Факториал және таңдаулар

$$P_n = n! \Leftrightarrow P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} \Leftrightarrow C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-m+1)}{m!}$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \Leftrightarrow A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-m+1)$$

Факториал

Бірден бастап *n*-ге дейінгі барлық натурал сандардың көбейтіндісін *n* факториал деп атаймыз және ол *n!* символымен белгіленеді.

$n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n$

1-ескерту. $0! = 1$

2-ескерту. $n! =(n-1)!\cdot n=(n-2)!\cdot (n-1)\cdot n$

Мысал

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

Есептеңіз

* $$\frac{5!}{8!},$$

  $$\frac{10!}{3!},$$

  $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

Факториалы бар теңдеулер

1-мысал:

5!x=8!

$x = \frac{8!}{5!} = \frac{5!*6*7*8}{5!}$=6*7*8=336

2-мысал:

$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$=42

Қайталанбайтын орналастыру

Берілген *n* элементтен бір бірінен құрамы немесе орналасу ретімен өзгеше болатын *m* элементтер таңдамасын *n* элементтен алынған *m* элементті *қайталанбайтын орналастыру* деп атайды.

А Ә А Б Е Ә

1-мысал

n әртүрлі элементтердің *m* элементтерінен тұратын әртүрлі қанша комбинация құрастыруға болады? Мұнда әрбір комбинациялар бір бірінен кем дегенде бір элементімен немесе сол элементтердің әр түрлі орналасуымен өзгешеленеді.

Шешуі

Бірінші элементті *n* элементтер арасынан *n* тәсілмен таңдап алуға болады. Екінші элемент *(n -1)* тәсілімен таңдалады, үшінші элемент *(n -2)* тәсілімен таңдалады. Дәл осылай *m* элементтен тұратын комбинацияның санын көбейту ережесін пайдаланып *n(n-1) (n-2)(n-3)...(n- (m-1))* тәсілмен таңдауға болатынын көреміз. Факториалды қолдану арқылы, мұны былай жазуға болады:

$$\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))(n-m)!}{(\mathrm{n}-\mathrm{m})!}=\frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{m})!}$$

Қайталанбайтын орналастыру

* Қайталанбайтын орналастыру былай белгіленіп A_n^m , мына формуламен есептелінеді:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1)$$

2-мысал

1, 2, 3, 4, 5 цифрлар арқылы цифрлары қайталанбайтын қанша а) екі таңбалы, үш таңбалы, төрт таңбалы, бес таңбалы сандар құрастыруға болады?

Шешуі

1, 2, 3, 4, 5 цифрлар арқылы цифрлары қайталанбайтын қанша а) екі таңбалы, үш таңбалы, төрт таңбалы, бес таңбалы сандар құрастыруға болады?

а) екі таңбалы сандар саны – 5 элементтен 2-ден алынған қайталанбайтын орналастырулар болады, онда (1) формула бойынша

$$A_5^2 = \frac{5\,!}{3\,!} = 20$$

Шешуі

1, 2, 3, 4, 5 цифрлар арқылы цифрлары қайталанбайтын қанша а) екі таңбалы, үш таңбалы, төрт таңбалы, бес таңбалы сандар құрастыруға болады?

б) үш таңбалы сандар саны – 5 элементтен 3-тен алынған қайталанбайтын орналастырулар болады, онда (1) формула бойынша

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$$

Шешуі

1, 2, 3, 4, 5 цифрлар арқылы цифрлары қайталанбайтын қанша а) екі таңбалы, үш таңбалы, төрт таңбалы, бес таңбалы сандар құрастыруға болады?

в) төрт таңбалы сандар саны – 5 элементтен *4*-тен алынған қайталанбайтын орналастырулар $A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120$ сан алуға болады.

Шешуі

1, 2, 3, 4, 5 цифрлар арқылы цифрлары қайталанбайтын қанша а) екі таңбалы, үш таңбалы, төрт таңбалы, бес таңбалы сандар құрастыруға болады?

г) бес таңбалы сандар саны да $A_5^5 = \frac{5!}{0!} = 120$

тең болады.

3-мысал

25 орынға *4* адамды неше тәсілмен орналастыруға болады?

Шешуі

(1) формуласы бойынша *n=25*, *m=4*, онда

$$A_{25}^{4} = \frac{25!}{21!} = 22 \times 23 \times 24 \times 25 = 303600$$

тәсілмен орналастыруға болады.

Қайталанбалы орналастырулар

Егер бір таңдамада бір элемент 2*, 3, …* *n* рет қайталанса, онда оны *n* элементтен *m* элементті *қайталанатын орналастырулар* деп атайды. Оны былай белгілеп $\overline{A_n^m}$, мына формула бойынша есептейді*:*

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

4-мысал

* 1, 2, 3, 4, 5 цифрлар арқылы цифрлары қайталанатын неше үш таңбалы сан құрастыруға болады?

Шешуі: $\overline{A_5^3} = 5^3 = 125$

Қайталанбайтын алмастыру (перестановка)

Егер қайталанбайтын орналастыру формуласында *m= n* болса , онда A_n^n - *қайталанбайтын алмастыру* деп аталады. Қайталанбайтын алмастыруды P_n арқылы белгілейді және мына формула арқылы есептеледі:

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Мысал

а) 2, 3, 4 цифрлары арқылы қанша үш таңбалы сан жазуға болады. б) 2, 3, 4, 7 цифрлары арқылы қанша төрт таңбалы сан жазуға болады. Санды жазғанда цифрлар қайталанбайды.

Шешуі

а) (3) формуланы пайдалану арқылы $P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$ үш таңбалы сан бар екенін көруге болады.

б) (3) формула бойынша $P_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ төрт таңбалы сан бар екенін көреміз.

Қайталанатын алмастыру

k элемент берілсін. Бірінші элемент n_1 рет қайталансын, екінші элемент n_2, … , *к-шы* – $n_к$ рет қайталансын $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$.

Егер берілген элементтер әр түрлі болса, онда алмастыру саны $n!$-ға тең болар еді. n элементтердің ішінде қайталанатын элементтері бар алмастырудың саны $n!$ –дан $n_1!\, n_2! \ldots n_к!$ есе кем болады. Сонда *қайталанатын алмастырудың* саны мына формула бойынша есептеледі

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_к} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! n_3! .. n_k!} \qquad (4)$$

5-мысал

М, Е, К, Е, М, Е. әріптерінен алмастыру санын табыңыз.

Шешуі: Мұнда *М* әрпі 2 рет қайталанады, яғни $n_1=2$, *Е* әрпі 3 рет қайталанады, яғни $n_2=3$ және *К* элементі үшін – $n_3=1$. $n=n_1+n_2+n_3=2+3+1=6$. Сонымен (4) формула бойынша қайталанатын алмастыру

$$P_{3,2,1}=\frac{6!}{3!2!1!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{2}=60$$

6-мысал

№1, №2, №3, №4 нөмірлі *4* өнеркәсіп бөлімшесіне *10* маманды сәйкесінше *1, 2, 3, 4* мамандар баратындай неше әдіспен бөлуге болады?

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_к} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! n_3! .. n_k!}$$

Шешуі

Мұнда $n = 10$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 4$, онда (4) формула бойынша $\frac{10!}{1!\,2!\,3!\,4!} = 12600$ әдіспен *10* маманды *4* өнеркәсіп бөлімшесіне бөлуге болатынын есептейміз.