Бірінші дәрежелі сызықтық дифференциалдық теңдеулер 12 сынып

Маметреева Сана Оралбекқызы

Семей қаласындағы физика-математика бағытындағы Назарбаев Зияткерлік мектебі

Дифференциалдық теңдеулерді топқа бөліңіздер:

$e^x y' = 2x+1$	$y' = y^3 \sin x$	$xy' + 3y = x^2$
$y' = x^2 + e^x - x$	$4xy' = \ln x$	$dy = e^y (x + \sin 2x) dx$
$(xy' - 1)\ln x = 2y$	$\sqrt{x} y' = x$	$(y^2 + \cos y)\sin x \cdot y' = \frac{\cos x}{y}$
$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$	$xy' = (y + \sqrt{xy})$	$\frac{dy}{dx} = y(x^2 + e^x)dx$
$y' y^2 (3 + e^x) - e^x = 0$	$y' + 2y = 4x$	$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

Бірінші дәрежелі сызықтық дифференциалдық теңдеулер

- $y' + p(x)y = q(x)$ түріндегі теңдеулерді бірінші дәрежелі сызықтық дифференциалдық теңдеу деп атайды, мұндағы p(x) және q(x) - x айнымалысының функциялары.

$y' + p(x)y = 0$ **түріндегі теңдеулерді *бірінші дәрежелі біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеу* деп айтады**	$y' + p(x)y = q(x)$ **түріндегі теңдеулерді *бірінші дәрежелі біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеу* деп айтады, мұндағы** $q(x) \neq 0$

Шешу тәсілдері: 1. Интегралдаушы көбейткіш әдісі. 2. Тұрақтыны вариациялау әдісі

- **Интегралдаушы көбейткіш әдісі.** $y' + p(x)y = q(x)$
- (1) теңдеуінің екі жағын да $e^{\int p(x)dx}$ интегралдаушы көбейткішке көбейтеміз:

$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x) y e^{\int p(x)dx} = q(x) e^{\int p(x)dx} \quad (2)$$

Интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең:

$$\left(\int p(x)dx\right)' = p(x)$$

Күрделі функцияның туындысы бойынша:

$$\left(e^{\int p(x)dx}\right)' = e^{\int p(x)dx}\left(\int p(x)dx\right)' = p(x)e^{\int p(x)dx}$$

- Көбейтіндінің туындысы бойынша:

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = y'e^{\int p(x)dx} + y\left(e^{\int p(x)dx}\right)'$$

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = y'e^{\int p(x)dx} + yp(x)e^{\int p(x)dx}$$

- Осыны (2) теңдеуге қоямыз:

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

- Интегралдаймыз:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}$$

1-мысал. $xy' + 3y = x^2$ теңдеуін шешу керек.

- Шешуі:

$$y' + \frac{3}{x}y = x$$ бірінші дәрежелі сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу

$$p(x) = \frac{3}{x} \to \int p(x)dx = 3\int \frac{1}{x}dx = 3\ln x$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{3\ln x} = x^3$$

$$x^3y' + 3x^2y = x^4$$

$$\left(yx^3\right)' = x^4 \to yx^3 = \int x^4dx + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

$$\to y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{C}{x^3}$$

2-мысал. $xy' = y + 2x^3$ **теңдеуін шешу керек.**

- Шешуі: Тұрақтыны вариациялау әдісімен шешеміз. Алдымен біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$xy' = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + C \Rightarrow y = Cx$$

мұндағы С- кез келген тұрақты сан.

Енді С тұрақтыны қандай да бір әзірге белгісіз С(х) функциясымен алмастырып, берілген біртекті емес теңдеудің шешімін мына түрде іздейміз:

$$y = C(x) \cdot x$$

$$y' = [C(x) \cdot x]' = C'(x)x + C(x)$$

$$x\left[C'(x)x + C(x)\right] = C(x)x + 2x^3$$

$$\rightarrow C'(x)x^2 + C(x)x = C(x)x + 2x^3$$

$$\rightarrow C'(x) = 2x$$

$$\rightarrow C(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

мұндағы С - кез келген нақты сан. Сонымен берілген теңдеудің жалпы шешімі былай жазылады:

$$y = C(x)\cdot x = \left(x^2 + C_1\right)x = x^3 + C_1 x$$