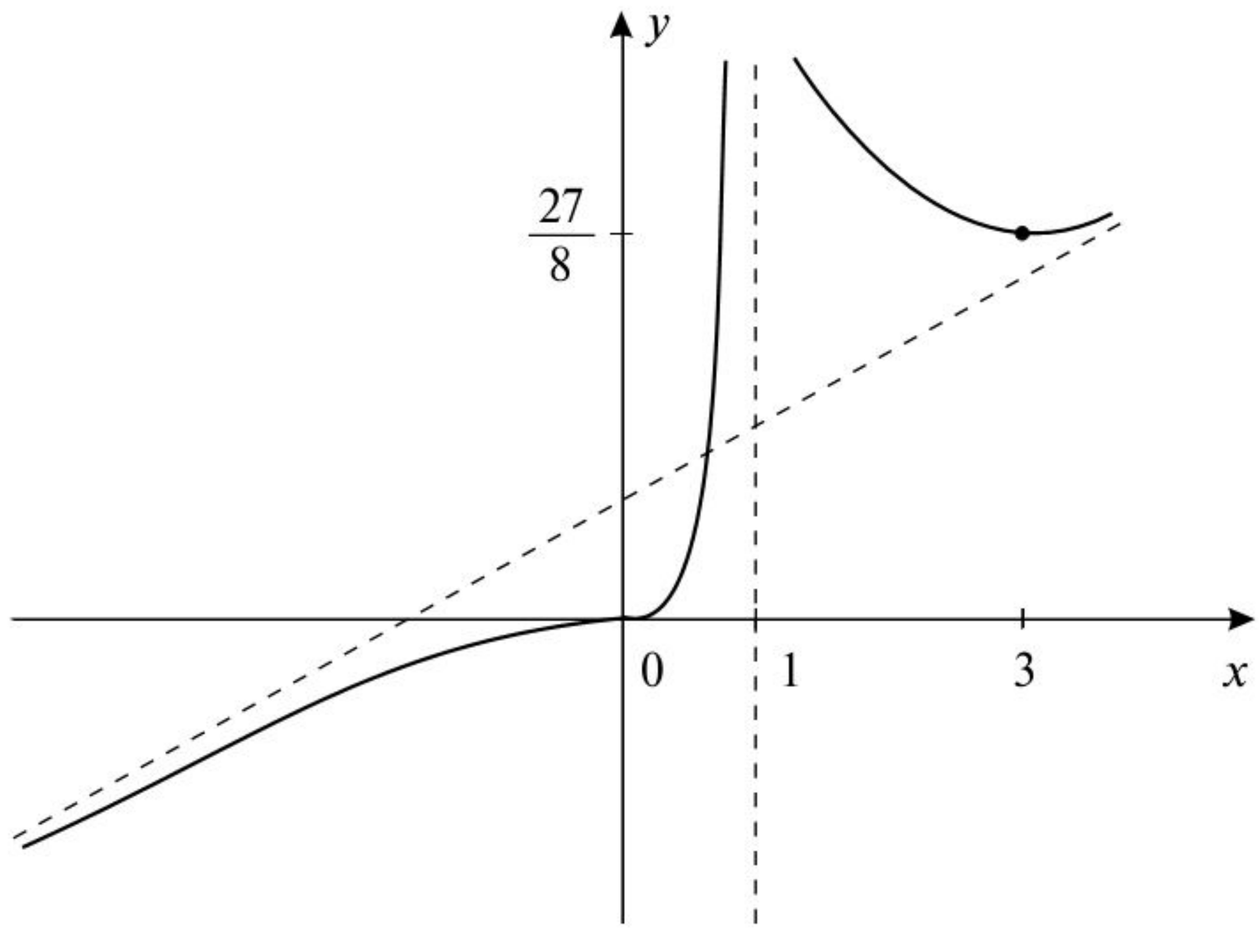
$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2x(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2 - x}{2(x-1)^2} = 1.$$

$y = \frac{1}{2}x + 1$ – наклонная асимптота.



y
$\frac{27}{8}$
0
1
3
x