Методы проверки ответа решенной задачи

- По размерности
- Анализ предельных случаев
- Наличие симметрии
- Правдоподобность численного значения

Проверка по размерности

Камень брошен в поле тяжести Земли с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту. Найти максимальную высоту подъема камня. Предположим, что при решении этой задачи был получен следующий ответ:

$$H = \frac{V_0 \cdot \cos^2 \alpha}{g} \quad (1)$$

Правилен ли он? Нетрудно видеть, что размерности величин слева и справа от знака равенства в формуле не совпадают, действительно:

$$L \neq \frac{LT^{-1}}{LT^{-2}} = T$$

Ответ очевидно неверен. В формуле (1) допущена ошибка – скорость должна быть в квадрате:

$$H = \frac{V_0^{\,2} \cdot \cos^2 \alpha}{g} \quad (2)$$

Теперь размерность слева и справа совпадает, но это еще не означает, что ответ правилен!

В оглавление

Анализ предельных случаев

В последнюю формулу для высоты H подъема камня:

$$H = \frac{V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g} \tag{2}$$

входят три параметра: начальная скорость V_0, угол α, и ускорение свободного падения g. Можно ли заранее сказать ответ при каких-то определенных значениях параметров (в предельных случаях)? Предположим, что начальная скорость V уменьшается и стремится к нулю. Чему должна быть равна в этом случае высота подъема? Очевидно, должна стремиться к нулю. Следует это из нашей формулы? Да!

Предположим теперь, что угол α уменьшается и стремится к нулю. Чему должна быть равна в этом случае высота подъема? Очевидно, тоже должна стремиться к нулю. А вот это не следует из нашей формулы! Значит зависимость высоты от угла бросания описывается нашей формулой неправильно! Формула (2) предсказывает также еще один абсурд – при броске вертикально вверх ($\alpha = \pi/2$) высота подъема равна нулю! В нашей формуле есть еще одна ошибка – вместо косинуса там должен быть синус:

$$H = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g} \tag{3}$$

В оглавление

Анализ предельных случаев (продолжение)

$$H = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g} \qquad (3)$$

Однако последняя формула (3) все еще содержит ошибку, несмотря на то, что по размерности все сходится и предельные случаи качественно дают правильный результат. В формуле пропущен численный коэффициент. Обычно обнаружить такую ошибку не просто. Но в нашем случае мы ее поймаем! Для этого рассмотрим такой предельный случай: камень бросают вертикально вверх (α = π/2). В этом частном случае решение задачи легко найти энергетическим способом – с помощью закона сохранения энергии – начальная кинетическая энергия камня полностью переходит в потенциальную:

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgH \qquad (4)$$

откуда:

$$H = \frac{V_0^2}{2g}$$

Теперь видно, что в формуле (3) пропущена двойка в знаменателе, ведь эта формула в предельном случае α = π/2 должна совпадать с последним решением (4)!

Правильный ответ выглядит так:

$$H = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

В оглавление

Наличие симметрии

Рассмотрим следующую задачу. Автомобиль движется из пункта А в пункт В так, что первую половину пути его скорость равна V_1, а вторую половину – V_2. Требуется найти среднюю скорость движения автомобиля на всем пути от А до В. Предположим, что в задаче получен следующий ответ :

$$< V >= \frac{V_1 \cdot V_2}{\frac{1}{3}V_1 + \frac{2}{3}V_2}$$

Проверим этот ответ по размерности – очевидно все в порядке – скорость равна скорости.

Рассмотрим предельные случай $V_1 = V_2 = V$. Средняя скорость при этом должна быть также V. И это следует из нашей формулы. Пусть $V_1 => 0$, тогда и средняя скорость V должна стремиться к нулю. И это получается из нашего ответа. Однако, все же он не верен! В условии задачи есть симметрия. Что если заменить V_1 на V_2? Какая разница в том что автомобиль первую половину пути ехал быстро, а вторую половину медленно или наоборот? Никакой! Значит ответ не должен изменяться при замене V_1 на V_2. Но у нас он меняется, значит формула не верна! Правильный ответ выглядит так:

$$< V >= \frac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$$

[В оглавление](#)

Правдоподобность численного значения

Однажды студенты решали такую задачу на контрольной работе: нужно было рассчитать радиус орбиты искусственного спутника Земли, который двигается по окружности с периодом обращения 10 часов. Двое студентов получили одинаковый ответ – 2400 км, который их нисколько не удивил. Но ведь радиус Земли равен 6370 км! Так что же, спутник летал под землей?!

Посмотрите же на численное значение полученной величины – оно реально или нет?

В оглавление