

# Механика

## Лекция 7

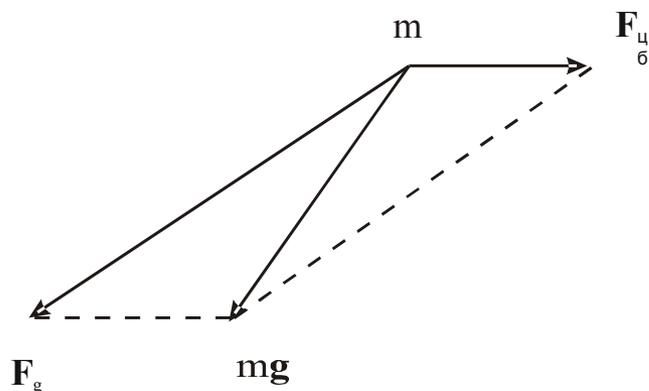
Момент Инерции. Уравнение моментов.

**Лектор профессор А.М.Тишин**

**рекомендованная литература:**

- 1. Д.В.Белов, Механика, Уч. Пособие, М.: Физический ф-т, МГУ, НЭВЦ ФИПТ., 1998, 144 с.**
- 2. И.В. Савельев, Курс Физики, том 1.**

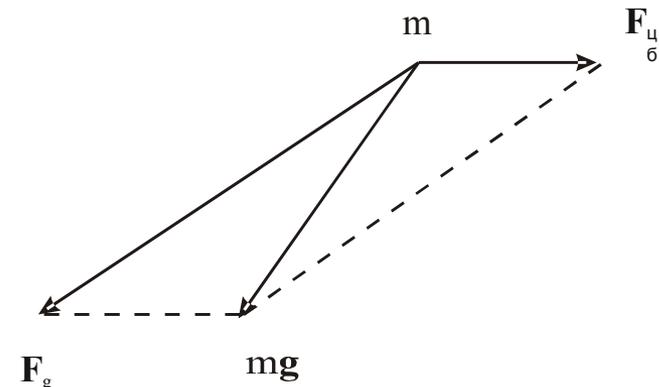
# Вес тела и сила тяжести



**Весом тела** называется сила, с которой тело действует на опору или подвес вследствие гравитационного притяжения.

В условиях Земли – вследствие притяжения к Земле. Вес тела не надо путать с **силой тяжести  $P = mg$** , где  **$g$**  - одинаковое для всех тел вблизи вращающейся (т.е. во вращающейся системе отсчета) поверхности Земли ускорение, называемое ускорением свободного падения.  **$P$**  хотя и обусловлена притяжением тел к Земле но **результат двух сил и не равна силе гравитационного притяжения тела  $F_g$  из-за действия  $F_{цб}$** .

# Различие силы тяжести и веса



На любое тело, находящееся на поверхности Земли (кроме полюса) действует центробежная сила инерции  $F_{цб}$ , что и приводит к некоторому

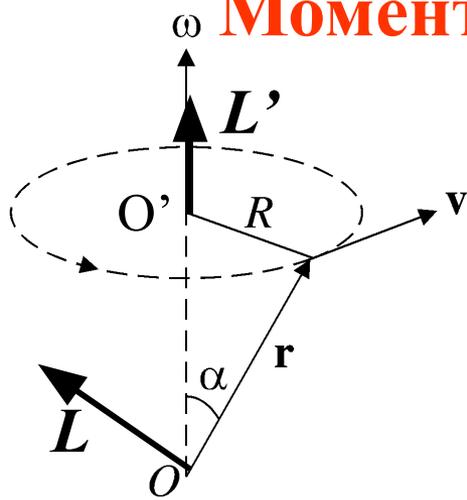
различию силы тяжести  $P$  и силы гравитационного притяжения  $F_g$  как по величине, так и по направлению. Те во вращающейся системе отсчета складываем два вектора

$$P = mg = F_g + F_{цб} \quad |F_{цб}| = m\omega_3^2 R_3 \cos \phi$$

Результирующая сила направлена не к центру Земли.

Максимальное различие получается **на экваторе** и составляет 0,3% от силы  $P$ . На экваторе на тело массой 1 кг действует  $F_{цб} = 0.0337 \text{ Н} = 1/291 mgh$ . Т.е. в ряде случаев ей можно пренебречь. Угол между направлениями векторов  $P$  и  $F_g$  также очень мал и его max значение равно 0,0018 рад (на широте 45 градусов).

# Момент инерции МТ относительно оси вращения



Величина угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Изменение угловой скорости со временем определяется вектором углового ускорения

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dot{\omega}$$

При вращении по окружности **момент импульса МТ  $L$**

относительно точки  $O$ :  $L = [r, mv]$  и направления векторов  $L$  и  $\omega$  не совпадают если точка  $O$  не в центре окружности. Если движение идет по окружности и точка  $O'$  в центре окружности, то направления векторов  $L'$  и  $\omega$  совпадают.

$$L' = Rmvs \sin 90^\circ = Rmv = Rm \cdot \omega R = mR^2\omega = I\omega$$

**Скалярная величина  $I = mR^2$  называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения.**

## Уравнение моментов для материальной точки

Как уже говорилось момент импульса **MT**, двигающейся по окружности:

$$L = mR^2\omega = I\omega$$

Производная по времени равна:

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\beta$$

В соответствии с законом изменения момента импульса для **MT** получаем:

$$I\beta = \sum_i N_{\text{ивнеш}}$$

# Абсолютно твердое тело

Под твердым телом будем подразумевать **абсолютно твердое тело**, в котором расстояния между любыми двумя точками неизменны. Твердое тело можно представить как совокупность большого количества очень малых масс  $\Delta m_i$ , которые можно считать **МТ**.

Теорема о движении центра масс твердого тела:

**центр масс твердого тела** движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, и к которой приложены все внешние силы, действующие на тело. **Т.е. раньше мы говорили о МТ и о системе МТ и ее центре масс, теперь еще и об абсолютно твердом теле.**

# Момент инерции твердого тела

Твердое тело можно представить как систему **МТ**, удерживаемых внутренними силами на неизменных расстояниях друг от друга и по аналогии с **МТ** записать:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{N}_{\text{внеш}}$$

Пусть момент импульса  $i$ -й частицы,  $r_i$  — радиус окружности, по которой движется **МТ**  $\Delta m_i$  относительно оси вращения тела. Направление  $\mathbf{L}_i$  относительно оси вращения всех точек тела одинаковое, так как в каждый момент времени направление и величина угловых скоростей всех точек одинаковы (тело твердое).

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \omega \sum \Delta m_i r_i^2 = I\omega$$

Величина  $I = \sum \Delta m_i r_i^2$  называется **моментом инерции твердого тела** относительно данной оси. Направление векторов  $\mathbf{L}$  и  $\omega$  совпадают только в случае симметричного тела.

# Уравнением моментов

Подставим момент импульса тела  $L = I\omega$   $\frac{dL}{dt} = I\beta = \sum N_{\text{внеш}}$

Это закон изменения момента импульса твердого тела или основной закон динамики для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Как и в случае с **МТ** можно сопоставить все величины для поступательного и вращательного движения.

Заменив в выражении для кинетической энергии  $T = \frac{mv^2}{2}$  массу на момент инерции  $I$ , а скорость  $v$  на угловую скорость  $\omega$  получим кинетическую энергию вращающегося вокруг **неподвижной** оси тела или просто подставив  $v = \omega R$ :

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

1. Скамья Жуковского  $T = \text{const}$  ? Произведение момента инерции на угловую скорость в замкнутой системе ( $N = 0$ ) остается постоянным?
2. Видео с вращением штанги.

# Момент инерции сложных тел

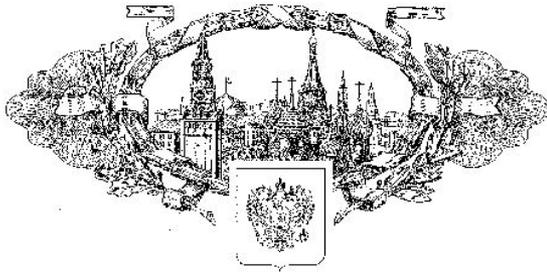
Для полного определения момента инерции более сложных тел выражение  $I = \sum \Delta m_i r_i^2$  следует уточнить, устремив элемент  $\Delta m_i$  к нулю и найдя соответствующий предел:

$$I = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum r_i^2 \Delta m_i$$

Как известно, такой предел называется интегралом:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

Интегрирование производится по всему объему тела  $V$ . Если плотность тела  $\rho$  постоянна, то  $\rho$  можно вынести из под знака интегрирования. **Но даже для яйца (желток, белок и скорлупа имеют разную плотность)! Земля?**



ПАТЕНТ

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 135507

НАГРЕВАТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ НАГРЕВА ЯИЦ

Изобретатель(и): Тишин Александр Металлинович (RU)

Автор(ы): Тишин Александр Металлинович (RU)

Заявка № 2013127777

Приоритет полезной модели 19 июня 2013 г.

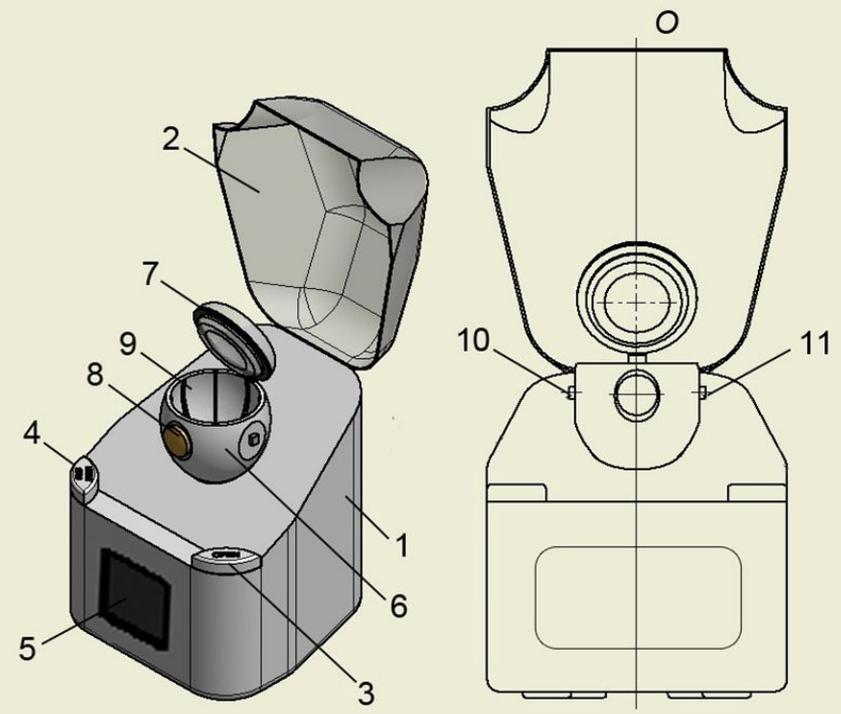
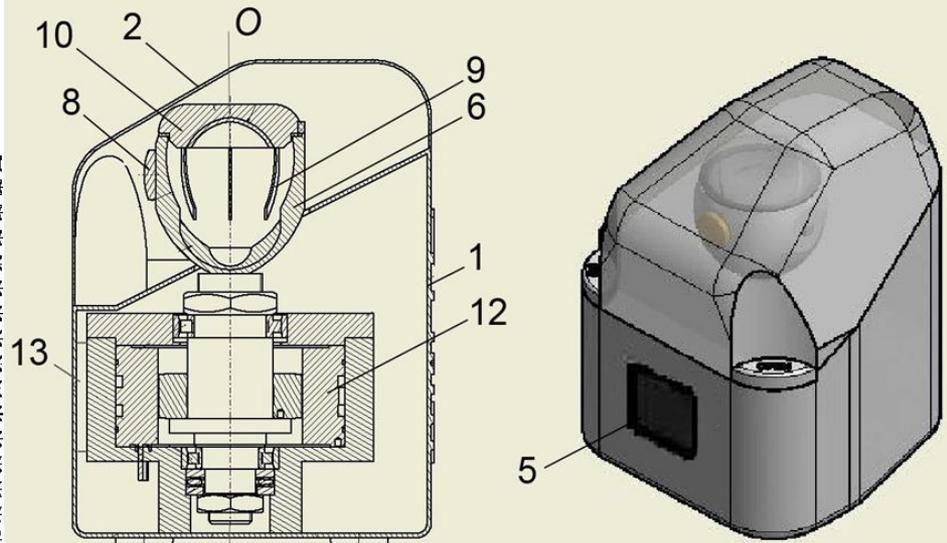
Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации 20 декабря 2013 г.

Срок действия патента истекает 19 июня 2023 г.

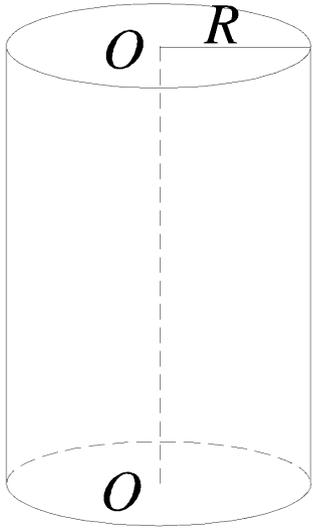
Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

В.Н. Симонов

И.И. Симонов



# Момент инерции полого цилиндра



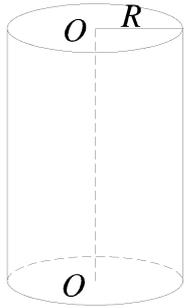
Найдем момент инерции **полого** цилиндра относительно его оси симметрии  $OO'$ .

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m = mR^2$$

где  $m$  — масса цилиндра.

Итак, момент инерции **полого** цилиндра прямо не зависит от высоты этого цилиндра (косвенно естественно зависит так как чем больше высота тем больше площадь и масса). Точно также выглядит и выражение для момента инерции **обруча**.

## Момент инерции сплошного цилиндра и однородного шара



Момент инерции **сплошного однородного цилиндра** относительно оси симметрии  $OO$  можно найти разбив его на цилиндры радиуса  $r$  и толщиной  $dr$ . Так как объем одного слоя равен  $dV=2\pi r h dr$  то

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \int r^2 \rho 2\pi r h dr = 2\pi \rho h \int r^3 dr =$$
$$2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \rho (\pi R^2 h) \frac{R^2}{4} = \rho V \frac{R^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$\rho$ - плотность,  $dr$  и  $h$  –толщина и высота цилиндра . А у полого цилиндра было  $mR^2$ . **Чем дальше удалена масса от центра тем больше  $I$** . При равных  $m$  и  $R$  у полого момент инерции  $I$  в 2 раза больше

1. **Опыт с двумя скатывающимися цилиндрами.**
2. **Опыт со скатыванием пенопласта не через главную ось**

# Фигуристка на льду и Торнадо: Что общего?

Сохранение кинетической энергии?

Приблизительно !

Торнадо – увеличивается масса того, что поднято с Земли - увеличивается момент инерции и увеличивается кинетическая энергия. Как зависит  $I$  от радиуса торнадо ? Узнаем чуть позже  $\sim R^2$

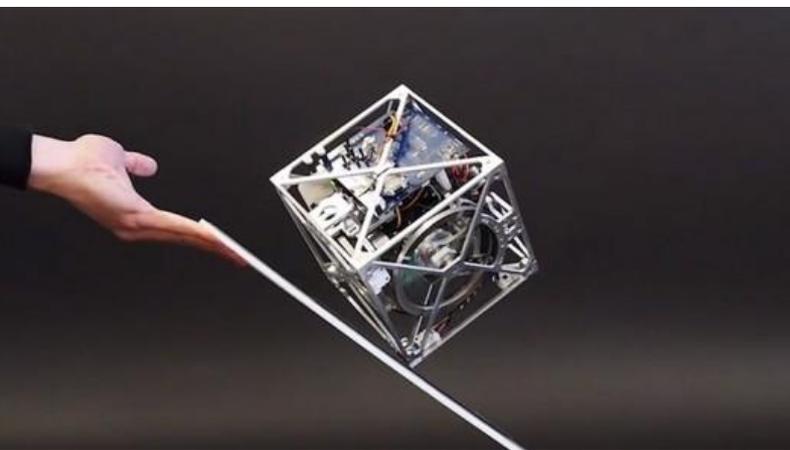
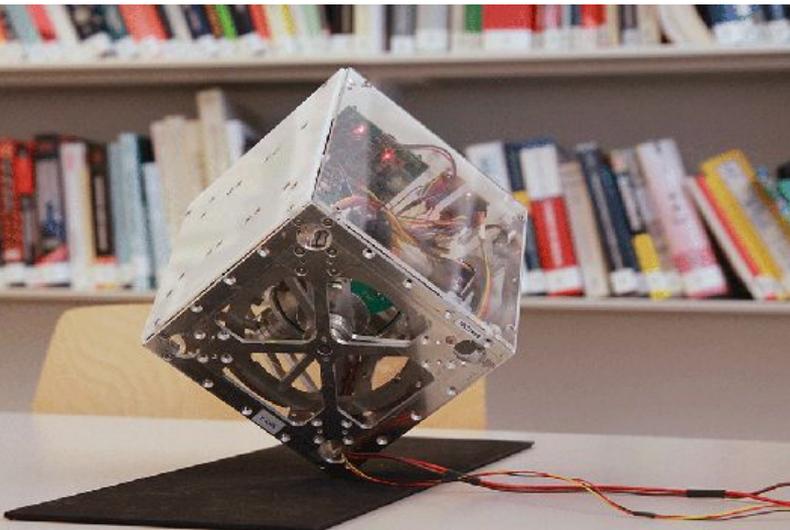
Куда расходуется кинетическая энергия? Вспомним :

машины, цунами, лавины.....

# Демонстрации на момент инерции

1. **Гироскопы не путать с гороскопами**
2. **Волчки**
3. **Прошу принести на следующую лекцию два куриных яйца. Одно сырое, другое сваренное вкрутую. Лучше кто живет в общежитии**
4. **Китайский волчок (момент силы трения)**
5. **Кусок пенопласта 3 оси (при вращении выходит на главную ось)**
6. **Палочки кельтов (срезаны наискосок)**

# Условия равновесия твердого тела



В общем случае для равновесия абсолютно твердого тела необходимо выполнение двух условий.

1. Сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0$$

2. Сумма моментов внешних сил относительно любой точки должна быть равна нулю:

$$\sum_i \mathbf{N}_{\text{внеш}} = 0$$

# Момент инерции в природе



Самолеты убирают шасси во время полета, а, например, пчелы, напротив, вытягивают вперед задние лапки для того, чтобы лететь устойчиво с большей скоростью.

При максимальной скорости в 7.25 м/с пчелы теряют вращательную устойчивость. Это говорит о том, что скорость пчелы ограничивает не сила мускулов или амплитуда машущих крыльев, а наклон тела и умение балансировать в неустойчивом положении. Т.е. определенной скорости пчелы умеют управлять своим моментом инерции и изменять момент импульса так, чтобы обеспечить условия равновесия (нулевую сумму моментов внешних сил).

## **Факультативно: приливы, отливы и не только?**

- Гравитация действует не только на Земле. Земля притягивается силами гравитации к другим телам, включая Солнце и Луну. Луна 19 марта 2011 подошла к Земле на самое близкое расстояние, начиная с 1992 года. Предыдущие фазы максимального сближения происходили в 1955, 1974, 1992 и 2005 годах.
- 2005 - мощный цунами Индонезии за две недели до перигея.
- 1974 - циклон Трэйси в австралийском городе Дарви.
- **Возможное проявление воздействия дополнительных сил и/или моментов сил, нарушающих равновесное состояние плит внутри Земли ?**

# Механика поступательного и вращательно движения относительно неподвижной оси

Все выражения для **МТ** и для твердого тела внешне очень похожи. 2-го закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = ma = \sum F_i \quad \frac{dL}{dt} = I\beta = \sum_i N_{\text{ивнеш}}$$

**Аналогами также являются:**

координата	$x$	- угол $\phi$ ,
линейной скорости	$v$	- угловая скорость $\omega$ ,
линейного ускорения	$a$	- угловое ускорение $\beta$ ,
массы	$m$	- момент инерции $I$ ,
силы	$F$	- момент силы $N$ ,
импульса	$p$	- момент импульса $L$ ,
кинетическая энергия	$mv^2/2$	- кинетическая энергия $I\omega^2/2$ ,
работа	$dA = F_s ds$	- работа $dA = N_\omega d\phi$
мощность	$P = F_v v$	- $P = N_\omega \omega$

# Момент инерции сплошного однородного шара. Земля?

- **11** марта **2011** года (мистика? нет! а разрушение двух небоскребов в США **11** сентября **2001** года ?) в Японии произошла серия сильнейших за 140 лет землетрясений, силой до 8,9 по шкале Рихтера, что спровоцировало цунами. Волна высотой до 10 метров проникла вглубь на несколько километров, и израсходовали свою кинетическую энергию на уничтожение всего на своем пути. Ось вращения Земли после японского землетрясения могла кратковременно сместиться на 10-15 см. Печальное следствие  $\frac{dI\omega}{dt} = \sum N_{\text{внеш}}$ . По сути тот же гироскоп, который мы уже обсуждали. Момент инерции **однородного шара** относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

- Для оценки если масса Земли приблизительно равна  $6 \times 10^{24}$  кг и считая Землю однородным шаром радиусом  $6,4 \times 10^6$  м. Можно оценить  $I = 9,8 \times 10^{37}$  кг м<sup>2</sup>. Близко! Так как общепринятое значение  $8 \times 10^{37}$  кг м<sup>2</sup>. На самом деле моменты инерции внутреннего ядра, внешнего ядра, мантии и коры могут отличаться и лежать в диапазоне от  $5,8 \times 10^{34}$  до  $7 \times 10^{37}$  кг м<sup>2</sup>
- <http://lnfm1.sai.msu.ru/~chujkova/Trudi/zharov.htm>

# Факультативно: Безразмерный момент инерции

Безразмерный момент инерции твердого тела радиуса  $R$  и массы  $m$  равен отношению его момента инерции относительно оси вращения к моменту инерции  $MT$  той же массы  $I = mR^2$  относительно неподвижной оси вращения, расположенной на расстоянии  $R$ . Как мы уже знаем  $MT$  отличается от однородного шара на  $2/5=0.4$

Безразмерный момент инерции Земли равен  $0,335$ , что меньше, чем у шара и что является аргументом в пользу неравномерного распределения массы (существования плотного ядра).

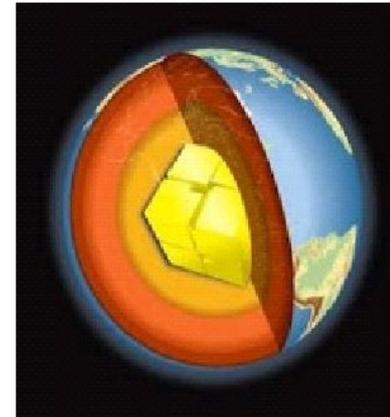
# Факультативно: ядро Земли кристалл?



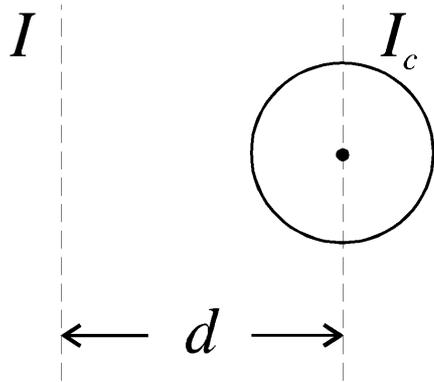
- проф. Борье Йоханссон (Börje Johansson), Факультет материаловедения и машиностроения Королевский технологический институт (Швеция), председатель и член Нобелевского комитета по физике, член Шведской королевской академии наук, почётный профессор МИСиС.

Профессор Йоханссон является одним из авторов концепции, согласно которой ядро Земли является кристаллом с кубической решёткой. Твёрдое железное ядро Земли обладает кристаллической структурой с объёмноцентрированной кубической

решеткой (в одной ячейке такой решётки атомы расположены по углам куба и ещё один атом — в центре куба). Данная теория способна перевернуть существующие представления о природе нашей планеты и о её магнитном поле. Статья, посвящённая этому исследованию, была опубликована в авторитетном научном журнале "Science".



# Теорема Штейнера



Зная момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, момент инерции относительно произвольной оси вычисляют по **теореме Штейнера**:

момент инерции относительно произвольной оси  $I$  равен сумме момента инерции  $I_c$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями  $d$ .

$$I = I_c + md^2$$

**Вспомним опыт с гантелями на скамье Жуковского**

