

Глава 2. Применение теории двойственности в экономике.

2.1. Определение двойственной задачи

Каждой ЗЛП может быть поставлена в соответствие по определенным правилам другая ЗЛП, которая называется *двойственной* задачей. В этом случае исходная ЗЛП называется *прямой* задачей.

$$\left\{ \begin{array}{l} C(x) = (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ \underline{x} \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n);$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \boxtimes \\ b_m \end{pmatrix}; \quad \text{матрица } A = \begin{pmatrix} a_{11}, \boxtimes, a_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1}, \boxtimes, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Целевая функция $(c, x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

Введем вектор двойственных переменных
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

Построим ЗЛП (2)

$$\begin{cases} B(y) = (b, y) \rightarrow \min \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Задача (2) есть двойственная задача к ЗЛП (1).

$$B(y) = (b, y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Матрица A^T – транспонированная матрица A .

D_1 область допустимых планов задачи (1), т.е. допустимый план $x \in D_1$, а D_2 – область допустимых планов задачи (2), т.е. допустимый план $y \in D_2$.

Замечание. Так как $A^T \cdot y = y \cdot A$, то не прямые (структурные) ограничения в двойственной задаче могут быть записаны в виде $yA \geq c$.

Правила построения двойственной задачи для исходной задачи вида (1):

- Количество переменных в двойственной задаче (2) равно количеству не прямых (структурных) ограничений прямой задачи (1).
- Целевая функция исходной задачи задается на максимум, а целевая функция двойственной задачи – на минимум.

- Матрица коэффициентов системы ограничений A в двойственной задаче транспонируется.
- Вектор коэффициентов целевой функции задачи (1) становится вектором системы ограничений в двойственной задаче (2), а вектор правых частей ограничений задачи (1) становится вектором коэффициентов целевой функции двойственной задачи (2).
- Знаки отношений “ \leq ” в системе ограничений задачи (1) заменяются на знаки отношений “ \geq ” в ограничениях задачи (2).

Пример 1.

$$\begin{aligned} C(x) &= 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \max \\ (y_1 \rightarrow) & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 9 \end{cases} \\ (y_2 \rightarrow) & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 9 \end{cases} \\ & \underline{x_j} \geq 0; \quad j = \overline{1,3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(y) &= 8y_1 + 9y_2 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 7 \\ 3y_1 - y_2 \geq 6 \\ -y_1 + y_2 \geq 4 \end{cases} \\ & \underline{y_i} \geq 0; \quad i = \overline{1,2} \end{aligned}$$

Количество ограничений прямой и двойственной

задач

Ограничения	Прямая задача	Двойственная задача
Прямые	N	M
Непрямые (структурные)	M	N
Всего	$n + m$	$m + n$

Утверждение. Задача двойственная к двойственной есть прямая задача.

Умножим цел. функцию и систему ограничений (2) на (- 1).

$$\left\{ \begin{array}{l} (-b, y) \rightarrow \max \\ -A^T y \leq -c \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad (2')$$

$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ - вектор, компонентами которого являются неизвестные в двойственной задаче к задаче (2').

Двойственная задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-c, z) \rightarrow \min \\ (-A^T)^T z \geq -b \\ z \geq 0. \end{array} \right. \quad (2'')$$

Умножим целевую функцию и ограничения на (-1) и учтем, что $(A^T)^T = A$, тогда:

$$\left. \begin{array}{l} (c, z) \rightarrow \max \\ Az \leq b \\ z \geq 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Задачи (3) и (1) отличаются только обозначениями переменных, следовательно, утверждение доказано.

Рассмотрим задачу, двойственную к исходной задаче, содержащей строгое равенство.

$$C(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (4)$$

Первое ограничение задачи:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \geq b_1$$

Умножим второе неравенство на (- 1), тогда:

$$C(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1 & \leftarrow y'_1 \\ - \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq -b_1 & \leftarrow y''_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{2, m} & \leftarrow y_i \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. & \end{array} \right. \quad (5)$$

Двойственная задача (6).

$$\left\{ \begin{array}{l} B(y) = b_1 y_1' - b_1 y_1'' + \sum_{i=2}^m b_i y_i \rightarrow \min \\ a_{1j} y_1' - a_{1j} y_1'' + \sum_{i=2}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_1', y_1'', y_i \geq 0, \quad i = \overline{2, m}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Вынесем b_1 в целевой функции и a_{1j} в ограничениях за скобки.

$$\left\{ \begin{array}{l} B(y) = b_1 (y_1' - y_1'') + \sum_{i=2}^m b_i y_i \rightarrow \min \\ a_{1j} (y_1' - y_1'') + \sum_{i=2}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_1', y_1'', y_i \geq 0, \quad i = \overline{2, m}. \end{array} \right.$$

Введем новую переменную $y_1 = y'_1 - y''_1$, тогда получим ЗЛП:

$$\left\{ \begin{array}{l} B(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{2, m}. \end{array} \right. \quad (7)$$

При этом в (7) y_1 может быть как отрицательным, так и положительным числом, тогда как $y'_1, y''_1 \geq 0$. (т.к. первое ограничение содержало знак « = »).

ЗЛП в канонической форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} (c, x) \rightarrow \max \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

то двойственной задачей к (8) будет (9):

$$\left\{ \begin{array}{l} (b, y) \rightarrow \min \\ A^T y \geq c \end{array} \right. \quad (9)$$

Задача, двойственная к ЗЛП (10), будет иметь вид (11).

$$\left\{ \begin{array}{l} (c, x) \rightarrow \max \\ Ax = b \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (b, y) \rightarrow \min \\ A^T y = c \end{array} \right. \quad (11)$$

Пример.

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \rightarrow \min \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Сначала упорядочим запись прямой задачи.

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \rightarrow \min \\ -Ax \geq -b \end{cases}$$

Двойственная задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} B(y) = (-b, y) \rightarrow \max \\ -A^T y = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

В структурных ограничениях двойственной задачи стоит знак “ = ”, поскольку в исходной задаче отсутствуют прямые ограничения на переменные.

2.2. Экономическая интерпретация двойственной задачи

Рассмотрим ЗЛП:

$$\left\{ \begin{array}{l} C(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор выпуска товаров;

c_j – прибыль от реализации единицы товара j -го вида;

a_{ij} – количество i -го ресурса, идущего на изготовление

единицы товара j -го вида;

b_i – запас (наличие) i -го ресурса.

Двойственная задача к задаче (1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} B(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \end{array} \right. \quad (2)$$

Рассмотрим k -е ограничение задачи (2): $\sum_{i=1}^m a_{ik} y_i \geq c_k \quad (3)$

В правой части неравенства c_k - прибыль от реализации единицы товара k -го вида, которая носит стоимостной характер, в левой части неравенства тоже стоимостная характеристика.

a_{ik} – расход ресурса;

y_i – стоимостная величина.

Вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – вектор цен на ресурсы.

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Естественное требование к ценам со стороны продавца состоит в следующем: выручка от продажи ресурсов, расходуемых на изготовление единицы товара k -го вида, должна быть не меньше, чем прибыль, которую могло бы получить предприятие от реализации единицы товара k -го вида, если бы оно отказалось от продажи ресурсов и направило их на изготовление товаров.

Это требование математически записывается в виде неравенств (3). Всего таких неравенств n , так как

$$k = \overline{1, n}$$

Кроме того, продавая ресурсы, предприятие заинтересовано в том, чтобы цены на них были как можно выше. Однако рыночные цены могут существенно отличаться от желаемых цен.

Поэтому для установления нижних границ, ниже которых не имеет смысла продавать ресурсы, предприятию целесообразно определить минимально возможную стоимость продаваемых ресурсов.

То есть определить минимум функции $B(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i$

при выполнении ограничений (3) и $y_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$

Следовательно, для рациональной продажи ресурсов необходимо решить двойственную задачу (2).

Заметим, что переменные y_i , «внутренние цены» предприятия («теневые» цены, стоимостные оценки), которые дают возможность предприятию эффективно использовать имеющиеся ресурсы.