§4. Дифференцирование функций комплексной переменной. Понятие аналитической функции.

Пусть $f(z)\in C(g)$.

Def. $f(z)$ называется ***дифференцируемой*** (или ***моногенной***) в точке $z_0\in g$, если при $\Delta z\to 0$ ($\Delta z\equiv z-z_0$) $\exists$ конечный предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}\overset{def}{\equiv} f'(z_0);$$

$$f'(z_0)\equiv\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

Не зависит от способа стремления $\Delta z\to 0$!

Теорема 4.1 Если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$, то в точке (x_0,y_0) $\exists u_x, u_y, v_x, v_y$:

$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ – *условия Коши-Римана.*

Доказательство. $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$;

1) $\Delta z=\Delta x$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(x_0,y_0)+i\Delta_x v(x_0,y_0)}{\Delta x}=$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)=* \qquad (*).$$

2) $\Delta z = i\Delta y$:

$$* = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u(x_0, y_0) + i\Delta_y v(x_0, y_0)}{i\Delta y} =$$

$$= -i\big(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)\big) =$$

$$= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \qquad (**).$$

$$\Rightarrow \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \ \blacksquare$$

Пусть $f(z) \in C(g)$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Теорема 4.2 Если в точке $z_0=(x_0,y_0)\in g$ $\exists du, dv$ и $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$, то $f(z)$ дифференцируемая в точке z_0.

Доказательство. $\exists du(x_0,y_0) \Rightarrow$

$$\Delta u = u_x(x_0,y_0)\Delta x + u_y(x_0,y_0)\Delta y + \xi(x,y),$$

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\xi(x,y)}{|\Delta z|}=0;$$

$$\exists dv(x_0, y_0) \Rightarrow$$

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(x, y),$$

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\eta(x, y)}{|\Delta z|} = 0;$$

Обозначим $\zeta(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y).$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u_x\Delta x + u_y\Delta y + iv_x\Delta x + iv_y\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\zeta(x, y)}{\Delta z} =$$

$$= \{u_x = v_y, u_y = -v_x\} =$$

$$= \frac{u_x\Delta x - v_x\Delta y + iv_x\Delta x + iu_x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\zeta(x, y)}{\Delta z} =$$

$$=\frac{u_x\cdot(\Delta x+i\Delta y)+iv_x\cdot(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\zeta(x,y)}{\Delta z}=$$

$$=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\frac{\zeta(x,y)}{\Delta z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)=f'(z_0).$$

$\blacksquare$

<u>***Замечания.***</u> $u_x=v_y,\;\; u_y=-v_x:$

1. $f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=$

$$=v_y(x,y)+iv_x(x,y)=u_x(x,y)-iu_y(x,y)=$$

$$=v_y(x,y)-iu_y(x,y).$$

2. Теорема 4.2 не обратная к теореме 4.1

3. $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon): \quad \left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad |\Delta z| < \delta.$$

Если $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то она и непрерывна в этой точке.
Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. $f(z) = |z|, \quad z_0 = 0.$

Основное определение. $f(z)$ дифференцируемая в $\forall\ z\in g$, $f'(z)\in C(g)$ называется ***аналитической функцией*** в g.

Обозначение: $f(z)\in C^{\infty}(g)$.

Понятие аналитичности функции определяет глобальное поведение $f(z)$ в области g.

Теорема 4.3 Необходимым и достаточным условиями $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\in C^{\infty}(g)$ являются $\exists u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g)$ и

$u_x = v_y,\ \ u_y = -v_x$ – *условия Коши-Римана.*

Доказательство.

Необходимость. $f(z)\in C^{\infty}(g)\Rightarrow f'(z)\in C(g)\Rightarrow$

$\exists u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g).$

Из Т.4.1 => $u_x = v_y,\ \ u_y = -v_x.$

Достаточность. $\exists u_x, u_y, v_x, v_y \in C(g)\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists du, dv.$ **Из Т.4.2 т.к.** $u_x = v_y,\ \ u_y = -v_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ f'(z) = u_x + iv_x.$

Т.к. $u_x, v_x \in C(g) \Rightarrow f'(z)\in C(g).$ ■

Замечание. Далее будет показано, что из

$$f(z)\in C^{\infty}(g) \Rightarrow f'(z)\in C^{\infty}(g).$$

Основное замечание. Условие $f'(z)\in C(g)$

— лишнее.

Альтернативное определение.
$f(z)$ дифференцируемая в $\forall\ z\in g$, называется ***«аналитической» функцией*** в g.

Вместо Теорем 4.2 и 4.3 будут

Теорема 4.4 Если $u(x,y), v(x,y) \in C(g)$ и в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in g$ $\exists u_x, u_y, v_x, v_y$:

$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$, то $f(z)$ дифференцируемая в точке z_0.

Теорема 4.5 Необходимым и достаточным условиями «аналитичности» $f(z) = u + iv$ в g являются $u(x,y), v(x,y) \in C(g)$ и

$\exists u_x, u_y, v_x, v_y$: $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \forall z \in g$.

Оказывается, что производная «аналитической» функции непрерывна в g, причем для $\forall n \;\; f^{(n)}(z) \in C(g)$, т.е. класс «аналитических» функций не является расширением введенного нами класса, а полностью с ним совпадает.

Следствия условий Коши-Римана

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\in C^{\infty}(g).$$

1. $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0;\quad \Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0;$

Обратно, пара *гармонических* в g функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные условиями Коши-Римана, являются действительной и мнимой частью аналитической функции.

2. $z = re^{i\varphi}, \quad f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi) \in C^{\infty}(g).$

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r} v_{\varphi}, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_{\varphi}.}$$

3. $f(z) = R(x,y) e^{i\Phi(x,y)}.$

$$\boxed{R_x = R\Phi_y, \quad R_y = -R\Phi_x.}$$

Свойства аналитических функций.

1. $f(z)\in C^{\infty}(g)\Rightarrow f(z)\in C(g).$

2. $f_1, f_2\in C^{\infty}(g)\Rightarrow f_1\pm f_2, f_1\cdot f_2, \dfrac{f_1}{f_2}\in C^{\infty}(g).$

3. $w=f(z)\in C^{\infty}(g), w\in G, \quad \xi=\varphi(w)\in C^{\infty}(G)\Rightarrow$

$\Rightarrow F(z)=\varphi(f(z))\in C^{\infty}(g).$

4. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\in C^{\infty}(g),\ f'(z_0)\neq 0$

$z_0\in g$. Тогда в $\Omega_{\varepsilon}(w_0):\{|w-w_0|<\varepsilon\}$

$$w_0=f(z_0)\quad \exists z=\varphi(w)\in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon}(w_0)):$$

$$\Omega_{\varepsilon}(w_0)\xrightarrow{z=\varphi(w)}\Omega_{\delta}(z_0),\quad \varphi'(w_0)=\frac{1}{f'(w_0)}.$$

Доказательство. Для $\exists\ z=\varphi(w)$

необходимо, чтобы в $\Omega_{\delta}(z_0)$

$$\begin{cases} u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$$

Для этого достаточно, чтобы в $\Omega_\delta(z_0)$

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Но } \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = .$$

=(Коши-Риман)= $u_x^2 + v_x^2 = \left| f'(z_0) \right|^2 \neq 0.$

Доказано $\exists$ обратной функции $z=\phi(w)$.

Составим разностное отношение $\dfrac{\Delta z}{\Delta w} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}} \Rightarrow$

$\exists$ и непрерывность $\phi'(w_0)$ при условии

$$f'(z_0) \neq 0.$$

■

5. Пусть в *__односвязной__* области g плоскости (x,y) задана функция $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)\in C^{\infty}(g)$,

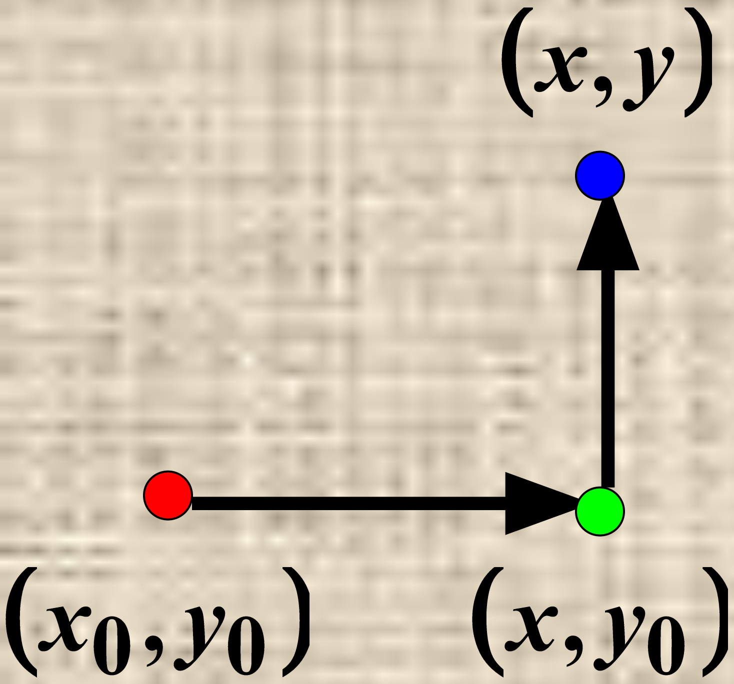
Тогда $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)\in C^{\infty}(g)$, определяется с точностью до аддитивной постоянной.

__Доказательство.__

$$dv=v_x dx+v_y dy=\{K.P.\}=-u_y dx+u_x dy\Rightarrow$$

$v(x,y)$ можно определить по dv

с точностью до аддитивной постоянной. ■



$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}\left(-u_y\right)dx+$$

$$+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)}u_x\,dy=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left(-u_y(x,y_0)\right)dx+\int_{y_0}^{y}u_x(x,y)\,dy.$$

6. $f(z)\in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon}(z_0))$ можно восстановить

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overset{*}{z_0}}{2},\frac{z-\overset{*}{z_0}}{2i}\right)-\overset{*}{C_0},$$

$$C_0=f(z_0).$$

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\overset{*}{z_0}}{2},\frac{z-\overset{*}{z_0}}{2i}\right)+\overset{*}{C_0},$$

7. $grad\ u=\{u_x,u_y\},\quad grad\ v=\{v_x,v_y\}$

$$(grad\ u,grad\ v)=u_xv_x+u_yv_y=-u_yv_y+u_yv_y=$$

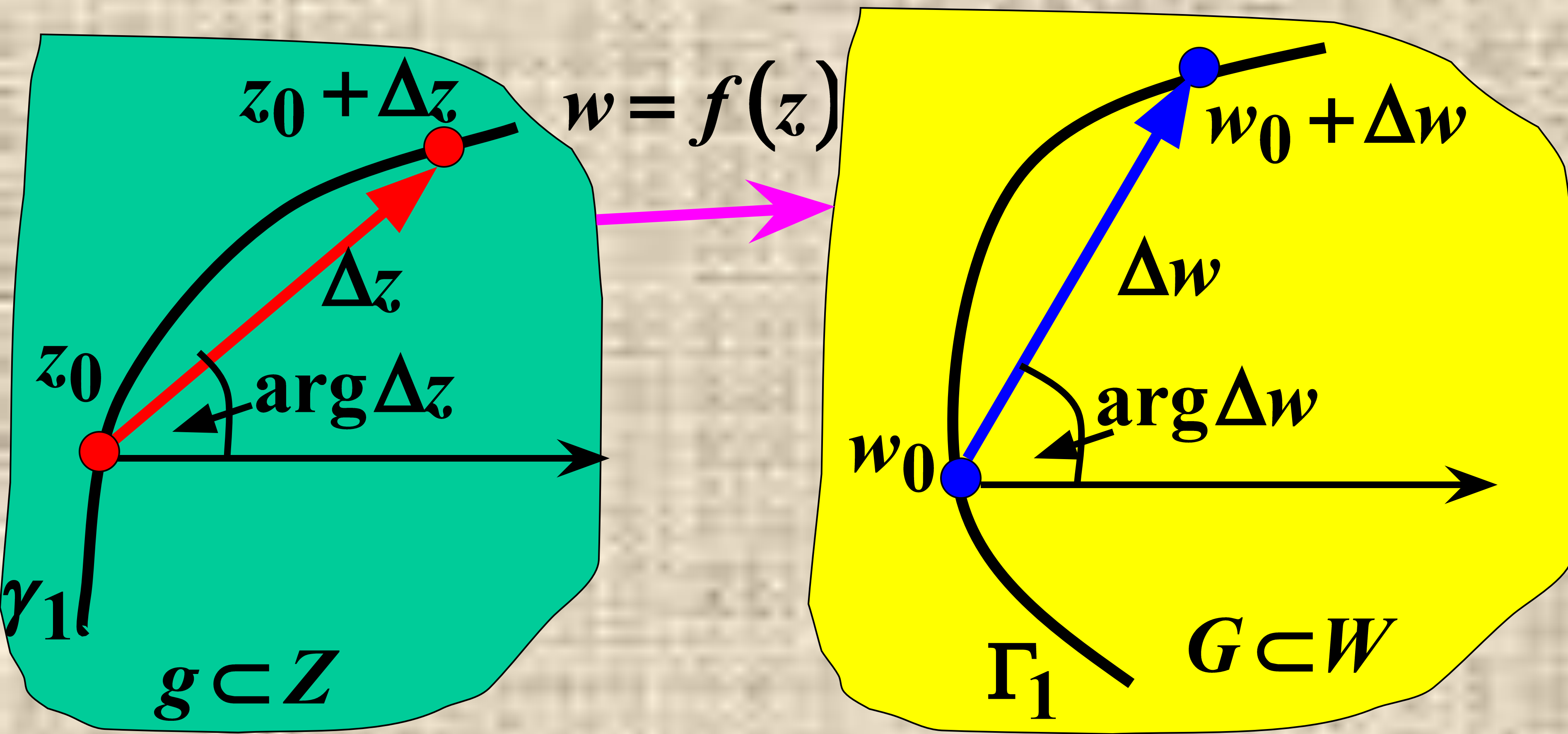
$=0.$ Т.к. grad $\perp$ линии уровня => линии уровня

$u(x,y)=c$ и $v(x,y)=c$ взаимно

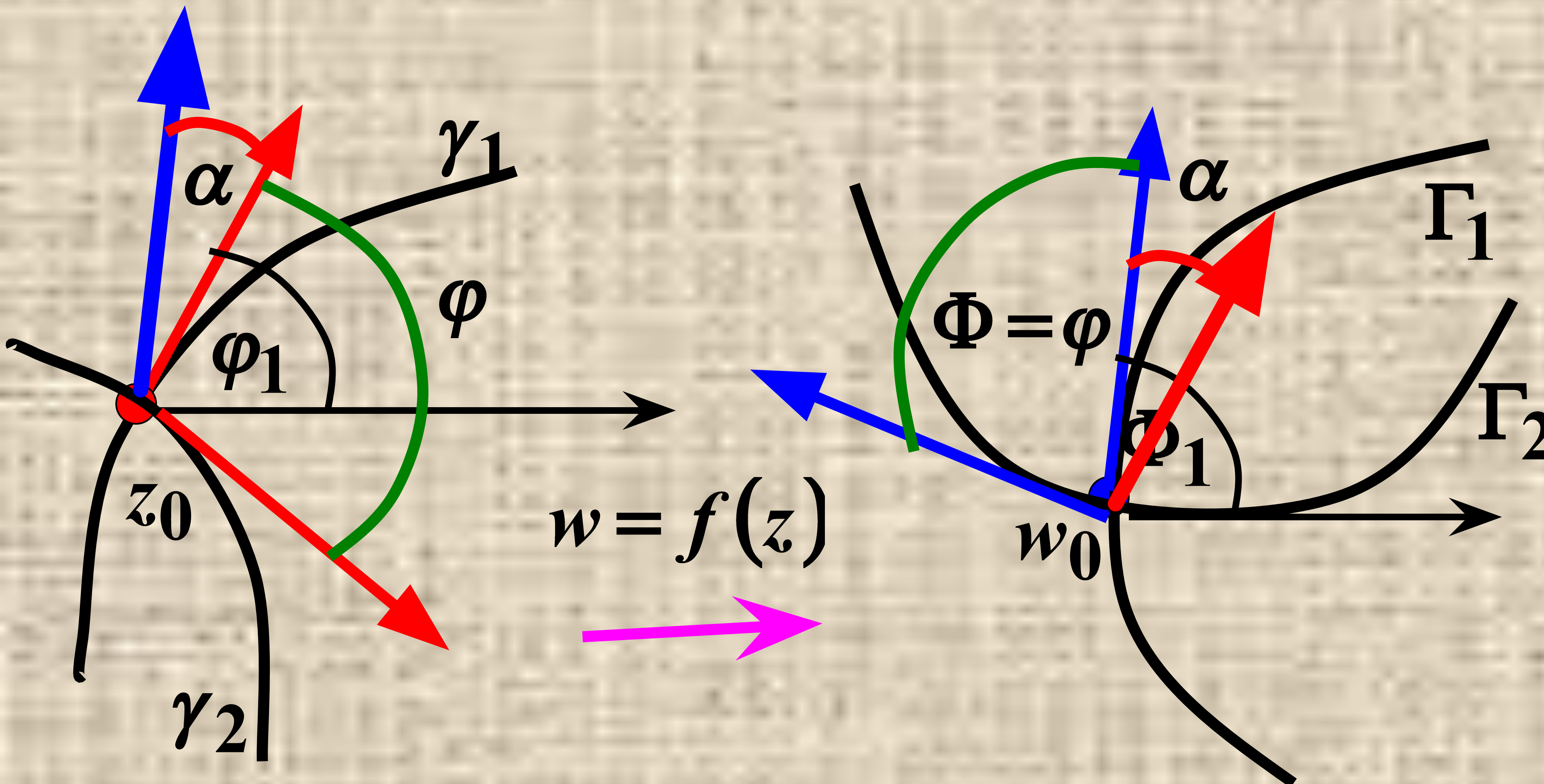
Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции.

$$w = f(z) \in C^{\infty}(g),\ f'(z_0) \neq 0 \quad z_0 \in g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha}, k > 0, \alpha \in R.$$



$z_0+\Delta z$
$w=f(z)$
$w_0+\Delta w$
Δz
Δw
z_0
$\arg\Delta z$
$\arg\Delta w$
w_0
γ_1
$g\subset Z$
Γ_1
$G\subset W$



α
γ_1
φ
φ_1
z_0
γ_2
$w = f(z)$
α
Γ_1
$\Phi = \varphi$
Φ_1
Γ_2
w_0

$$\exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha}, k > 0, \alpha \in R \Rightarrow$$

Свойство постоянства растяжения.

$$|\Delta w| = k|\Delta z| + o\left(|\Delta z|^2\right),$$

$k = |f'(z_0)|$ не зависит от выбора γ

Геометрический смысл $|f'(z_0)|$

При отображении $w = f(z) \in C^{\infty}(g), f'(z_0) \neq 0$

$z_0 \in g$ ***бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом***, **причем**

$|f'(z_0)|$ – ***коэффициент преобразования подобия.***

$$\exists f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k e^{i\alpha}, k > 0, \alpha \in R \Rightarrow$$

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z =$$

$$= \Phi_1 - \varphi_1 \Rightarrow \Phi_1 = \varphi_1 + \alpha.$$

Геометрический смысл $\arg f'(z_0)$:

Аргумент производной $\arg f'(z_0)$ **в точке** z_0 ***определяет величину угла*****, на который нужно повернуть касательную к** $\forall$ **гладкой кривой** γ**, проходящей через точку** z_0**, чтобы получить касательную к образу этой кривой в точке** $w_0 = f(z_0)$.

$\alpha = \arg f'(z_0)$ не зависит от выбора γ_1 =>

для $\forall \gamma_2 : z_0 \in \gamma_2$: $\Phi_2 = \phi_2 + \alpha$ => $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \phi_2 - \phi_1 = \phi$ (сохраняется величина и направление углов).

Свойство сохранения углов.

Примеры простейших функций комплексной переменой.

1. $f(z)=const\in C^{\infty}(Z),\quad f'(z)=0.$

2. $f(z)=az+b\in C^{\infty}(Z\setminus\infty),\quad f'(z)=a.$

3. $f(z)=\frac{1}{z}\in C^{\infty}(Z\setminus 0),\quad f'(z)=-\frac{1}{z^2}.$

4. $f(z)=z^n\in C^{\infty}(Z\setminus\infty), f'(z)=nz^{n-1},$

$n-$ целое

5. $f(z)=z^{*}=x-iy\notin C^{\infty},\quad u_x=1\neq v_y=-1.$