УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Краевые задачи для волнового уравнения на отрезке.

Волновое уравнение описывает малые поперечные колебания однородной струны или продольные колебания однородного стержня.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \qquad (1.1)$$

Здесь $u(x,t)$ – перемещение точки x при изменении времени t, $f(x,t)$ – это плотность сил, отнесённых к единице массы. При $f = 0$ колебания называются свободными, в противном случае – вынужденными.

В случае конечного промежутка $0 \le x \le l$ задача формулируется так:

Найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x,t)$ (классическое решение $u \in C^2$ в области $t > 0$, $0 \le x \le l$), удовлетворяющую уравнению (1.1), а также начальным условия (1.2):

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_1(x), & 0 \le x \le l; \\ u_t(x,0) = \varphi_2(x), & 0 \le x \le l \end{cases} \qquad (1.2)$$

и граничным условиям (1.3):

$$\begin{cases} \gamma_1(t)\, u_x(0,t) + \gamma_2(t)\, u(0,t) = \mu_1(t); \\ \tilde{\gamma}_1(t)\, u_x(l,t) + \tilde{\gamma}_2(t)\, u(l,t) = \mu_2(t); \end{cases} \qquad (1.3)$$

где функции $\varphi_k(x), \mu_k(t)$ $(k = 1,2)$ – заданные функции координаты точки x и времени t соответственно.

Значения $\gamma_1(t) = \tilde{\gamma}_1(t) = 0$, $\gamma_2(t) \ne 0$, $\tilde{\gamma}_2 \ne 0$ отвечают ***первой*** краевой задаче,

$\gamma_1(t) \ne 0$, $\tilde{\gamma}_1(t) \ne 0$, $\gamma_2 = \tilde{\gamma}_2 = 0$ отвечают ***второй*** краевой задаче, а

$\gamma_k(t) \ne 0$, $\tilde{\gamma}_k(t) \ne 0$ $(k = 1,2)$ ***третьей*** краевой задаче.

Сначала напомним вид интегральных решений

I. Первая краевая задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \;\; 0 < x < l\,; \;\; t > 0; & (1.1) \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad 0 \le x \le l\,; & (1.2) \\ u_t(x,0) = \varphi_2(x), \qquad 0 \le x \le l; & (1.3) \\ u(0,t) = \mu_1(t); \qquad t \ge 0 & (1.4) \\ u(l,t) = \mu_2(t); \qquad t \ge 0 & (1.5) \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \varphi_1(s)G(x,s,t)ds + \int_0^l \varphi_2(s)G(x,s,t)ds + \int_0^t\int_0^l f(s,\tau)G(x,s,t-\tau)dsd\tau +$$

$$+ a^2\int_0^t \mu_1(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial s}G(x,s,t-\tau)\right]_{s=0} d\tau - a^2\int_0^t \mu_2(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial s}G(x,s,t-\tau)\right]_{s=l} d\tau\,, \qquad (1.6)$$

где $G(x,s,t)$ −*функция Грина*:

$$G(x,s,t) = \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi s}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi at}{l}\right). \qquad (1.7)$$

II. Вторая краевая задача:

Задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l; \; t > 0; \quad (2.1) \\ u(x,0) = \varphi_1(x), & 0 \le x \le l; \quad (2.2) \\ u_t(x,0) = \varphi_2(x), & 0 \le x \le l; \quad (2.3) \\ u_x(0,t) = \mu_1(t); & t \ge 0 \quad (2.4) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t); & t \ge 0 \quad (2.5) \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \varphi_1(s)G(x,s,t)ds + \int_0^l \varphi_2(s)G(x,s,t)ds + \int_0^t\int_0^l f(s,\tau)G(x,s,t-\tau)dsd\tau +$$

$$- a^2\int_0^t \mu_1(\tau)G(x,0,t-\tau)d\tau + a^2\int_0^t \mu_2(\tau)G(x,l,t-\tau)d\tau\ , \qquad (1.6)$$

где $G(x,s,t)$ *–функция Грина*:

$$G(x,s,t) = \frac{t}{l} + \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi s}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi at}{l}\right). \qquad (1.7)$$

III. Третья краевая задача:

Задача имеет вид:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l;\; t > 0; & (3.1) \\ u(x,0) = \varphi_1(x), & 0 \le x \le l; & (3.2) \\ u_t(x,0) = \varphi_2(x), & 0 \le x \le l; & (3.3) \\ u_x(0,t) - k_1 u(0,t) = \mu_1(t); & t \ge 0 & (3.4) \\ u_x(l,t) + k_2 u(l,t) = \mu_2(t); & t \ge 0 & (3.5) \end{cases}$$

Решение формально имеет такой же вид, что и вторая краевая задача:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \varphi_1(s)G(x,s,t)ds + \int_0^l \varphi_2(s)G(x,s,t)ds + \int_0^t\int_0^l f(s,\tau)G(x,s,t-\tau)dsd\tau +$$

$$- a^2\int_0^t \mu_1(\tau)G(x,0,t-\tau)d\tau + a^2\int_0^t \mu_2(\tau)G(x,l,t-\tau)d\tau\ , \qquad (3.6)$$

Однако теперь $G(x,s,t)$ – ***функция Грина*** уже имеет другой вид:

$$G(x,s,t) = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\|u_n\|^2}\sin(\lambda_n x + \psi_n)\sin(\lambda_n s + \psi_n)\sin(\lambda_n a t). \qquad (3.7)$$

где

$$\psi_n = arctg\frac{\lambda_n}{k_1}, \qquad \|u_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{({\lambda_n}^2 + k_1k_2)(k_1+k_2)}{(\lambda_n^2+k_1^2)(\lambda_n^2+k_2^2)};$$

λ_n − положительные корни трансцендентного уравнения:

$$ctg(\lambda l) = \frac{\lambda^2 - k_1k_2}{\lambda(k_1+k_2)}.$$

IV. Смешанная краевая задача:

Решение формально имеет такой же вид, что и вторая краевая задача:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l\,; \ t > 0; & (4.1) \\ u(x,0) = \varphi_1(x), & 0 \le x \le l\,; & (4.2) \\ u_t(x,0) = \varphi_2(x), & 0 \le x \le l; & (4.3) \\ u(0,t) = \mu_1(t); & t \ge 0 & (4.4) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t); & t \ge 0 & (4.5) \end{cases}$$

Решение имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \varphi_1(s)G(x,s,t)ds + \int_0^l \varphi_2(s)G(x,s,t)ds + \int_0^t\int_0^l f(s,\tau)G(x,s,t-\tau)dsd\tau +$$

$$+ a^2\int_0^t \mu_1(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial s}G(x,s,t-\tau)\right]_{s=0} d\tau + a^2\int_0^t \mu_2(\tau)G(x,l,t-\tau)d\tau\,, \qquad (1.6)$$

где $\boldsymbol{G(x,s,t)}$ –***функция Грина***:

$$G(x,s,t)=\frac{2}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}sin(\lambda_n x)sin(\lambda_n s)sin(\lambda_n at), \qquad \lambda_n=\frac{\pi(2n+1)}{2l}\,. \qquad (4.7)$$

Решение краевых задач для однородного волнового уравнения с однородными граничными условиями

методом разделения переменных (метод Фурье).

1. Краевая задача 1-го рода (I-I).

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, && 0 < x < L\,, \quad t > 0, \\
&u(x,0) = \varphi(x); && 0 \le x \le L \qquad (2.1) \\
&u_t(x,0) = \psi(x); && \\
&u(0,t) = 0; && \\
&u(L,t) = 0\,, \quad t \ge 0 &&
\end{aligned}
$$

Решение. Применим ***метод Фурье***.

Решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[A_n cos\left(\frac{\pi n a}{L}t\right) + B_n sin\left(\frac{\pi n a}{L}t\right)\right]$$

где A_n и B_n – коэффициенты Фурье вида:

$$A_n = a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx\,; \quad B_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^L \psi(x) sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx\,, \qquad n = \overline{1;\,\infty}\,.$$

2. Краевая задача 2-го рода (II-II).

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, && 0 < x < L\,, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \varphi(x); && 0 \le x \le L \qquad\qquad (5.1)\\
&u_t(x,0) = \psi(x); &&\\
&u_x(0,t) = 0; &&\\
&u_x(L,t) = 0\,, \quad t \ge 0 &&
\end{aligned}$$

Решение.

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\left[A_n\, cos\left(\frac{\pi n a}{L}t\right) + B_n\, sin\left(\frac{\pi n a}{L}t\right)\right].$$

При $n > 0$ ($n = \overline{1\,;\,\infty}$):

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \qquad \text{и} \qquad B_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^L \psi(x) cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

При $n = 0$:

$$A_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) dx \qquad \text{и} \qquad B_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x) dx$$

3.1 Смешанная краевая задача (I–II) :

(I-II)
$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, \qquad 0 < x < L\,, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x); \qquad 0 \le x \le L \qquad (3.1)$$
$$u_t(x,0) = \psi(x);$$
$$u(0,t) = 0;$$
$$u_x(L,t) = 0\,, \quad t \ge 0$$

Решение.

Решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left[\frac{(2n-1)}{2L}\pi x\right]\left\{A_n cos\left[\frac{(2n-1)}{2L}\pi at\right] + B_n sin\frac{(2n-1)}{2L}\pi at\right\}.$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) sin\left[\frac{(2n-1)}{2L}\pi x\right]dx \quad \text{и} \quad B_n = \frac{4}{(2n-1)\pi a}\int_0^L \psi(x)\left[\frac{(2n-1)}{2L}\pi x\right]dx\,, \qquad n = \overline{1\,;\,\infty}\,.$$

3.2 Смешанная краевая задача (II-I):

(II-I)

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, \qquad 0 < x < L\,, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x); \qquad 0 \le x \le L \qquad (3.1)$$
$$u_t(x,0) = \psi(x);$$
$$u_x(0,t) = 0;$$
$$u(0,t) = 0\,, \qquad t \ge 0$$

Решение.

Решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} cos\left[\frac{(2n-1)}{2L}\pi x\right]\left\{A_n cos\left[\frac{(2n-1)}{2L}\pi at\right] + B_n sin\frac{(2n-1)}{2L}\pi at\right\}.$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) cos\left[\frac{(2n-1)}{2L}\pi x\right]dx \text{ и } B_n = \frac{4}{(2n-1)\pi a}\int_0^L \psi(x) cos\left[\frac{(2n-1)}{2L}\pi x\right]dx\,, \qquad n = \overline{1\,;\,\infty}\,.$$

3.3 Смешанная краевая задача (I-III)

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, && 0 < x < L, \quad t > 0, \\
&u(x,0) = \varphi(x); && 0 \le x \le L \qquad\qquad (5.1) \\
&u_t(x,0) = \psi(x); && \\
&u(x,0) = 0; && \\
&u_x(L,t) + hu(L,t) = 0, && h > 0, \ t \ge 0
\end{aligned}
$$

Решение.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(a\sqrt{\lambda_n}\, x\right)\left[A_n\, cos\left(a\sqrt{\lambda_n}\, t\right) + B_n\, sin\left(a\sqrt{\lambda_n}\, t\right)\right].$$

$$A_n = \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_0^L \varphi(x) cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)dx \quad \text{и} \quad B_n = \frac{1}{a\,\lambda_n \|u_n\|^2}\int_0^L \psi(x) sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)dx$$

$$\|u_n\|^2 = \int_0^L sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)dx = \frac{L\left(h^2 + {\lambda_n}^2\right) + h}{2\left(h^2 + {\lambda_n}^2\right)}$$

λ_n – положительные корни трансцендентного уравнения:

$$h\, tg\left(\sqrt{\lambda}\, L\right) = -\sqrt{\lambda} \quad, n = \overline{1\,;\,\infty}.$$

3.4 Смешанная краевая задача (I-III)

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, && 0 < x < L\,, \quad t > 0, \\
&u(x,0) = \varphi(x); && 0 \le x \le L \qquad\qquad (5.1) \\
&u_t(x,0) = \psi(x); && \\
&u_x(0,t) - hu(0,t) = 0; && \\
&u_x(L,t) = 0\,, && h > 0\ , t \ge 0
\end{aligned}$$

Решение.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(a\sqrt{\lambda_n}\, t\right) + B_n \sin\left(a\sqrt{\lambda_n}\, t\right)\right]\left[\sqrt{\lambda_n} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)\right].$$

$$A_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_0^L \varphi(x)\left[\sqrt{\lambda_n} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)\right]dx\,;$$

$$B_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\, \|u_n\|^2} \int_0^L \psi(x)\left[\sqrt{\lambda_n} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)\right]dx;$$

$$\|u_n\|^2 = \int_0^L \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right)dx = \frac{L\left(h^2 + \lambda_n{}^2\right) + h}{2}\,;$$

λ_n – положительные корни уравнения:

$$h\, ctg\left(\sqrt{\lambda}\, L\right) = -\sqrt{\lambda}\ \ , n = \overline{1\,;\ \infty}.$$

4. Краевая задача III – го рода (III-III)

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, && 0 < x < L, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \varphi(x); && 0 \le x \le L \qquad (5.1)\\
&u_t(x,0) = \psi(x);\\
&u_x(0,t) - hu(0,t) = 0;\\
&u_x(L,t) + hu(L,t) = 0, && h > 0\ , t \ge 0
\end{aligned}
$$

Решение.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}\, t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}\, t)\right]\left[\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) + h \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)\right].$$

$$A_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_0^L \varphi(x)\left[\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) + h \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)\right] dx\,;$$

$$B_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\|u_n\|^2} \int_0^L \psi(x)\left[\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) + h \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)\right] dx;$$

$$\|u_n\|^2 = \int_0^L \sin^2(\sqrt{\lambda_n}\, x)\, dx = \frac{L(h^2 + \lambda_n{}^2) + 2h}{2}\,;$$

λ_n – неотрицательные корни уравнения:

$$ctg(\sqrt{\lambda}\, L) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{L}\right) \quad , n = \overline{1\,;\,\infty}.$$

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ