

Семинар 29

Двойные интегралы. Свойства
двойных интегралов. Способы
вычисления двойных
интегралов.

Пусть $f(x,y)$ – функция, ограниченная в некоторой замкнутой ограниченной области D .

δ_i - частичная область области D . $\Delta\delta_i$ - площадь частичной области δ_i
 $P_i(x_i, y_i) \in \delta_i$, $f(x_i, y_i)$ значение функции в точке $P_i(x_i, y_i)$

Составим сумму $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\delta_i$ (*)

Сумма (*) называется интегральной суммой для функции $f(x,y)$ в области D , соответствующей данному разбиению области D на n – частичных областей.

Определение

Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется предел, к которому стремится интегральная сумма при стремлении к 0 наибольшего диаметра частичных областей

Запись $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\delta_i = \iint_D f(x, y) d\delta$

«Двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D »

$f(x,y)d\delta$ - выражение; $f(x,y)$ – подынтегральная функция;

$d\delta$ - элемент площади; D – область интегрирования.

Свойства двойных интегралов

1. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\iint_D [f_1(x,y) + \dots + f_n(x,y)] d\delta = \iint_D f_1(x,y) d\delta + \dots + \iint_D f_n(x,y) d\delta$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за символ двойного интеграла:

$$\iint_D cf(x,y) d\delta = c \iint_D f(x,y) d\delta$$

3. Если область D разбита на две области D_1, D_2 без общих внутренних точек, то:

$$\iint_D f(x,y) d\delta = \iint_{D_1} f(x,y) d\delta + \iint_{D_2} f(x,y) d\delta$$

4. Если во всех точках области D функция $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$, то:

$$\iint_D f(x,y) d\delta \geq \iint_D \varphi(x,y) d\delta$$

5. Значение двойного интеграла заключено между произведениями наименьшего (m) и наибольшего (M) значений подынтегральной функции в области D на площадь области интегрирования: $mS \leq \iint_D f(x, y) d\delta \leq MS$, где S - площадь области D .

6. Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования, то есть: $\iint_D f(x, y) d\delta = f(\alpha, \beta)S$, — $f(\alpha, \beta)$ - среднее значение функции $f(x, y)$ в области D

При вычислении $\iint_D f(x, y) d\delta$ элемент $d\delta$ удобнее представлять в следующем виде.

Область D в плоскости OXY разбивается на частичные области посредством двух систем координатных линий: $x=const$, $y=const$. Эти прямые соответственно параллельны OX и OY . Частичные области прямоугольники. Площадь каждой частичной области не примыкающей к границе D , будет равна произведению $\Delta x \cdot \Delta y$.

Поэтому запишем

$$\iint_D f(x, y) d\delta = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (*)$$

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (**)$$
$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (***)$$

Если область D – прямоугольник со сторонами параллельными осям координат, то есть имеет вид, представленный на рисунке, то пределы интегрирования – постоянные величины

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Замена переменных в двойном интеграле

Полярные координаты

При вычислении определенных интегралов важную роль играет правило замены переменной, согласно которому при соблюдении соответствующих

условий имеет место

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f[\varphi(u)] \varphi'(u) du$$

Обычно функция $x = \varphi(u)$ монотонна; тогда она осуществляет взаимнооднозначное соответствие между точками интервала $[u_1, u_2]$ изменения переменной u и точками интервала $[x_1, x_2]$ изменения переменной x . Заменяя $x = \varphi(u)$ Правило замены переменной в двойном интеграле достаточно сложное. Приведем формулу замены.

При переходе в двойном интеграле от переменных x, y к новым переменным u, v : $x=x(u, v), y=y(u, v)$ (*) формула замены такова

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv (**), \text{ где}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

Есть функциональный определитель Якоби (Якобиан) составленный из частных производных функций (*), то есть

$$d\delta = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Старая область интегрирования D заменяется на новую область D^* по переменным u, v . Новое выражение для $d\delta$ называется элементом площади в координатах u, v .

Применим формулу (**) к преобразованию с помощью полярных координат (обозначения общепринятые)

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi (-\pi \leq \varphi \leq \pi)$$

$$\text{Якобиан будет равен } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi - (-r \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \varphi = r$$

$$\text{Тогда } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi (***) , \text{ где } D \text{ и } D^*$$

соответствующие друг другу области в плоскостях OXY и $O_1r\varphi$ (здесь r и φ рассматриваются как декартовы координаты точки).

Примеры с решениями

1. Вычислить $\iint_D x \ln y \, dx \, dy$ если D – прямоугольник $0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq e$

Решение. Имеем $\iint_D x \ln y \, dx \, dy = \int_0^4 x \, dx \int_1^e \ln y \, dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \cdot [y \ln y - y]_1^e = 8(e - e + 1) = 8$

2. Вычислить $I = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y) \, dy$

Решение. Имеем $I = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y) \, dy = \int_1^2 \left[2xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_x^{x^2} dx = \int_1^2 \left(2x^3 - \frac{1}{2} x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) dx =$

$$\left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{2} x^3 \right]_1^2 = 0,9$$

3. Перейдя к полярным координатам вычислить $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ если D – I четверть круга $x^2 + y^2 \leq a^2$

Решение. Полагая $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ имеем

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \iint_D \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \Big|_0^a \, d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}$$

4. Вычислить $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$, где D – кольцо между окружностями

$$x^2 + y^2 = e^2, x^2 + y^2 = e^4$$

Решение. Перейдем к полярным координатам

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy = \iint_D \ln \rho^2 \rho d\rho d\theta = 2 \iint_D \rho \ln \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_e^{e^2} \rho \ln \rho d\rho$$

Взяв по частям интеграл, зависящий от ρ получим $2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \rho^2 \ln \rho - \frac{1}{4} \rho^2 \right]_e^{e^2} d\theta = \pi e^2 (3e^2 - 1)$

5. Вычислить интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$ по области D , ограниченной линиями $y=x$ и $y = x^2$

Решение

а) Интегрируем сначала по y , затем по x

$$\iint_D (x + y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x + y) dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

б) Интегрируем сначала по x , затем по y

$$\iint_D (x + y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x + y) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{3y^2}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить $\iint_D y \ln x dx dy$ если область D ограничена линиями $xy = 1, y = \sqrt{x}, x = 2$

2. Вычислить $\iint_D x dx dy$ если область D – треугольник с вершинами A(2;3), B(7;2), C(4;5).

3. Изменить порядок интегрирования $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy, \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$

4. Вычислить $\iint_D (x + y)^3 (x - y)^2 dx dy$, если D – квадрат, ограниченный прямыми $x+y=1, x-y=1, x+y=3, x-y=-1$

5. Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

a) $\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy$, если область D – круг $x^2 + y^2 \leq \pi^2$

b) $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy$, - область D ограничена полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ и осью OX.

c) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, - область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$

d) $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ если область D ограничена линиями: $x^2 + y^2 = \pi^2/9$
 $x^2 + y^2 = \pi^2$