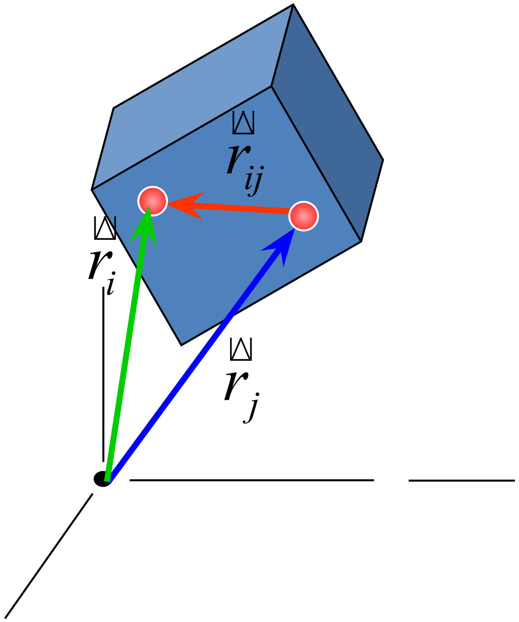
Dynamika bryły sztywnej

Bryła sztywna

Układ cząstek w którym odległości między cząstkami nie zmieniają się w czasie.



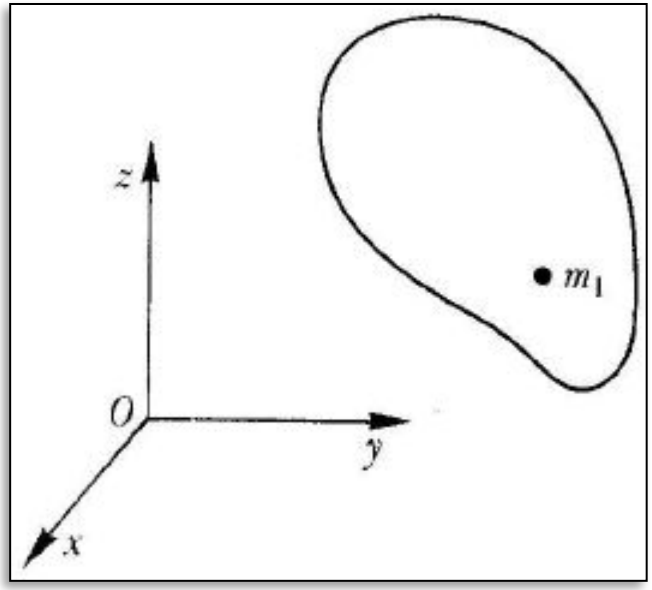
Jeżeli położenie cząstek opisujemy za pomocą wektorów $\vec{r}_i$ i $\vec{r}_j$, to wektor

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

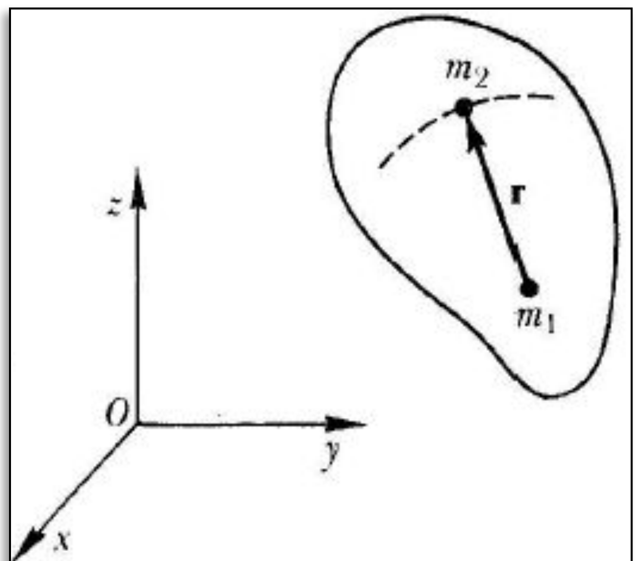
łączący obie cząstki musi być wektorem stałym

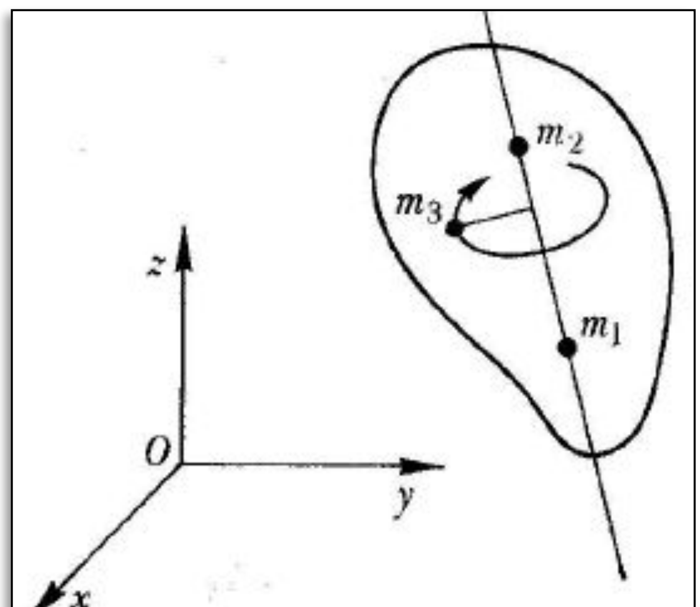
$$\boxed{r_{ij} = \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = \text{const}}$$

Położenie bryły sztywnej w przestrzeni

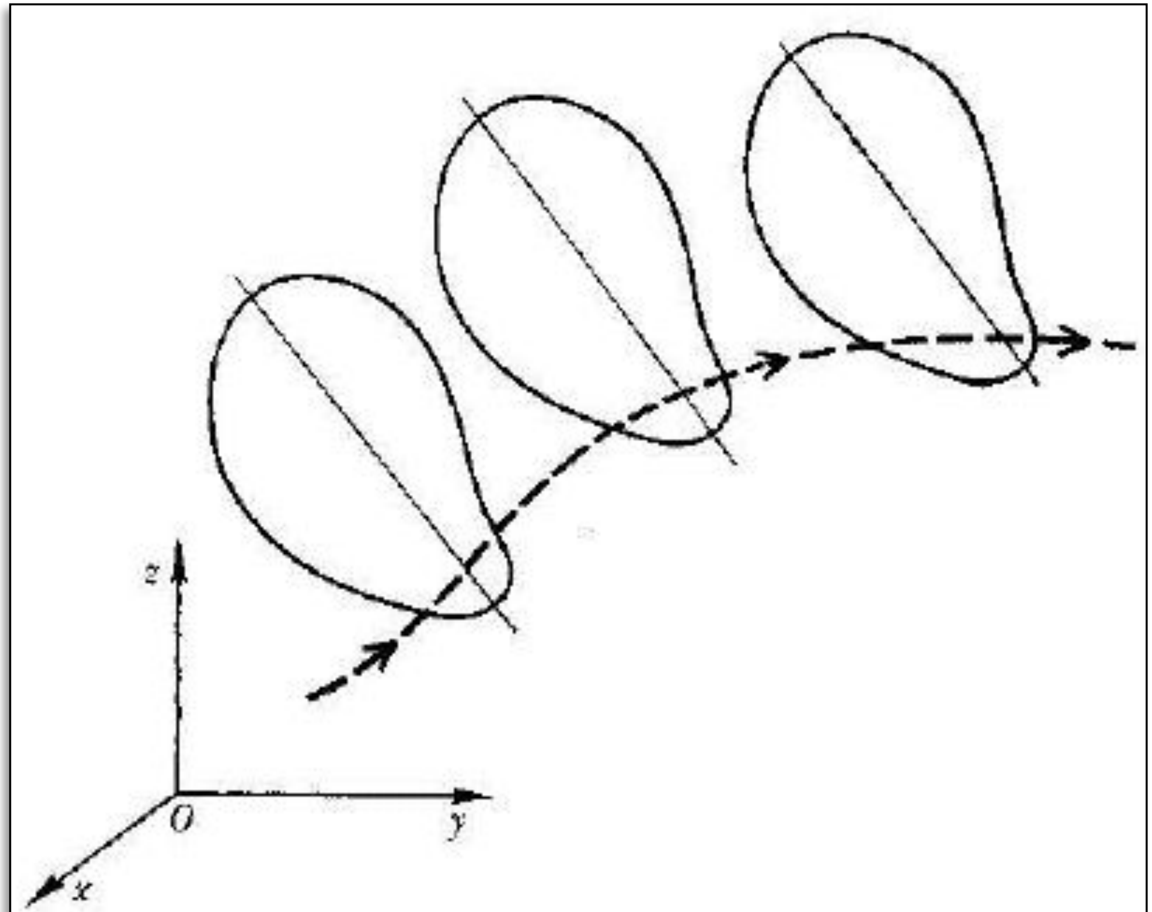


- Położenie 1-go punktu (np. środka masy) i dwóch dodatkowych punktów.
- Bryła sztywna ma sześć stopni swobody jej położenie w przestrzeni opisują 3 współrzędne i 3 kąty.





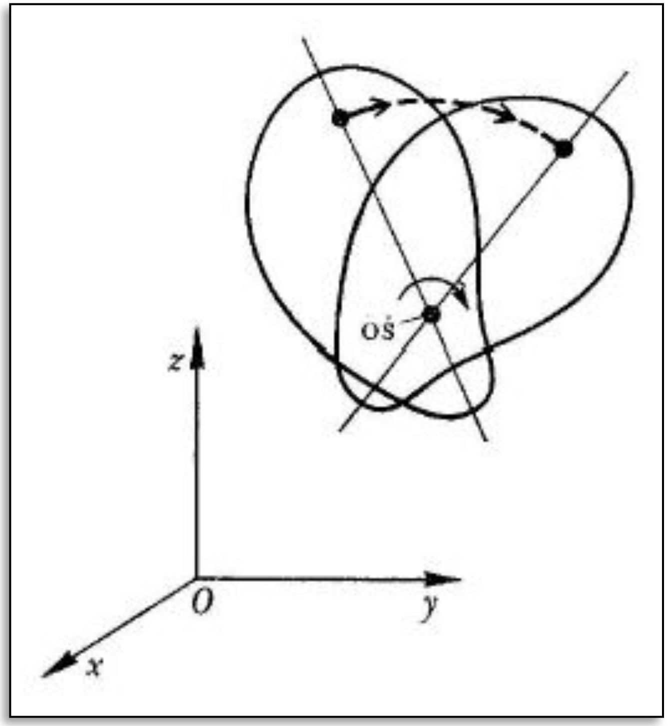
Ruch bryły sztywnej

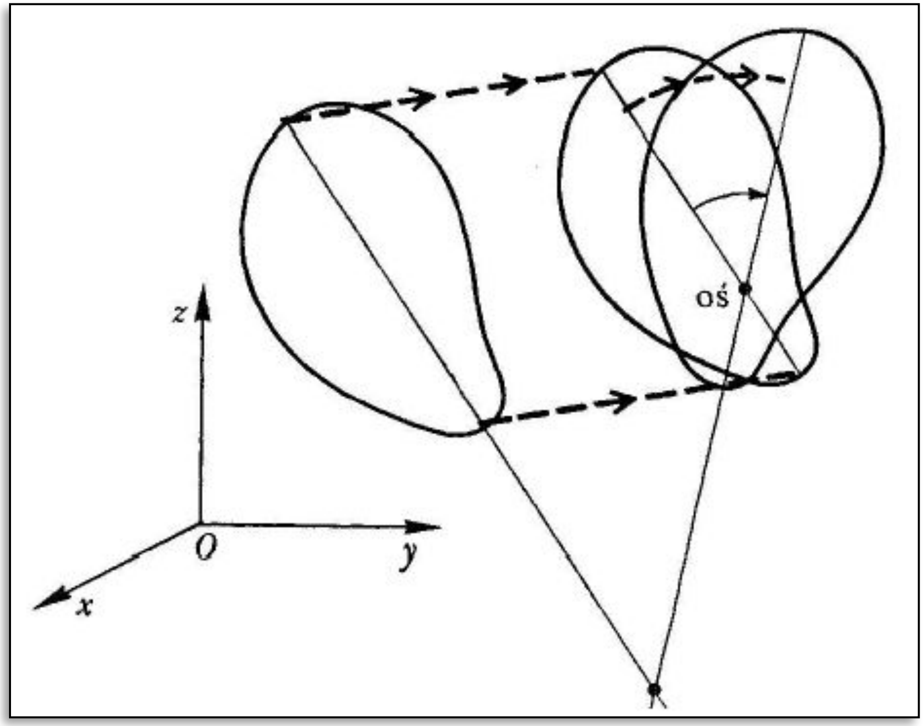


Bryła sztywna może poruszać się ruchem postępowym.

Wtedy wektory prędkości są takie same dla wszystkich punktów – bryła porusza się jak „punkt materialny".

Ruch bryły sztywnej





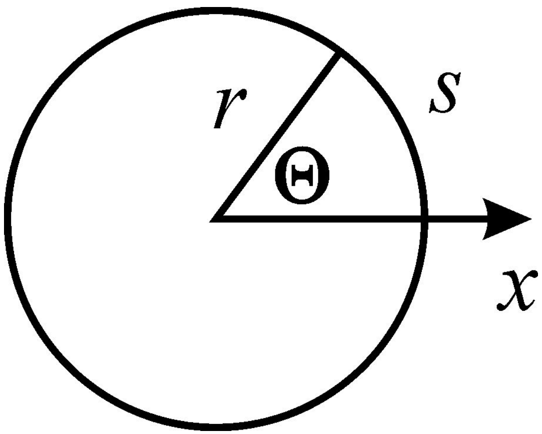
Może też poruszać się ruchem obrotowym. Wtedy wszystkie punkty ciała poruszają się po okręgach.

Najczęściej jednak występuje superpozycja ruchu postępowego i obrotowego.

$$v_i = v_0 + \omega \times r_i$$

v_0 – prędkość punktu przez który przechodzi oś obrotu

Położenie, prędkość, przyspieszenie jako wielkości kątowe



Długość	Kąt		Położenie kątowe:
$2\pi r$	2π	co daje:	$\Theta = \dfrac{s}{r}$
s	Θ		

prędkość kątowa:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\Theta(t)}{dt}$$

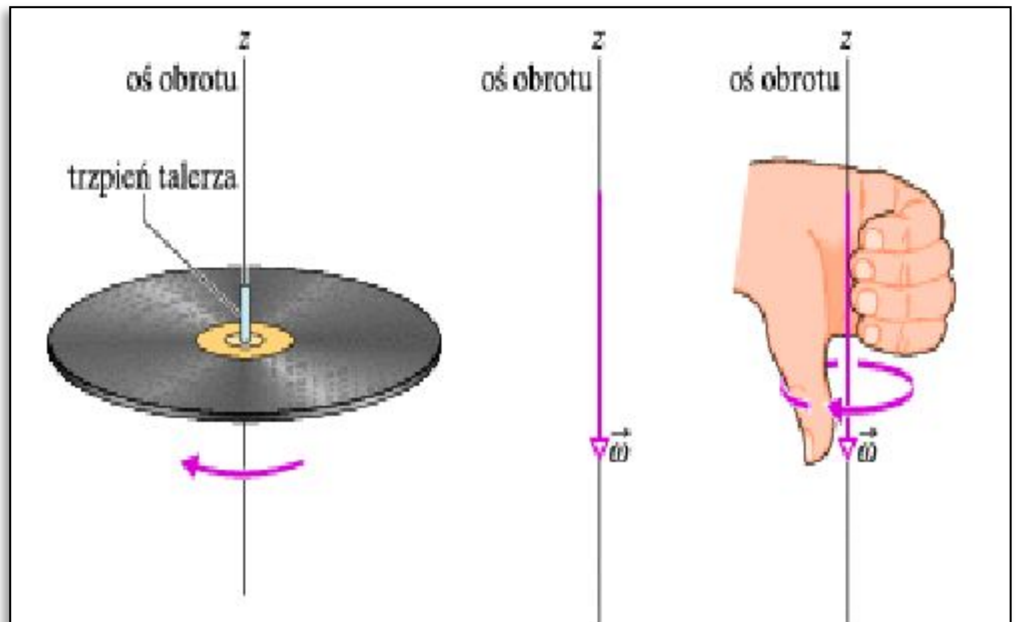
przyspieszenie kątowe:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

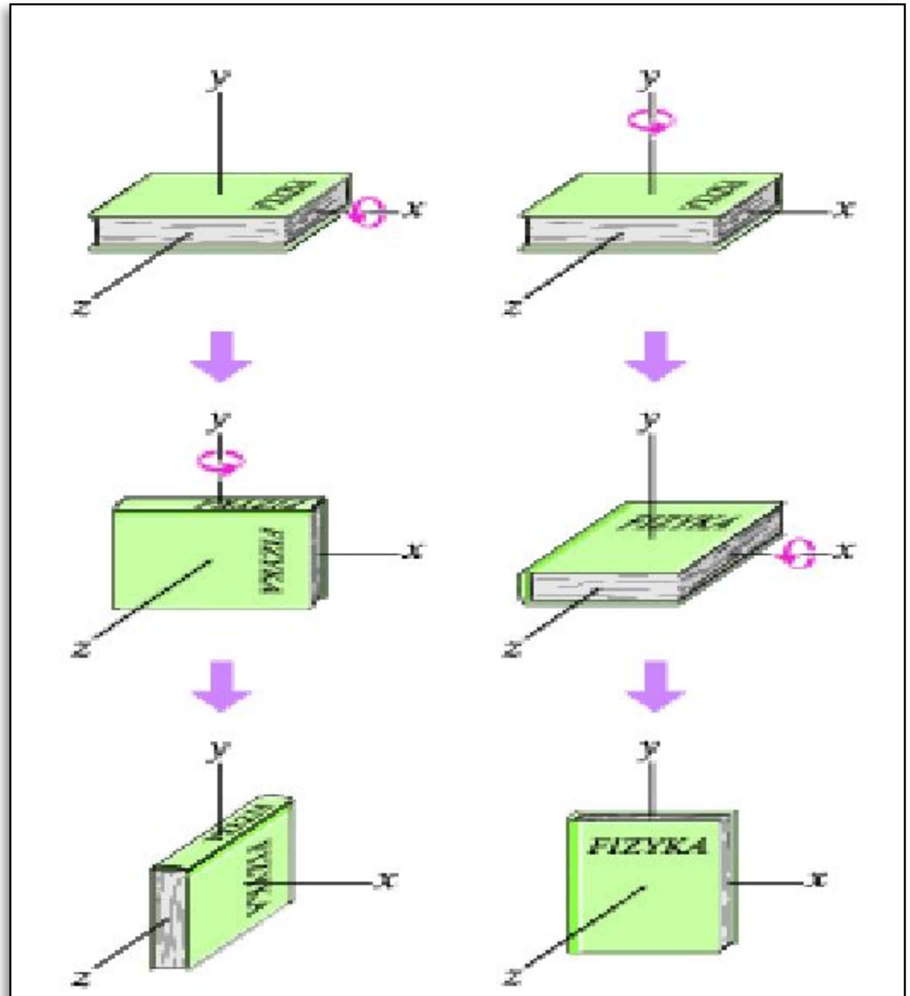
Przesunięcie kątowe, prędkość i przyspieszenie kątowe mogą być:
- **dodatnie**, kiedy obrót zachodzi **przeciwnie do** kierunku wskazówek zegara
- **ujemne**, kiedy obrót zachodzi **zgodnie** z kierunkiem wskazówek zegara

Wielkości kątowe jako wektory

Czy przemieszczenie kątowe, prędkość i przyspieszenie kątowe mogą być opisane za pomocą wektorów?



Wielkości kątowe jako wektory



Przemieszczeniom kątowym można przypisać wektory tylko wtedy, gdy są one bardzo małe!

Dla dużych przemieszczeń kątowych nie jest spełnione podstawowe prawo działań na wektorach!

$$\Theta_x + \Theta_y \neq \Theta_y + \Theta_x$$

Całkowita energia kinetyczna bryły sztywnej

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_i)^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_i)^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot 2\vec{\mathbf{v}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}_i) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right) v_0^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2 \sin^2(\vec{\omega}, \vec{r}_i)\right)\omega^2 + \vec{\mathbf{v}}_0 \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i\right)$$

energia kinetyczna ruchu **postępowego** bryły

energia kinetyczna ruchu **obrotowego** bryły

energia **mieszana** (znika dla środka masy w punkcie 0)

Całkowita energia kinetyczna bryły sztywnej

$$E_{k,tot} = E_{k,post} + E_{k,obr}$$

Zakładając, że bryła sztywna porusza się tylko ruchem obrotowym mamy:

$$E_{k,obr} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2 \sin^2(\vec{\omega}, \vec{r}_i)\right)\omega^2$$

Kąt między ω i r_i wynosi 90° więc:

$$E_{k,obr} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

gdzie:

Moment bezwładności

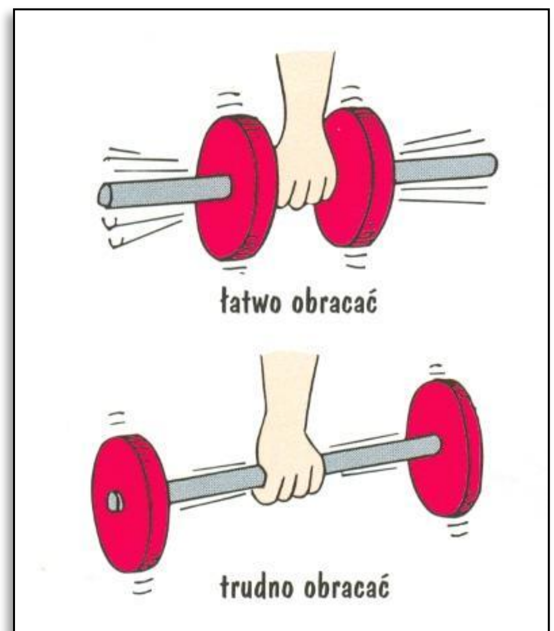
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

lub:

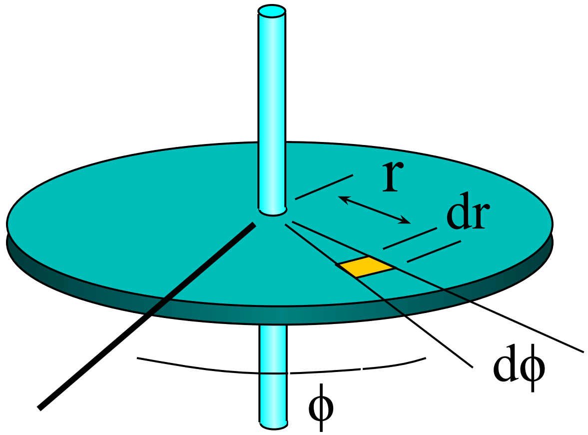
$$I = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

Kiedy oś obrotu przechodzi przez środek masy bryły, jej energia kinetyczna jest równa.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$



Przykład: Moment bezwładności jednorodnego koła



Długość łuku:

$$s = r\varphi \qquad ds = rd\varphi$$

Objętość elementarna:

$$dV = rd\varphi dr \cdot h$$

Gęstość materiału:

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 \cdot h}$$

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV =$$

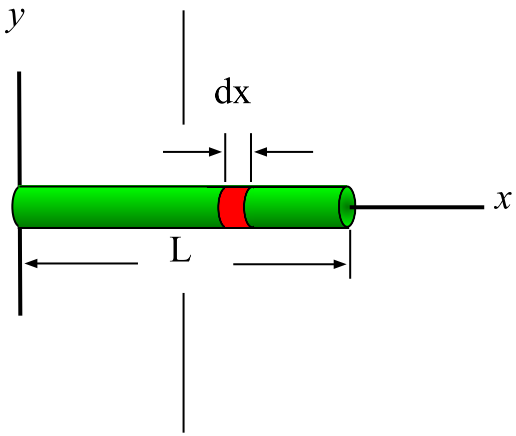
$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \frac{M}{\pi R^2 \cdot h} rd\varphi dr \cdot h =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr =$$

$$= 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} MR^2}$$

Przykład: Moment bezwładności jednorodnego pręta



Obrót wokół końca:

$$I_y = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^L = \frac{1}{3} ML^2$$

Obrót wokół środka masy:

$$I_{sm} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2$$

Twierdzenie Steinera

$$I = \int_m r^2 dm = \int_m r^2 dm = \int_m \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] dm =$$

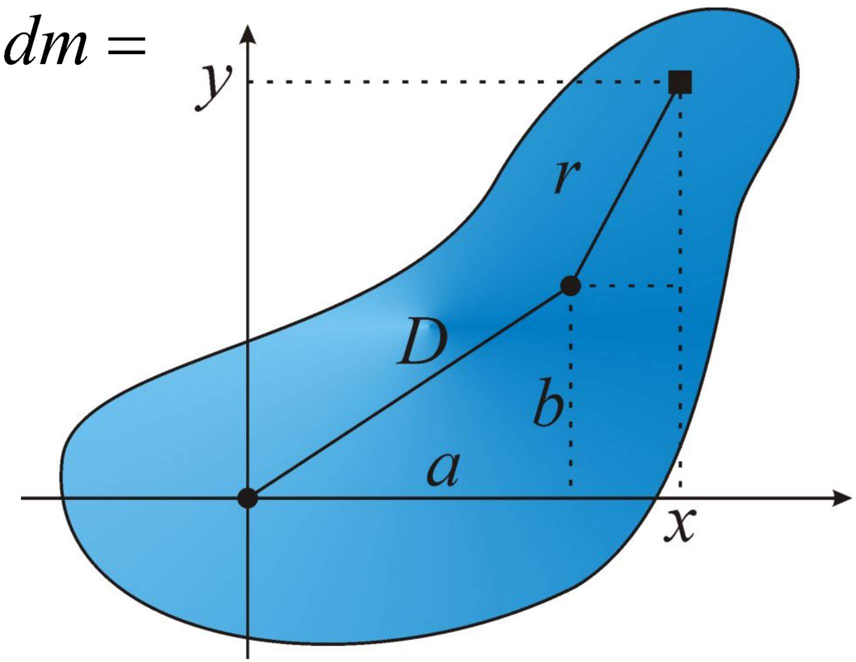
$$= \int_m \left[x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2\right] dm =$$

$$= \int_m (x^2 + y^2) dm - \int_m (2ax + 2by) dm + \int_m (a^2 + b^2) dm =$$

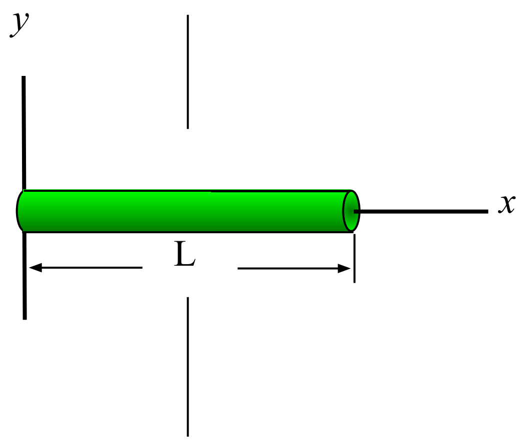
$$= \int_m R^2 dm - \int_m (2ax + 2by) dm + \int_m D^2 dm =$$

$$= I' + MD^2$$

$$\boxed{I = I' + MD^2}$$



Moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego koniec



Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy:

$$I' = \frac{1}{12} ML^2$$

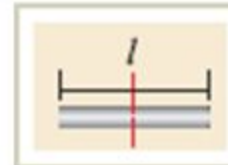
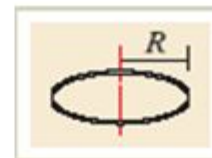
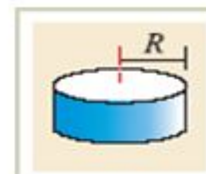
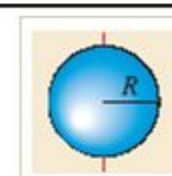
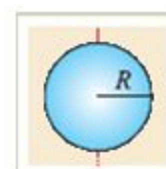
Odległość między osiami:

$$D = \frac{L}{2}$$

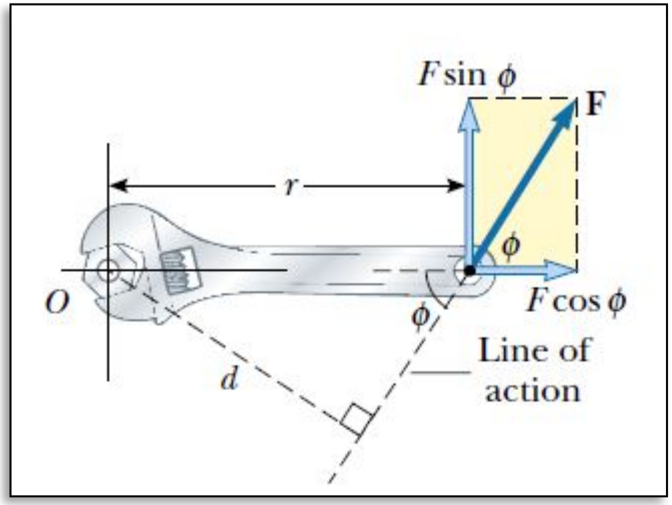
Zgodnie z twierdzeniem Steinera:

$$I = I' + MD^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Przykładowe momenty bezwładności

Bryła	Moment bezwładności	Kształt
Pręt	$I_0 = \frac{1}{12} ml^2$	
Pierścień cienkościenny	$I_0 = mR^2$	
Walec	$I_0 = \frac{1}{2} mR^2$	
Kula	$I_0 = \frac{2}{5} mR^2$	
Sfera cienkościenna	$I_0 = \frac{2}{3} mR^2$	

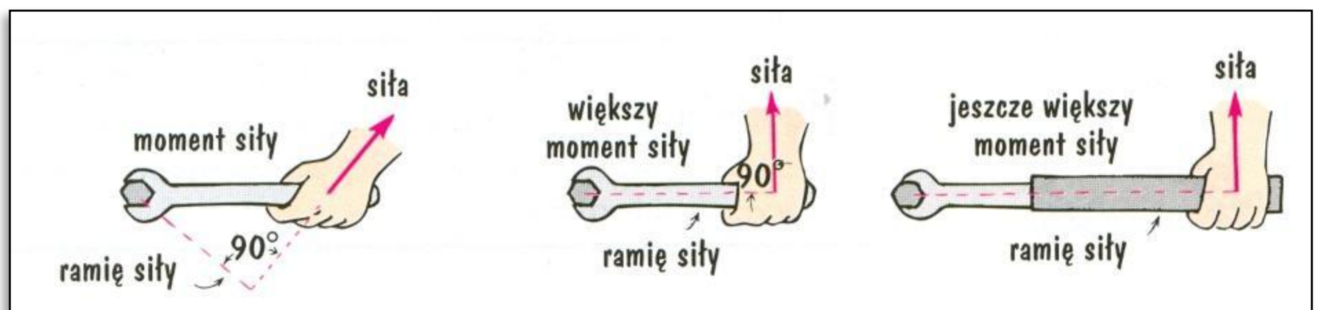
Moment siły i druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego



$$M = rF\sin(\phi)$$
$$M = r \times F$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$F = ma \qquad M = rF$$
$$M = rma$$
$$M = rm \cdot (r\alpha)$$
$$M = mr^2\alpha$$
$$\boxed{M = I\alpha}$$



Praca i moc w ruchu obrotowym

Praca:

$$W = Fx \qquad x = \theta r$$

$$W = \theta r F$$

$$\boxed{W = M\theta}$$

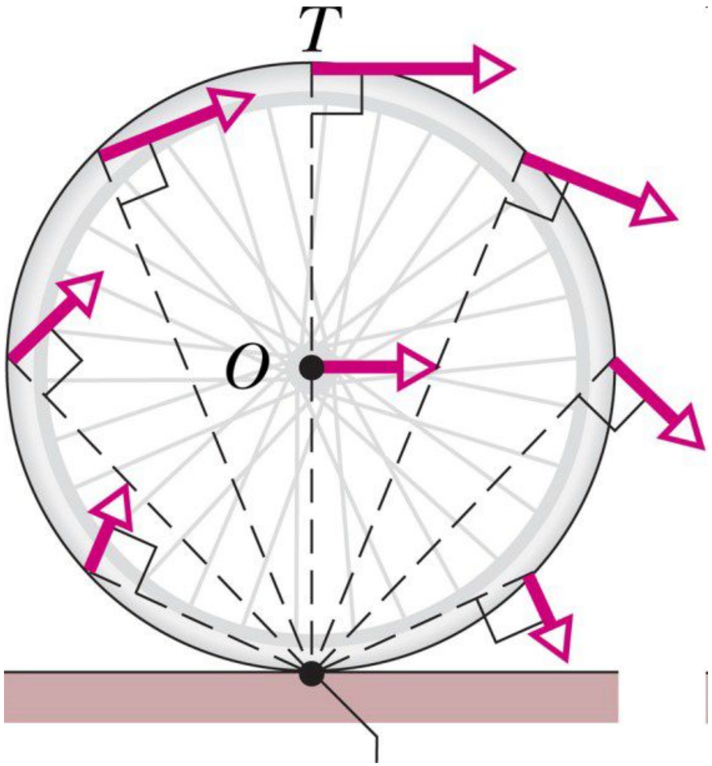
Moc

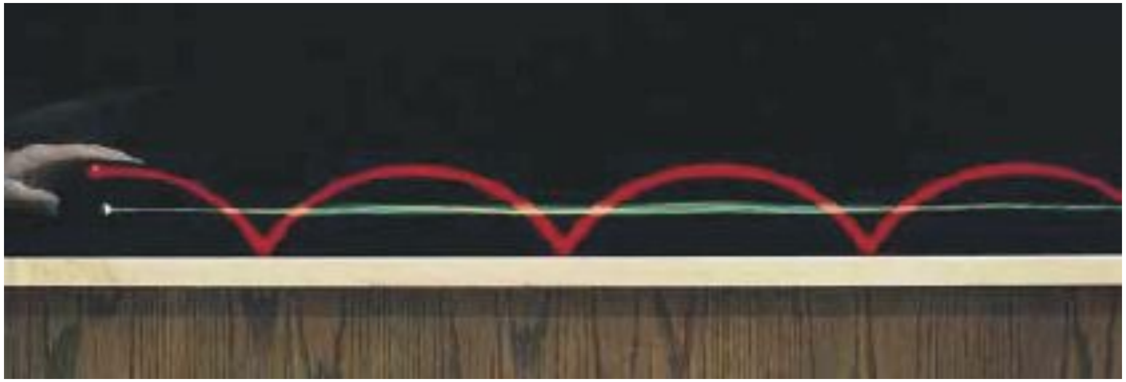
$$P = \frac{dW}{dt} \qquad M = rF$$

$$P = \frac{d(M\theta)}{dt} = M\frac{d\theta}{dt}$$

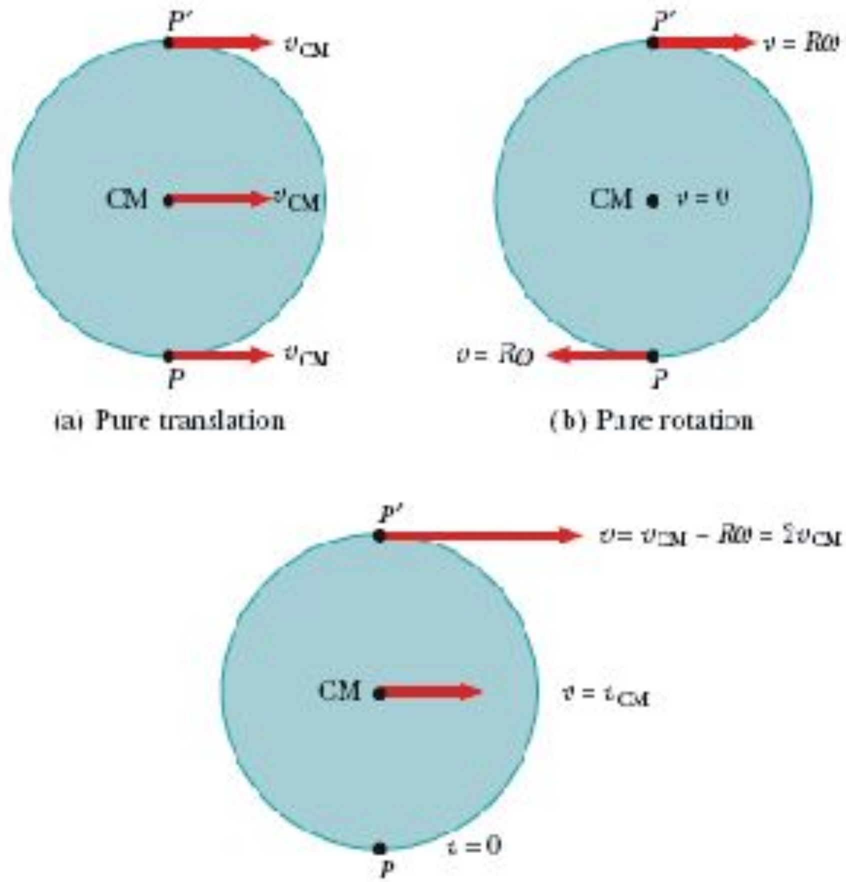
$$\boxed{P = M\omega}$$

Toczenie się ciał





Toczenie się ciał

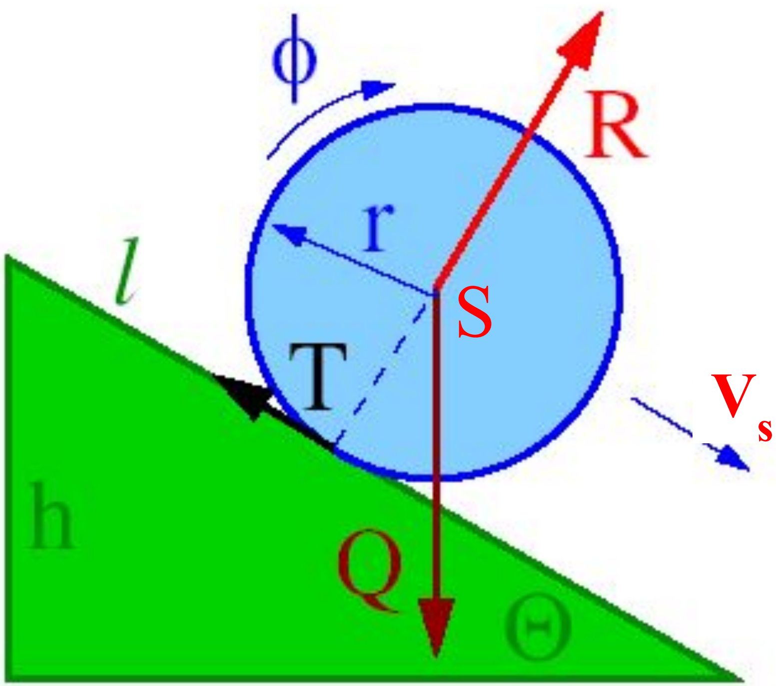


(a) Pure translation

(b) Pure rotation

(c) Combination of translation and rotation

Toczenie się ciał – walec na równi pochyłej



Ruch walca staczającego się po równi pochyłej bez poślizgu składa się z ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego

$$E_{k,t} = \frac{1}{2} m v_s^2$$

$$E_{k,r} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Moment pędu

$$L = rp \qquad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \left(m_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right)$$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \vec{b} \left(\vec{a}\,\vec{c} \right) - \vec{c} \left(\vec{a}\,\vec{b} \right)$$

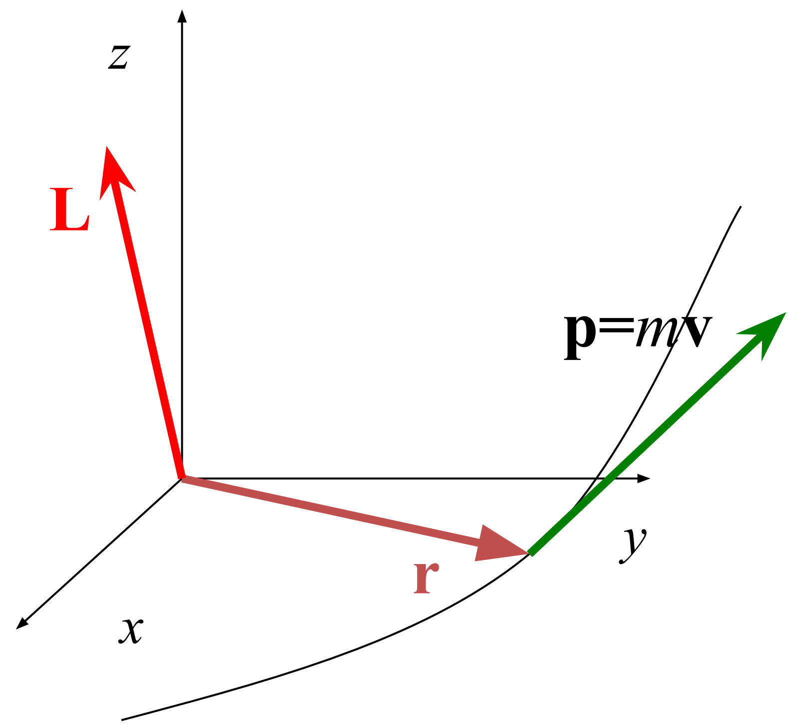
$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i \left(\vec{r}_i\,\vec{\omega} \right) \right]$$

$$\vec{r}_i\,\vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

$$L_x \equiv \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \left(\vec{r}_i\,\vec{\omega} \right)$$

$$L_y \equiv \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \left(\vec{r}_i\,\vec{\omega} \right)$$

$$L_z \equiv \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \left(\vec{r}_i\,\vec{\omega} \right)$$



Moment pędu

$$L_x = \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - x_i^2 \right) - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

$$L_y = -\omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - y_i^2 \right) - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

$$L_z = -\omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - z_i^2 \right)$$

wprowadzając:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - x_i^2 \right)$$

$$I_{xy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 y_i^2$$

$$I_{xz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 z_i^2$$

możemy powyższy układ równań zapisać używając Tensora Bezwładności*:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}}$$

* wyrazy Tensora Bezwładności to momenty bezwładności względem osi x, y, z oraz momenty dewiacji

Zasada zachowania momentu pędu

Jeżeli na bryłę A działa bryła B pewnym momentem siły M_{AB}, to bryła B działa na A momentem M_{BA} równym co do wartości, lecz przeciwnie skierowanym np.:

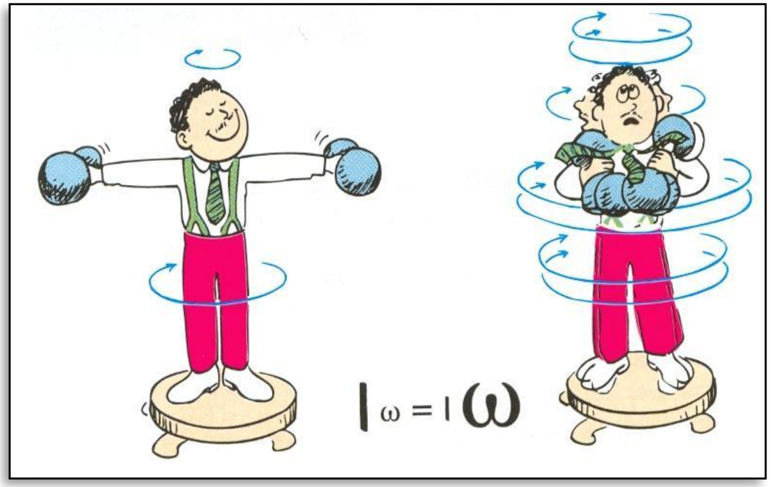
- rozruch silnika
- wiercenie dziur w ścianie

$$M_{AB} = -M_{BA}$$

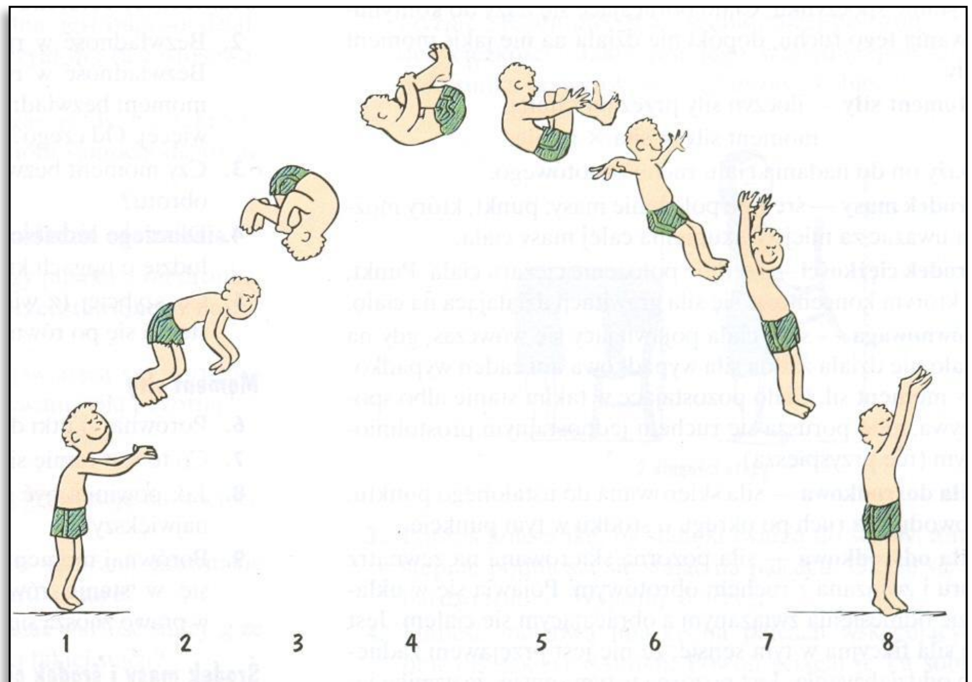
Zasada zachowania momentu pędu

$$M = \frac{dL}{dt} \qquad M = 0 \qquad L = const.$$

Obrotowy stołek: kręt układu (człowiek + hantle) pozostaje stały: zmniejszenie momentu bezwładności wskutek zbliżenia hantli przyspiesza obrót).

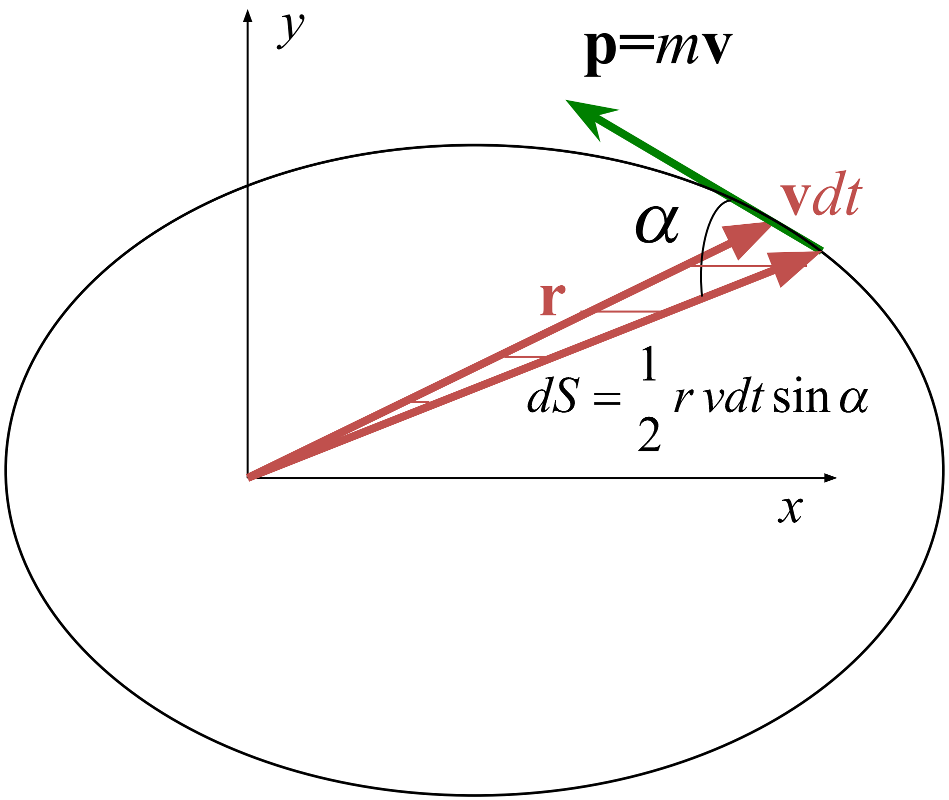


Skaczący gimnastyk może zmieniać swoją prędkość obrotową przez odpowiednią zmianę momentu bezwładności ciała, gdyż moment pędu musi być zachowany.



Zasada zachowania momentu pędu

Ruch w polu siły centralnej.
(II prawo Keplera)



$$\mathbf{L} = \mathbf{const}$$

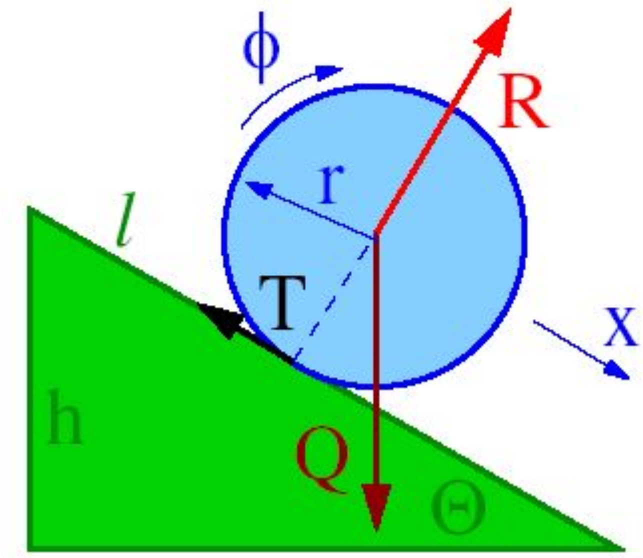
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin\alpha = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right| = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{L}|}{m}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{2} r^2\omega = \frac{1}{2}\frac{mr^2\omega}{m} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

Analogie ruchu postępowego i obrotowego

Mechanika punktu materialnego	Mechanika ruchu obrotowego bryły sztywnej
Przesunięcie Δs	Kąt obrotu $\Delta\alpha$
Prędkość $\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	Prędkość kątowa $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$
Przyspieszenie $a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$	Przyspieszenie kątowe $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
Masa m	Moment bezwładności $I = \Sigma m_i r_i^2$
Pęd $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Moment pędu $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Siła $\vec{F}$	Moment siły $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Podstawowe prawo dynamiki $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$	Podstawowe prawo dynamiki $\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$
Energia kinetyczna $E_k = \frac{mv^2}{2}$	Energia kinetyczna $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$
Prace elementarna $\Delta W = F\Delta s$	Praca elementarna $\Delta W = M\Delta\alpha$

Staczanie się kuli po równi (bez poślizgu)



Ruch postępowy opisuje równanie:

$$ma = Q\sin\theta - T$$

ruch obrotowy (względem środka masy):

$$I\varepsilon = Tr$$

eliminując siłę tarcia:

$$ma + \frac{I\varepsilon}{r} = mg\sin\theta$$

Miedzy przyspieszeniami istnieje zależność:

$$a = r\varepsilon$$

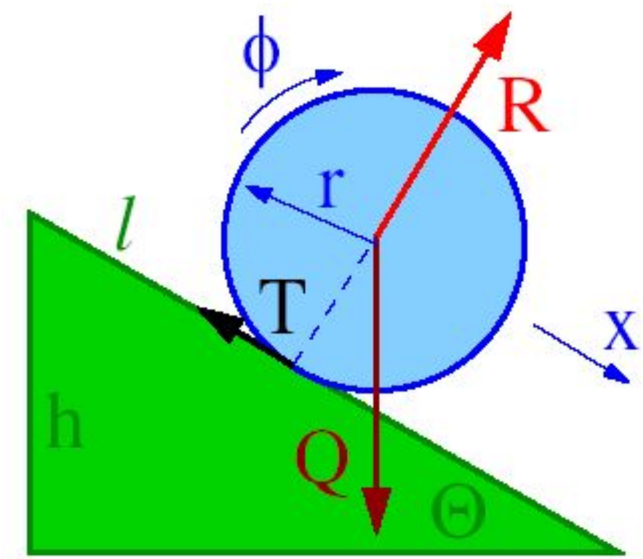
więc:

$$a = \frac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{I}{mr^2}}$$

Im większy moment bezwładności, tym wolniej stacza się ciało.

Staczanie się kuli po równi (bez poślizgu)

Można też rozwiązać w sposób równoważny
korzystając z chwilowej osi obrotu i twierdzenia Steinera.



Równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu (linia styku bryły z równią):

$$I_0 \varepsilon = Q \sin\alpha \cdot r$$

z twierdzenia Steinera mamy:

$$I_0 = I + mr^2$$

więc:

$$\varepsilon = \frac{Q \sin\alpha \cdot r}{I + mr^2}$$

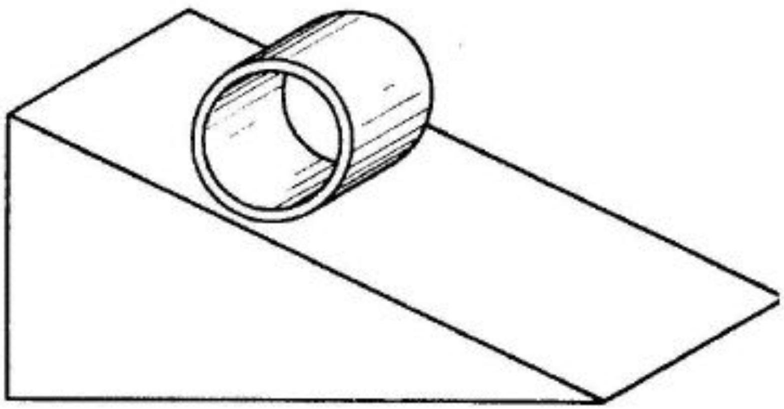
wykorzystując fakt: $a = r\varepsilon$

$$a = \frac{mg \sin\alpha \cdot r^2}{mr^2\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad a = \frac{Q \sin\alpha \cdot r^2}{I + mr^2} \qquad a = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Staczanie się ciał po równi (bez poślizgu)

$$I = \frac{1}{2} m \left(r_1^2 + r_2^2 \right)$$

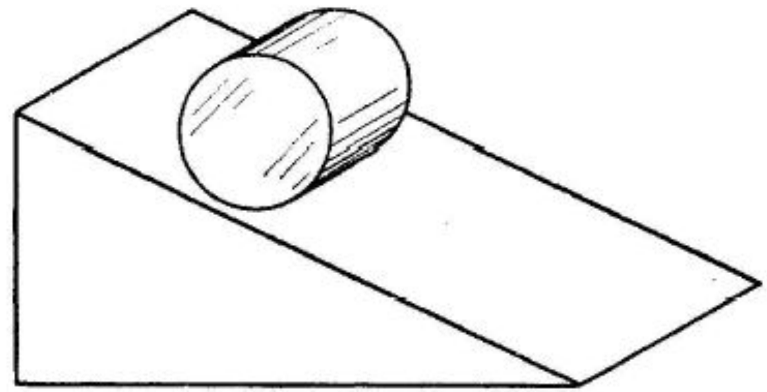
Rura



$$a = \frac{1}{2} g \sin\theta$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

Walec



$$a = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

$\frac{1}{3}$ szybciej

Zyroskop