Д.В. Подлесный

научный руководитель ГБОУ Республики Мордовия

«Республиканский лицей для одарённых детей»

Геометрический подход к задачам баллистики

Законы равноускоренного движения в координатном виде:

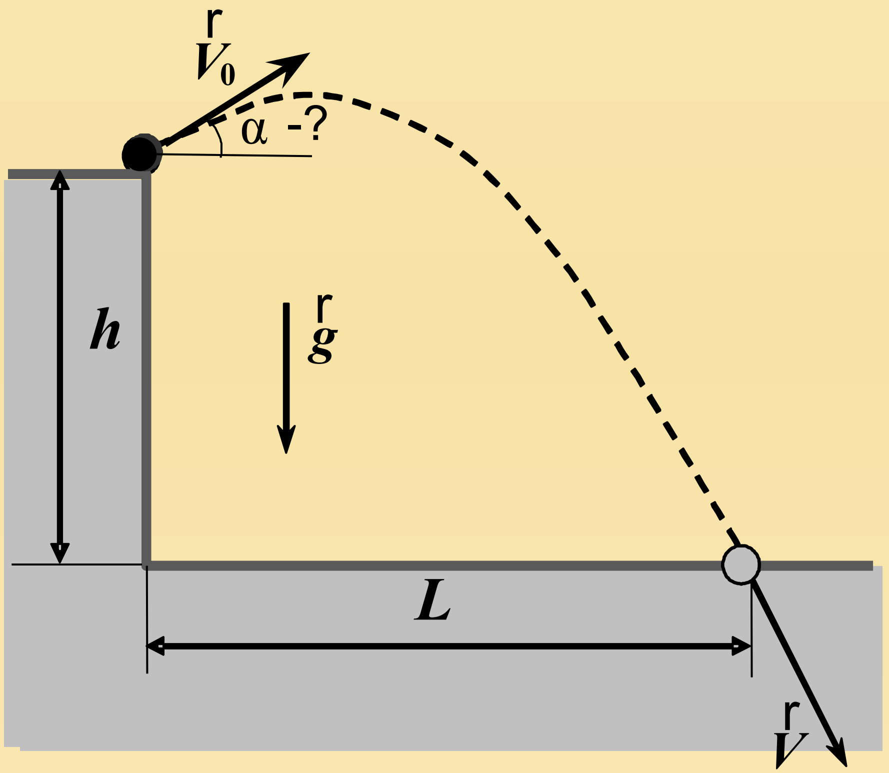
$$\begin{cases} x = x_0 + V_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}, \\ y = y_0 + V_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x = V_{0x} + a_x t, \\ V_y = V_{0y} + a_y t. \end{cases}$$

Задача на оптимальное бросание камня

1. Как нужно бросить камень, чтобы дальность полета L была максимальна?

2. Как нужно бросить камень, чтобы попасть в цель при минимальной начальной скорости?



Классический способ решения

$$\begin{cases} L = V_0 \cos\alpha \cdot t, \\ 0 = h + V_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

$$t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}};$$

$$L = V_0 \cos\alpha \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \right).$$

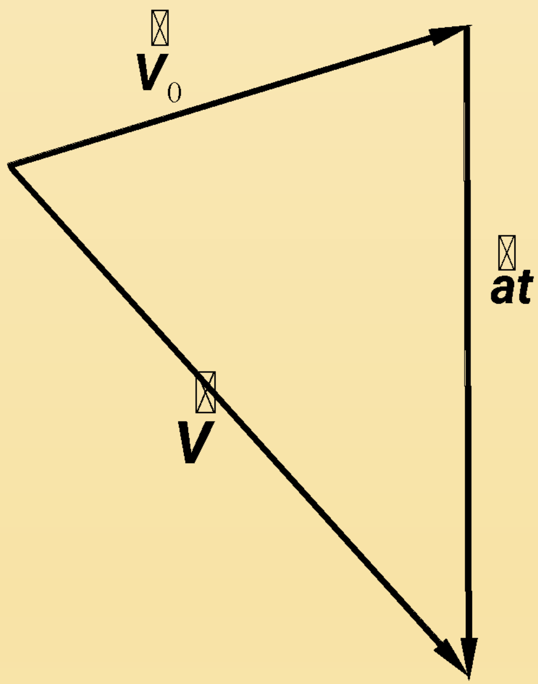
Подлесный Д.В., Александров Д.А. О движении тела, брошенного под углом к горизонту // Потенциал, 2010. – №1. – С.25-30.

Векторные уравнения:

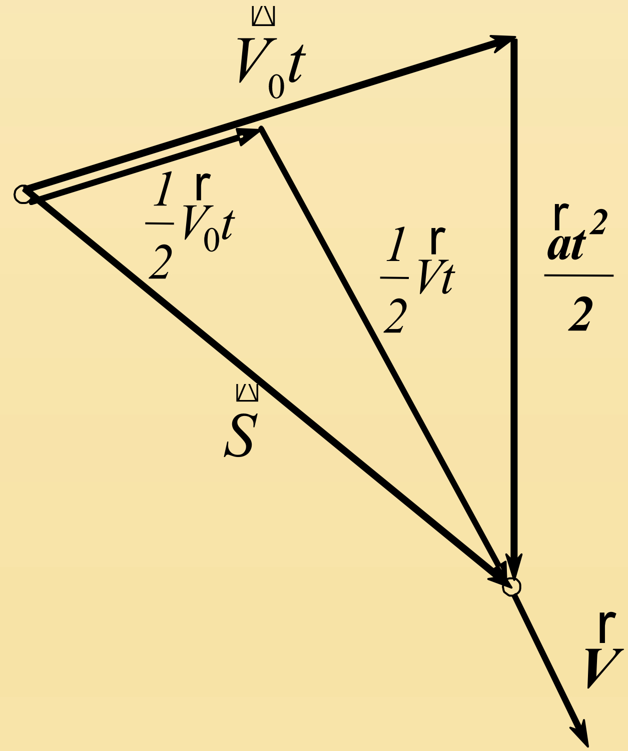
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2},$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} t.$$

$$\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} = \frac{\vec{V}_0 t}{2} + \frac{\vec{V} t}{2}.$$



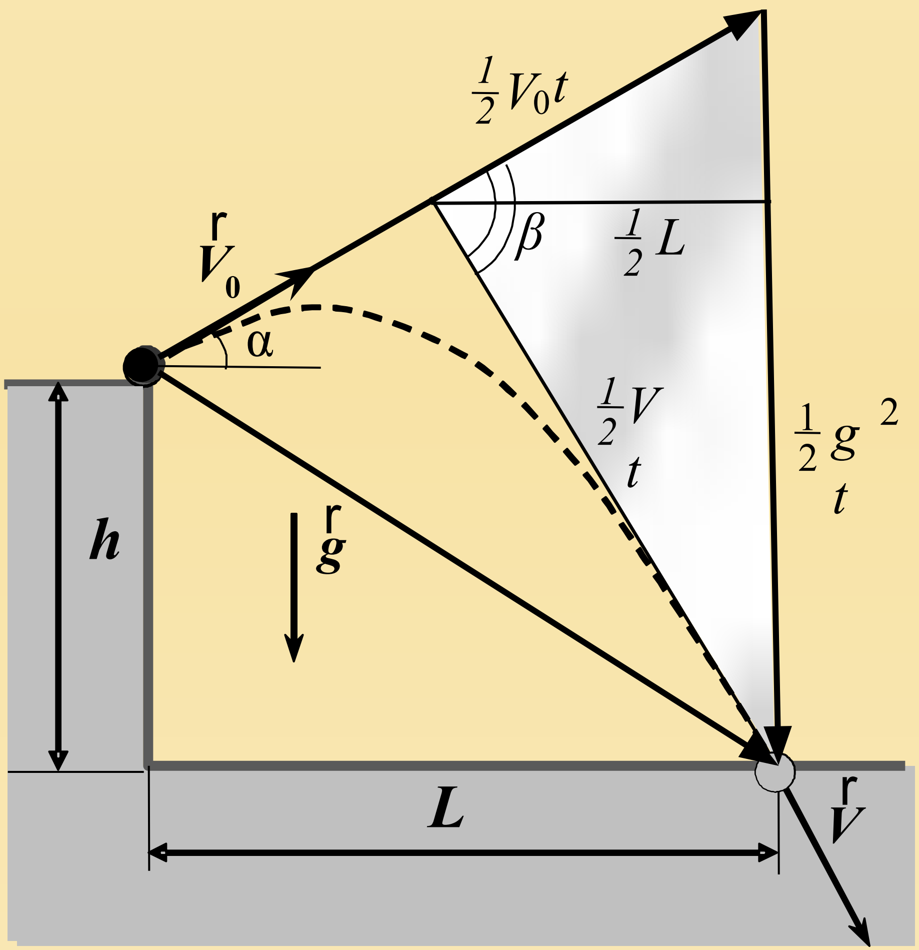
Треугольник скоростей



Треугольник перемещений

При равноускоренном движении скорость тела $\vec{V}$ в любой момент времени t направлена всегда вдоль медианы «треугольника перемещений»!

Решение задачи на оптимальное бросание камня (геометрический подход)



$$\frac{1}{2}\cdot g\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{2}L=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V_0t\cdot\frac{1}{2}Vt\cdot\sin\beta$$

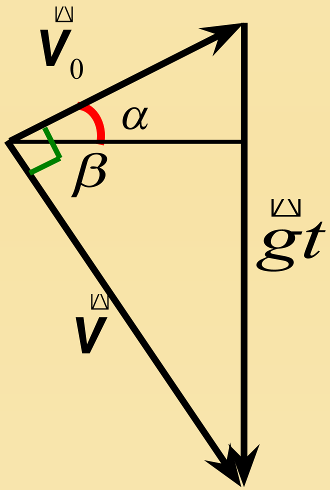
$$L=\frac{V_0V}{g}\sin\beta$$

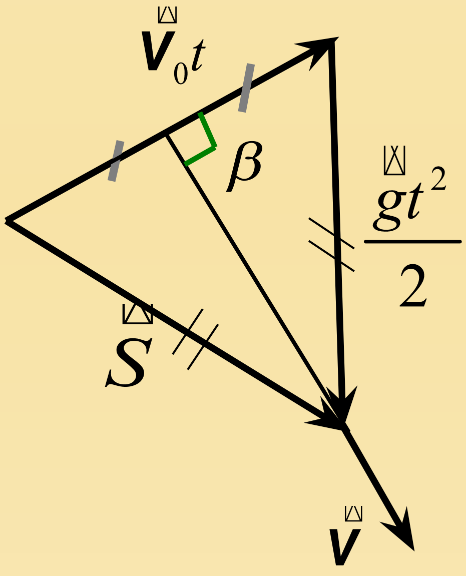
$$\sin\beta=1 \qquad \beta=90^o$$

$$V=\sqrt{V_0^2+2gh}$$

$$V_0\sqrt{V_0^2+2gh}=\frac{Lg}{\sin\beta}$$

При «оптимальном бросании» треугольник скоростей – прямоугольный, треугольник перемещений – равнобедренный!

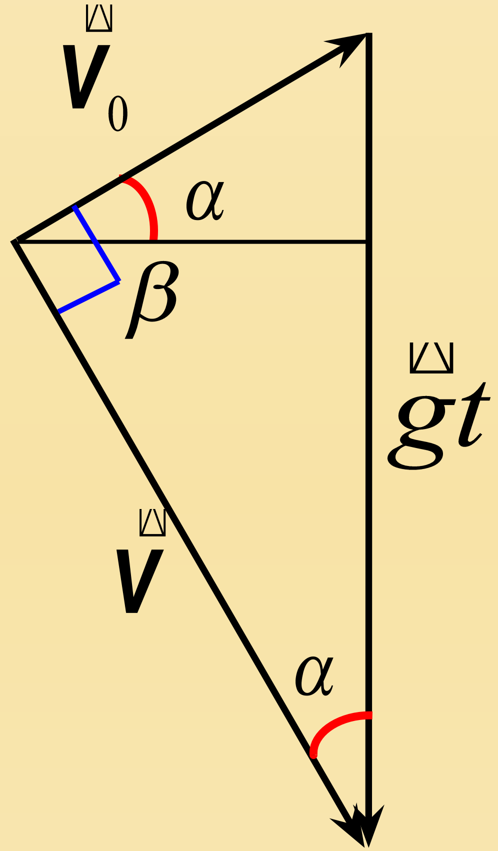




$$\beta = 90^o$$

$$S = \frac{gt^2}{2}$$

Угол оптимального бросания



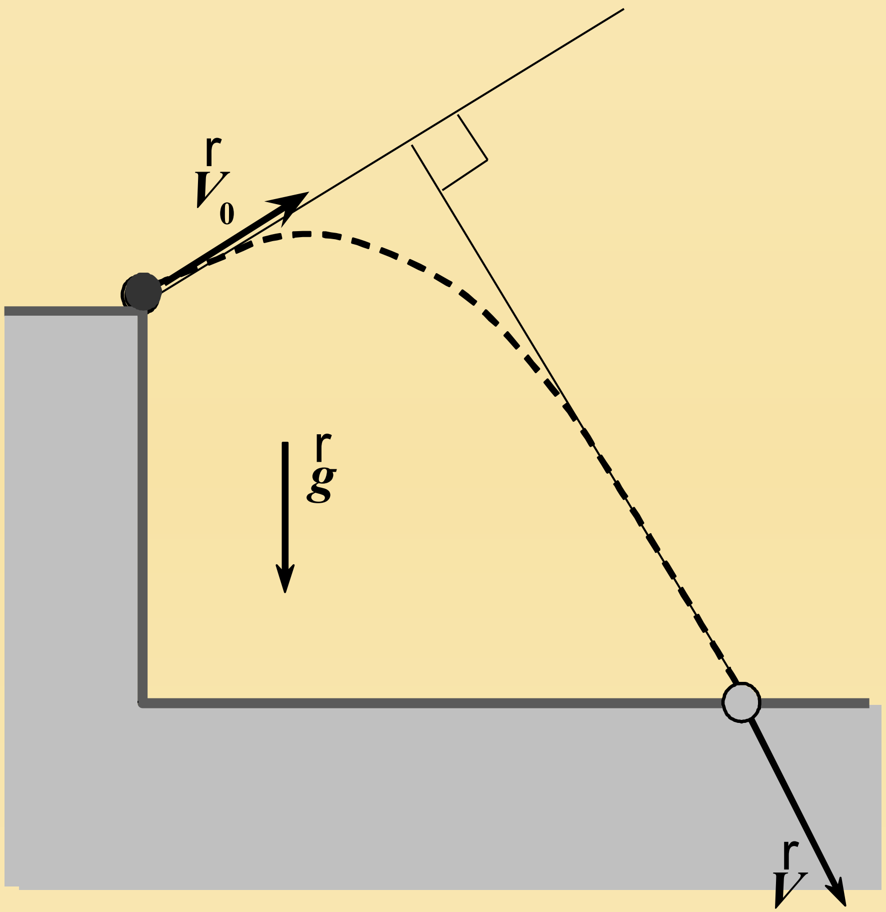
$$\beta = 90^o$$

$$tg\alpha = \frac{V_0}{V} = \frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2gh}}$$

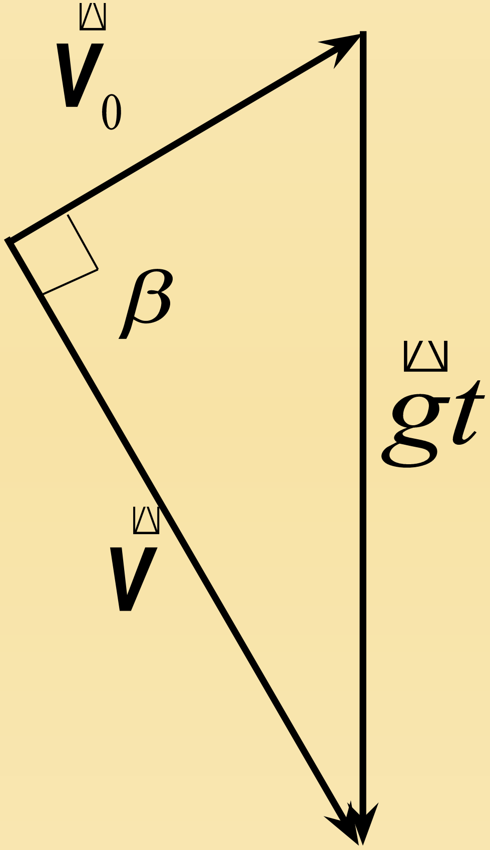
$$\boxed{\alpha = arctg\frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2gh}}}$$

Задача №1

Камень брошен с башни так, что дальность его полёта максимальна. Начальная скорость камня V_0 = 30 м/с, конечная V = 40 м/с. Найдите время полёта камня. Сопротивление воздуха не учитывать.



Решение задачи №1



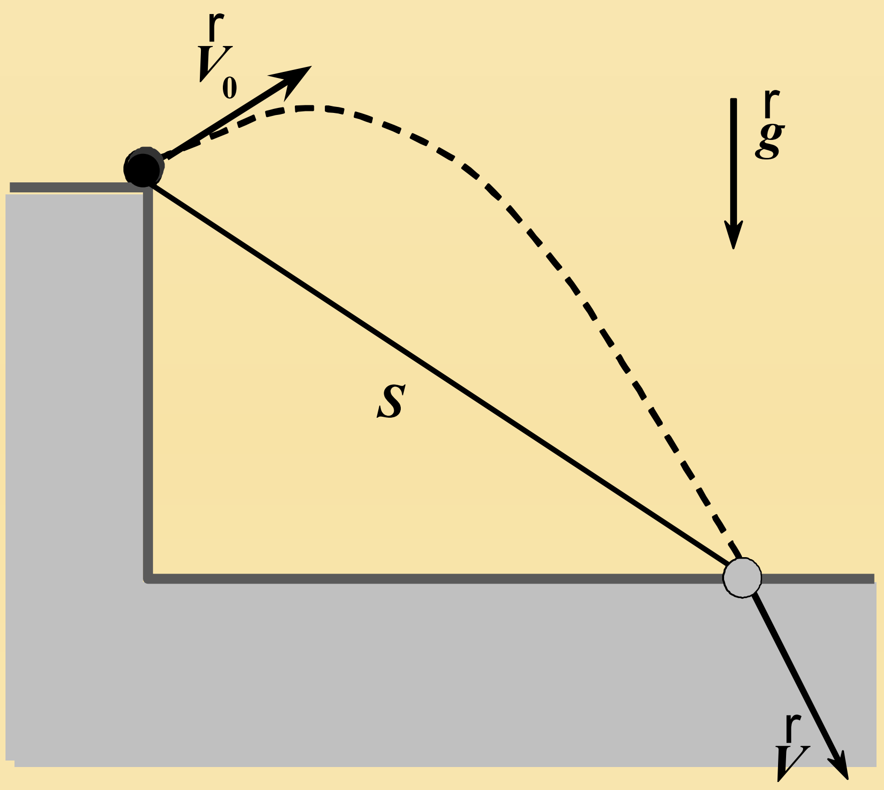
$$\beta = 90^o$$

$$gt = \sqrt{V_0^2 + V^2}$$

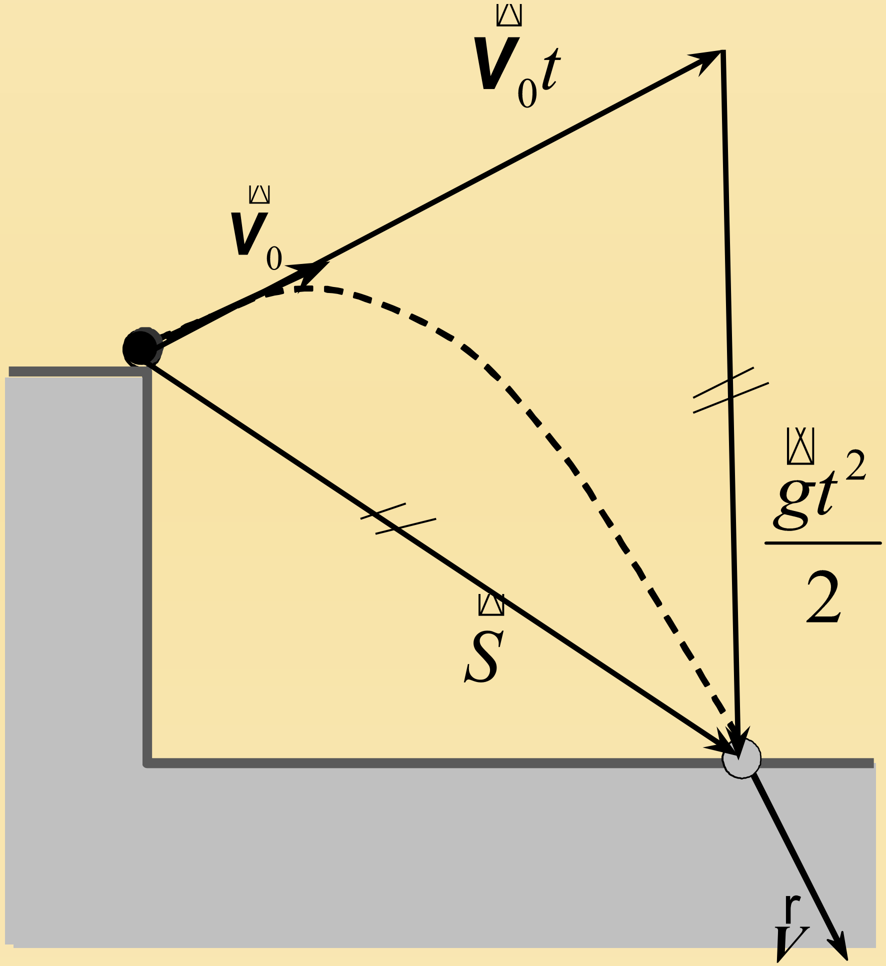
$$\boxed{t = \frac{\sqrt{V_0^2 + V^2}}{g} = 5\ c}$$

Задача №2

Камень брошен с башни так, что дальность его полёта максимальна. Найдите время полёта камня, если точка падения камня отстоит от точки бросания на расстоянии S = 80 м. Сопротивление воздуха не учитывать.



Решение задачи №2

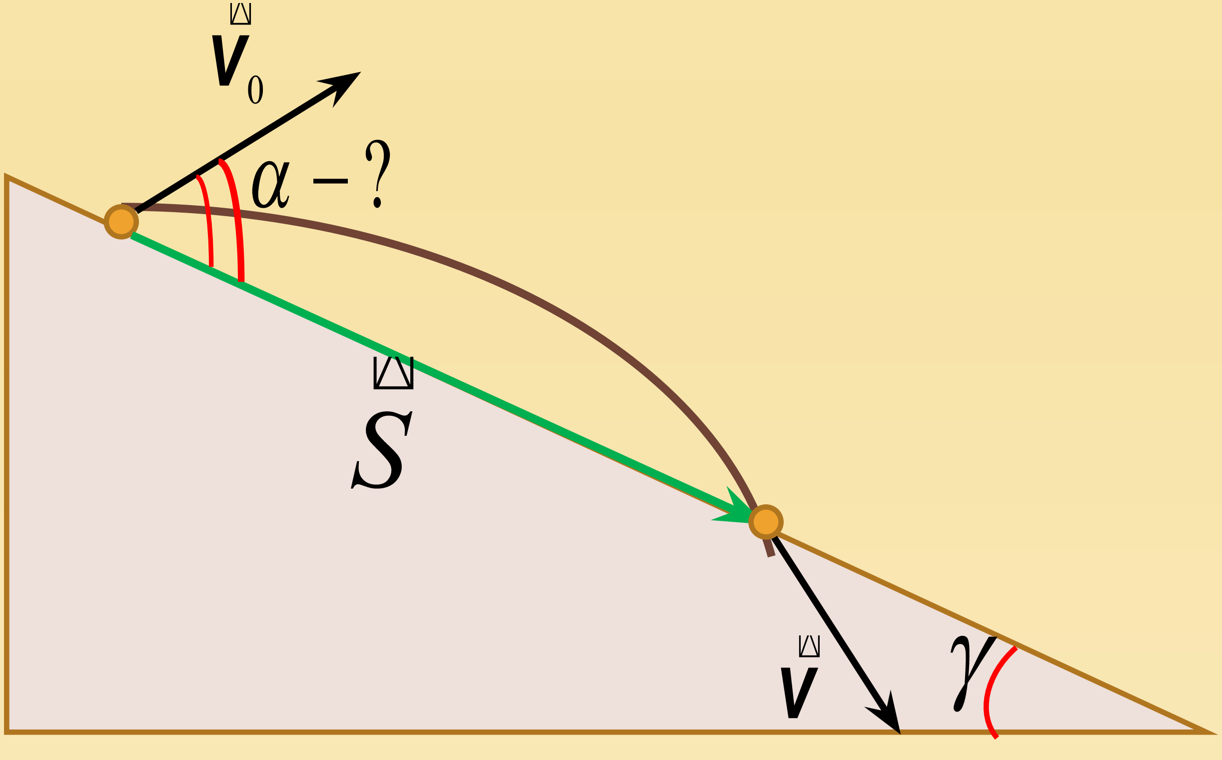


$$S = \frac{gt^2}{2}$$

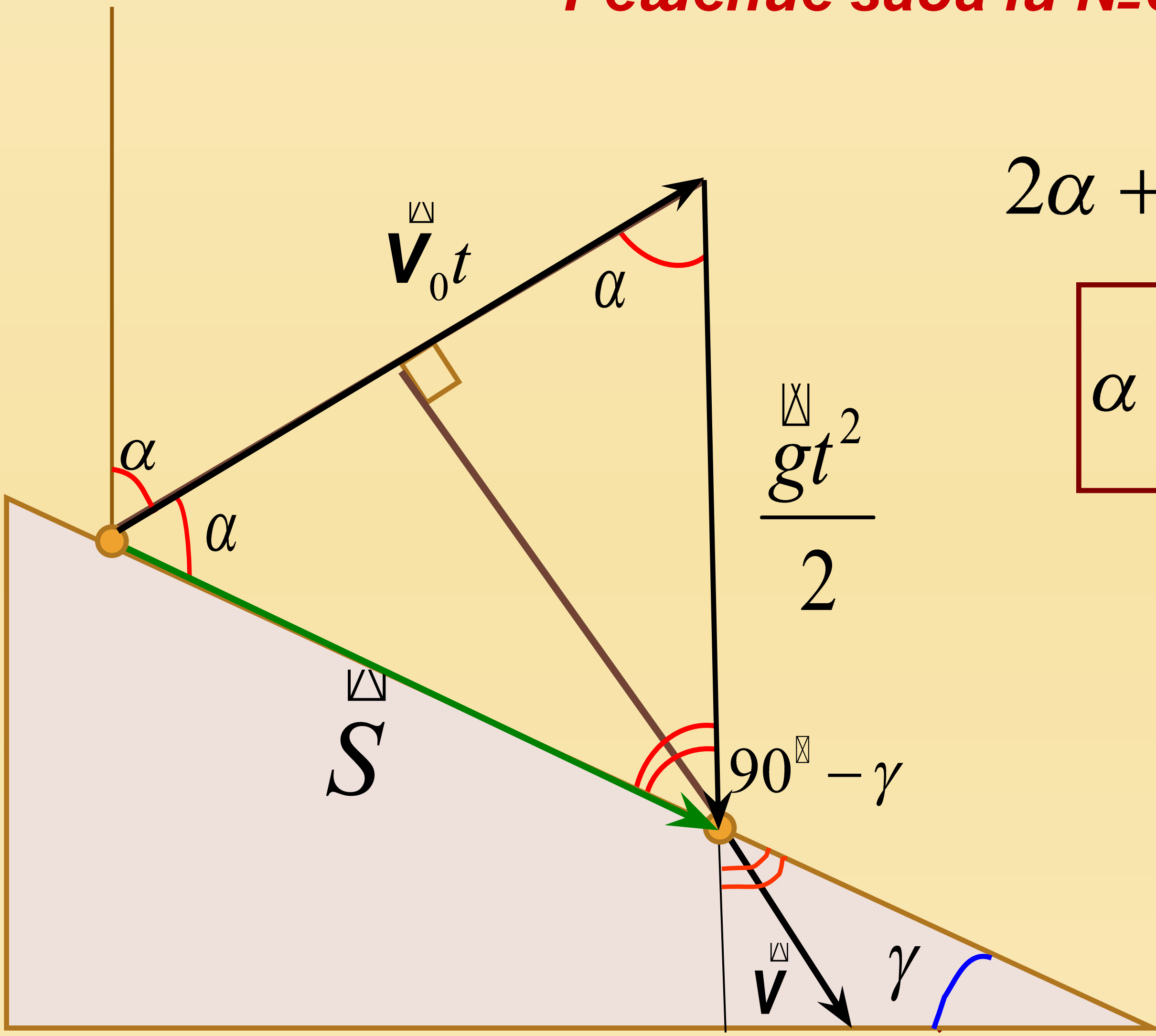
$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2S}{g}} = 4\ c}$$

Задача №3

Камень бросают с горы, имеющей постоянный угол наклона γ к горизонту. Под каким углом α к поверхности горы нужно бросить камень, чтобы дальность его полета S была максимальной?



Решение задачи №3

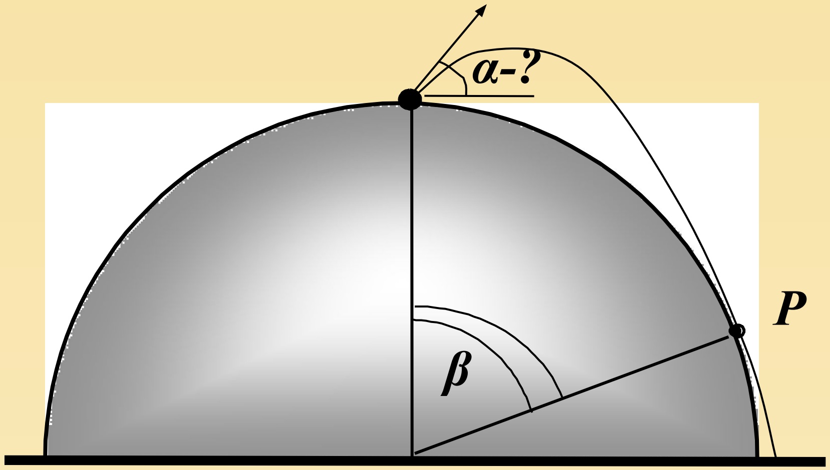


$$2\alpha + (90^\circ - \gamma) = 180^o$$

$$\boxed{\alpha = 45^\circ + \frac{\gamma}{2}}$$

Задача №4

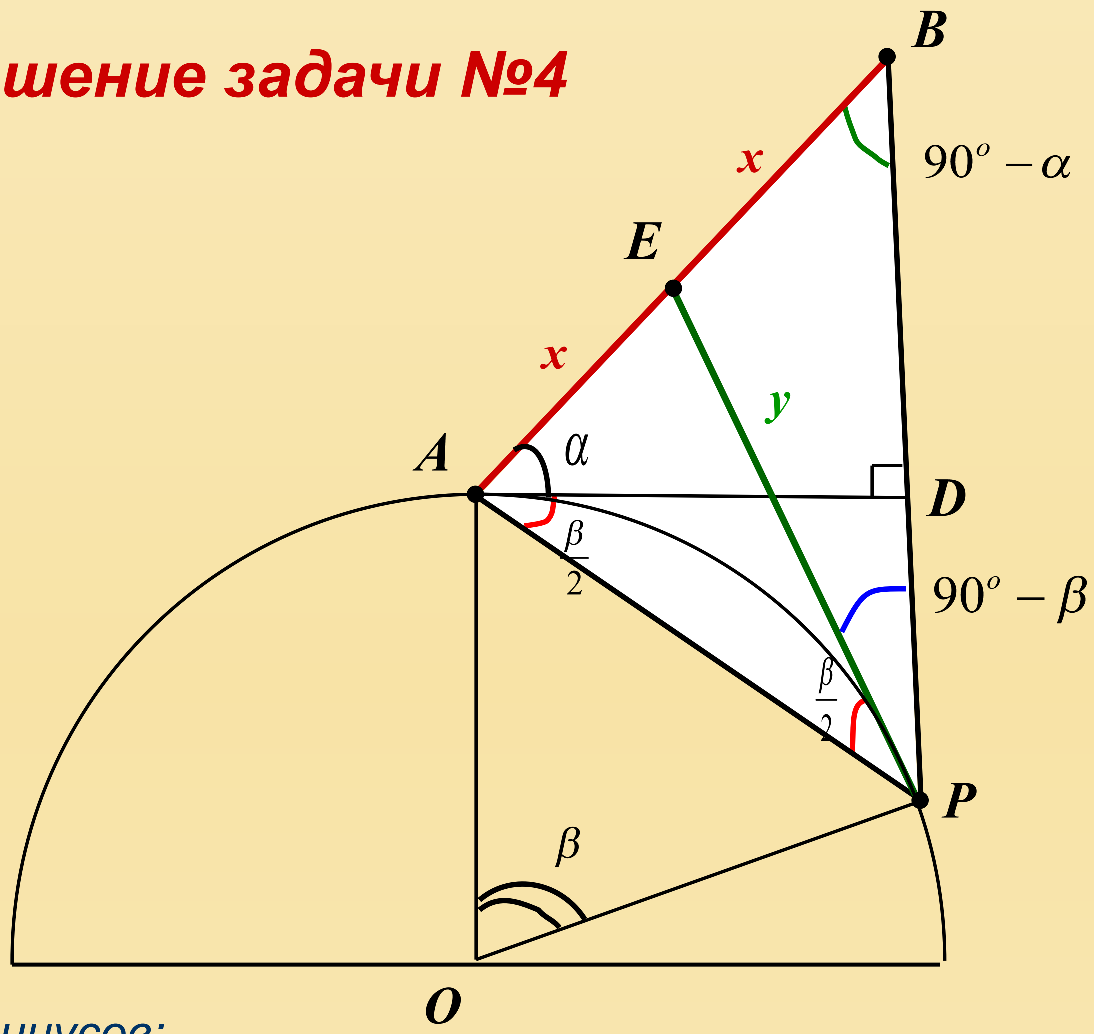
С вершины купола, имеющего форму полусферы и стоящего на горизонтальной поверхности земли, бросили камень. Под каким углом α к горизонту был брошен камень, если известно, что в полёте он коснулся купола в некоторой точке P? Радиус купола, проведённый к этой точке, образует угол β с вертикалью. Сопротивление воздуха не учитывать.



Решение задачи №4

$$AE = EB = x$$

$$EP = y$$



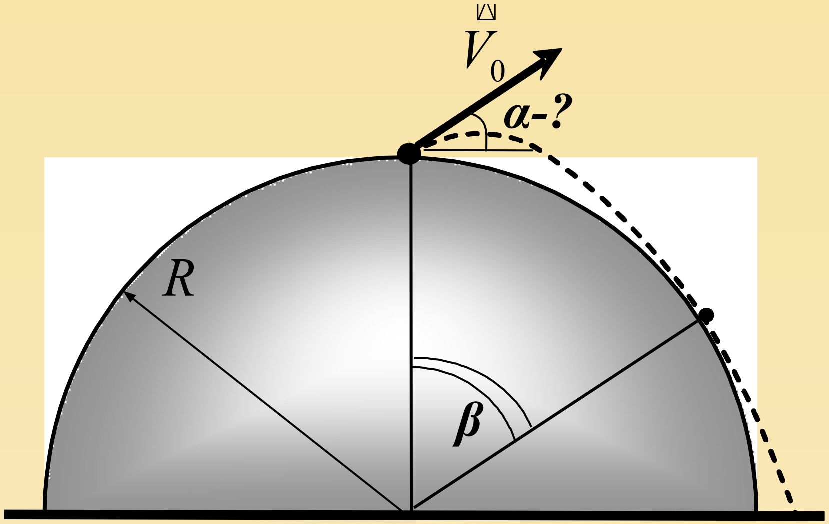
по теореме синусов:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\alpha + \frac{\beta}{2})} = \frac{\sin(90^o - \beta)}{\sin(90^o - \alpha)}.$$

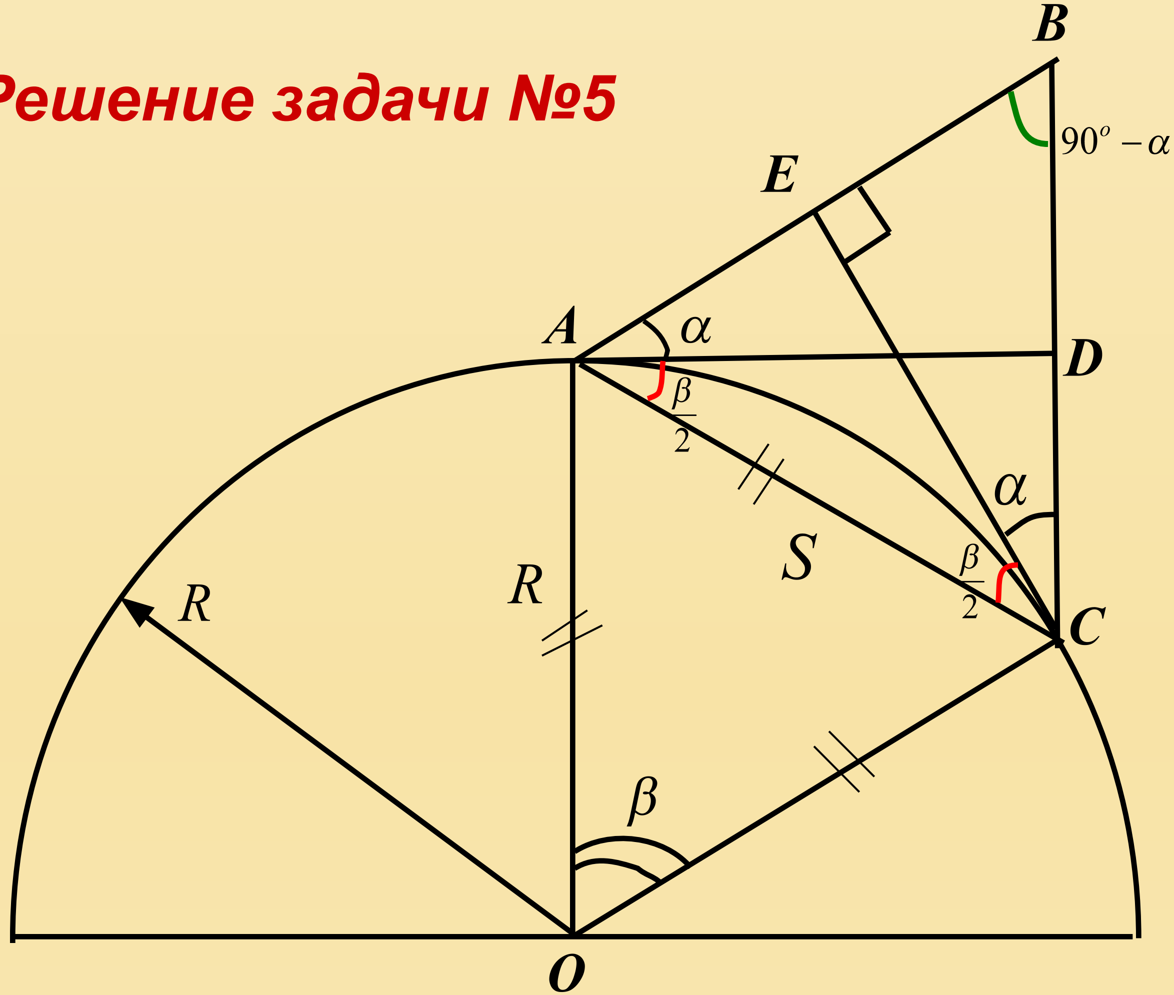
$$\boxed{tg\alpha = tg\beta \cdot tg^2\frac{\beta}{2}}$$

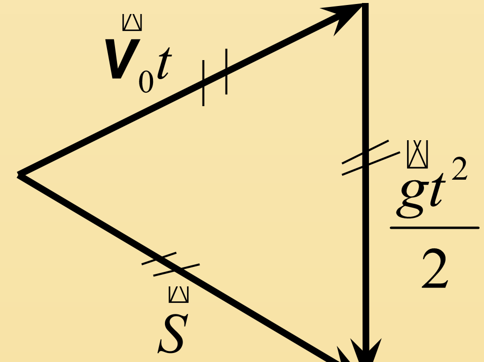
Задача №5

С вершины купола, имеющего форму полусферы радиуса R и стоящего на горизонтальной поверхности земли, бросают камень. С какой минимальной скоростью V_0 можно бросить, чтобы в процессе своего полёта он не ударился о поверхность купола? Под каким углом α к горизонту его следует бросать при этом? Сопротивление воздуха не учитывать. Касание поверхности купола допускается.



Решение задачи №5





$$S = V_0 t = \frac{gt^2}{2}$$

$90^o - \alpha = 60^o$ $\boxed{\alpha = 30^o}$ $\frac{\beta}{2} = 30^o$ $\beta = 60^o$ $S = R$

$\frac{gt^2}{2} = R$ $t = \sqrt{\frac{2R}{g}}$ $V_0 t = R$ $\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{Rg}{2}}}$