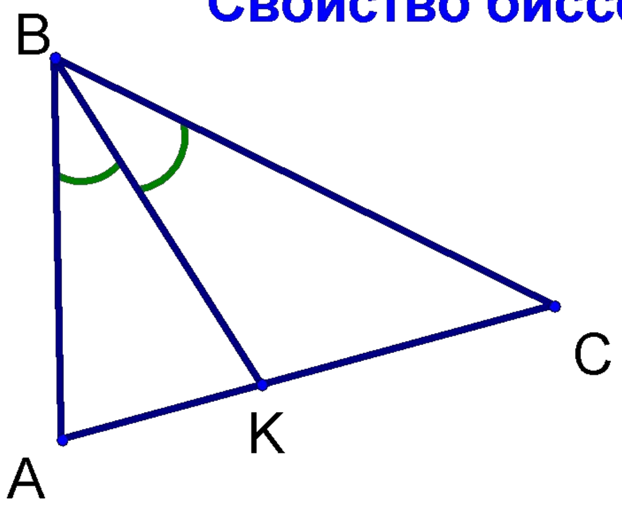
Теорема Менелая

ГБОУ лицей №1828 «Сабурово»,
учитель математики Яровикова Н.В., 9 класс.

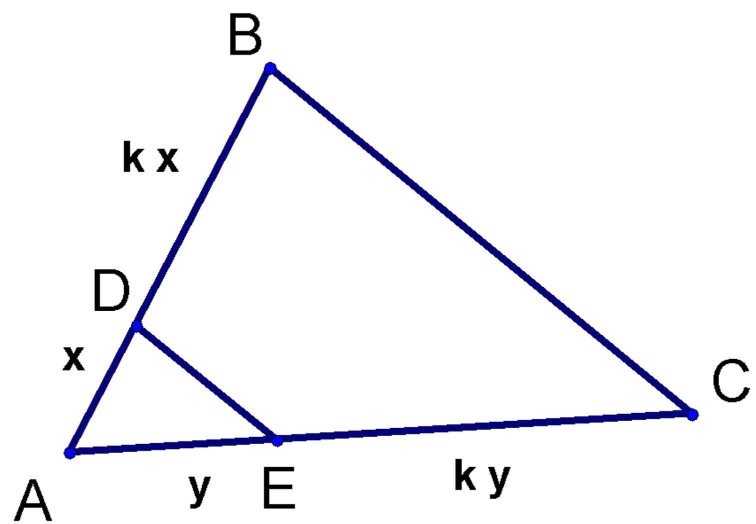
Теорема Менелая

Свойство биссектрисы треугольника



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC}$$

Обобщенная теорема Фалеса

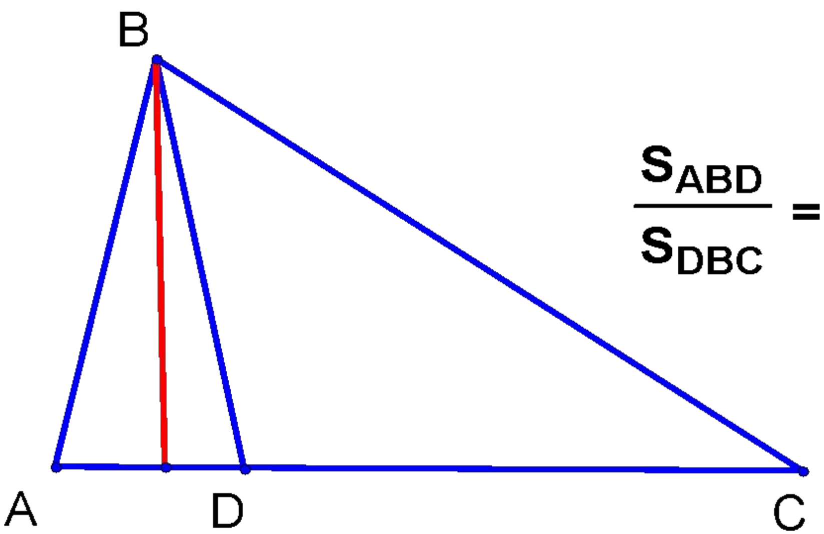


$DE \parallel BC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

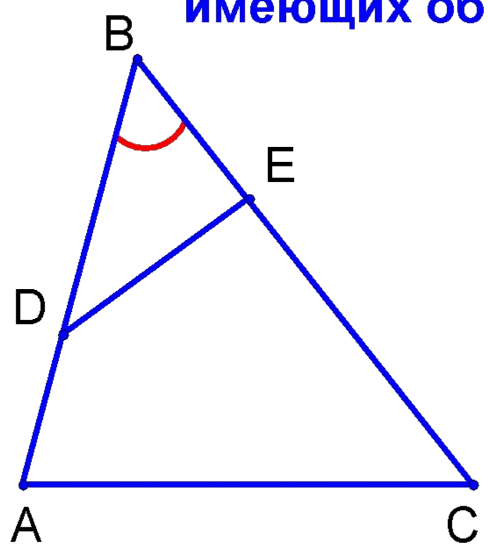
Теорема Менелая

Отношение площадей треугольников, имеющих общую высоту



$$\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{DC}$$

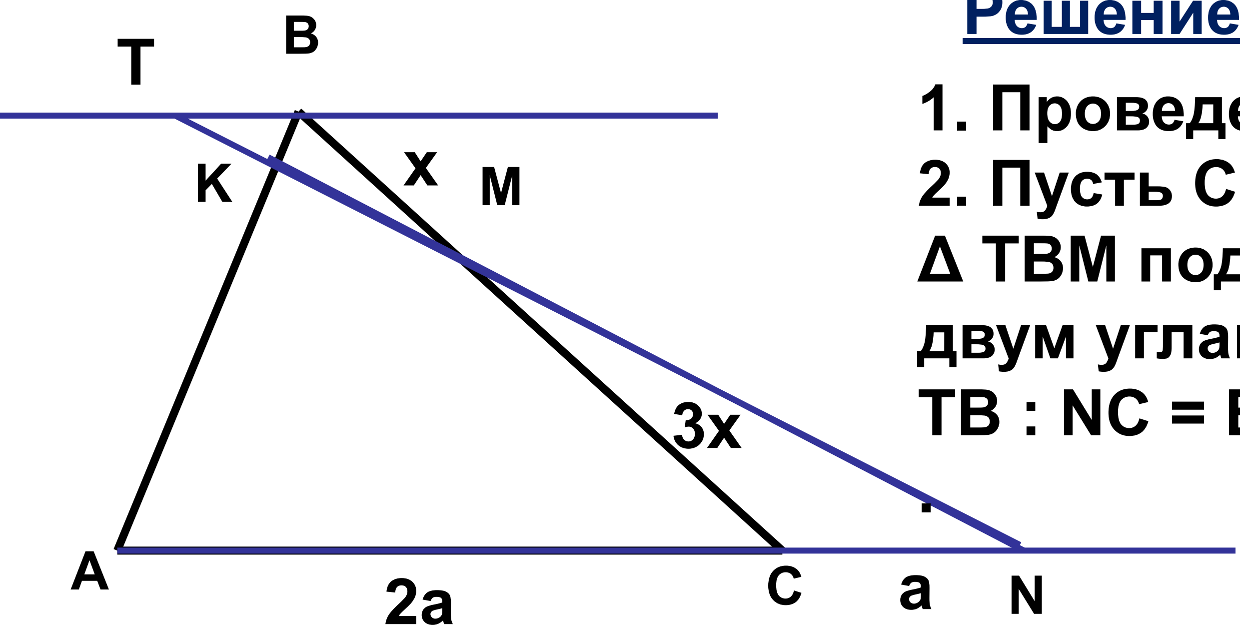
Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол



$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBE}} = \frac{AB \cdot BC}{DB \cdot BE}$$

Теорема Менелая

Задача 1. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причем AC = 2 CN. Точка M находится на стороне BC, причем BM : MC = 1 : 3.
В каком отношении прямая MN делит сторону AB?



Решение.

1. Проведем прямую BT ││ AN.
2. Пусть CN = a, AC = 2a.

Δ TBM подобен Δ NCM по двум углам.

TB : NC = BM : MC = 1 : 3,

$$TB = \frac{1}{3}a.$$

3. Δ TBK подобен Δ NAK по двум углам.

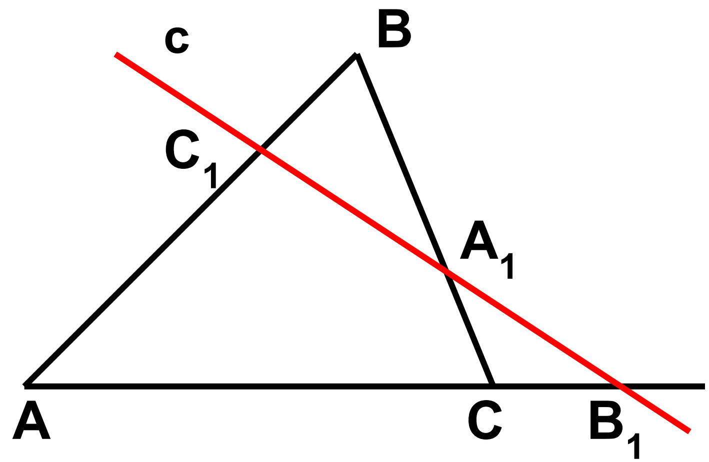
BK : KA = TB : NA = 1 : 9.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

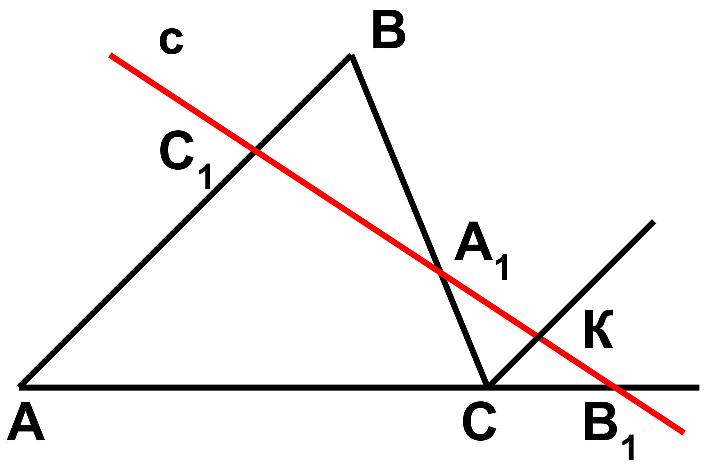
Теорема Менелая

Теорема Менелая. Пусть прямая пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1, B_1, C_1, то справедливо соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1\ .$$



Теорема Менелая



Доказательство.

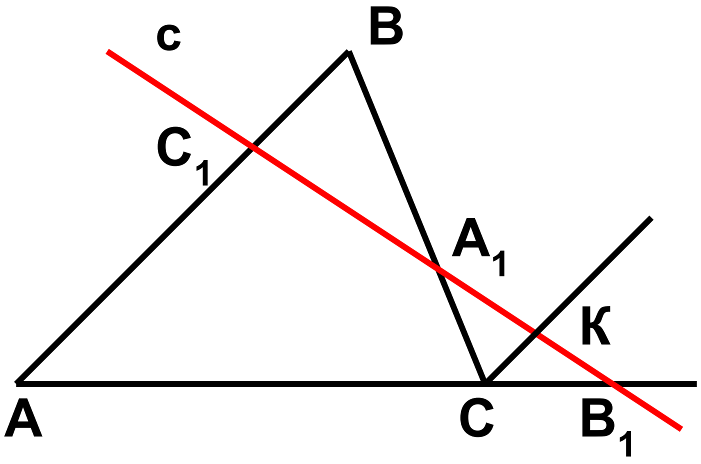
1. Проведем через точку C, прямую параллельно AB.

2. K – точка её пересечения с прямой B_1C_1.

3. ΔAC_1B_1 и $\Delta\ CKB_1$ подобны т.к. $\angle C_1AB_1 = \angle\ KCB_1$ и $\angle AC_1B_1 = \angle\ CKB_1$ внешние односторонние углы при параллельных прямых AC_1, CK и секущих AB_1 и C_1B. 4. Значит $\frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}$.

5. ΔBC_1A_1 и $\Delta\ CKA_1$ подобны, т.к. $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1K$ – вертикальные, $\angle C_1BA_1 = \angle\ KCA_1$ - внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CK и секущей BC.

Теорема Менелая



Доказательство.

6. Значит $\frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C}.$

7. Из равенства находим, что

$$CK = \frac{A_1C \cdot BC_1}{BA_1} \qquad CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A}$$

8. Получаем, что

$$\frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \Leftrightarrow \quad \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

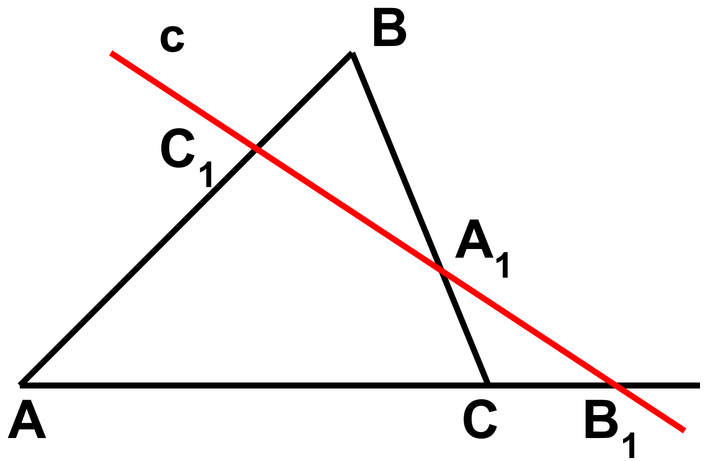
Теорема доказана.

Теорема Менелая

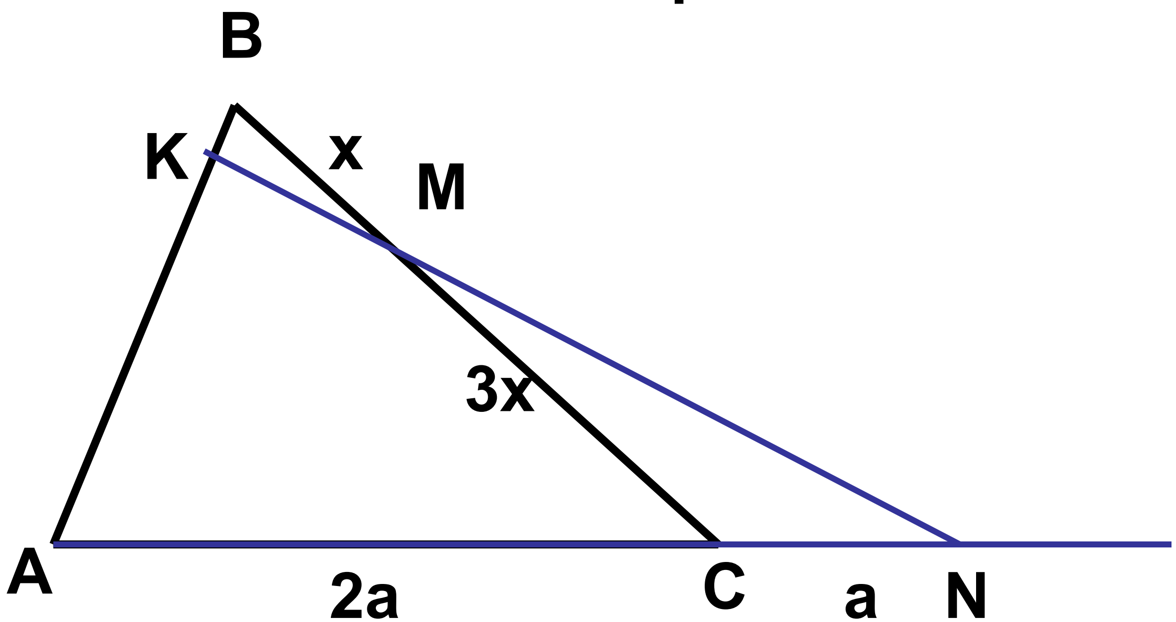
Теорема (Менелая обратная). Пусть дан треугольник ABC. Предположим, что точка C_1 лежит на стороне AB, точка A_1 лежит на стороне BC, а точка B_1 лежит на продолжении стороны AC, причём про эти точки известно, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1\ .$$

Тогда эти точки лежат на одной прямой.



Задача 1. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причем AC = 2 CN. Точка M находится на стороне BC, причем BM : MC = 1 : 3.
В каком отношении прямая MN делит сторону AB?



Решение.

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1;$$

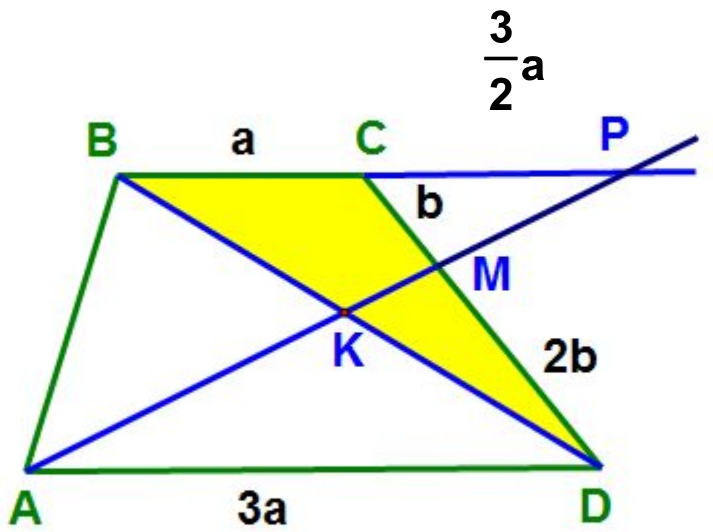
$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=1;$$

$$\frac{AK}{KB}=\frac{9}{1},\quad \frac{KB}{AK}=\frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Теорема Менелая

Задача 2. В трапеции ABCD основание AD в три раза больше, чем BC. Точка M делит сторону CD в отношении CM : MD = 1 : 2. Определите в каком отношении отрезки AM и BD делятся точкой их пересечения.



Решение.

1) ΔAMD подобен ΔPMC,

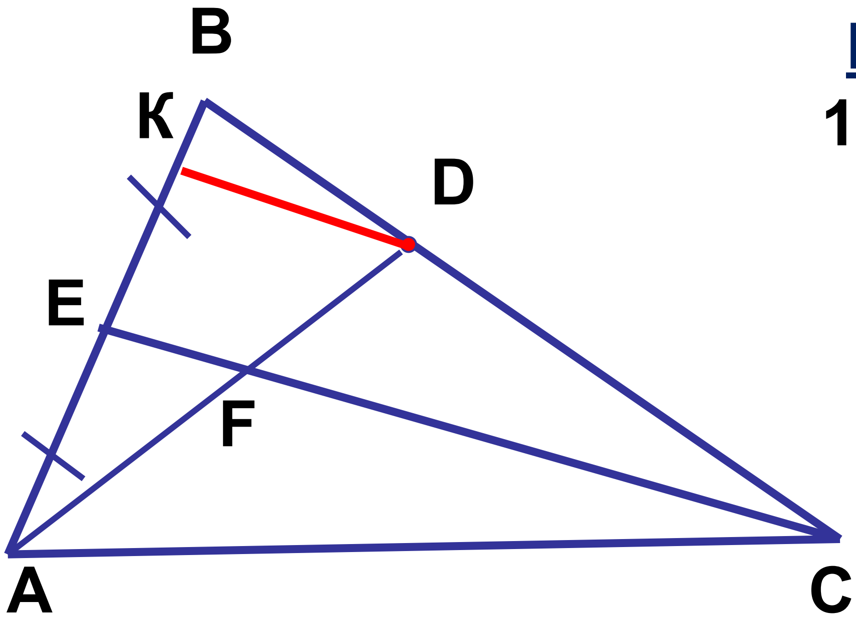
$$k = \frac{1}{2}, \quad CP = \frac{3}{2}a.$$

2) Применим теорему Менелая к треугольнику BCD и прямой AP:

$$\frac{DK}{KB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CM}{CD} = 1, \quad \text{отсюда} \quad \frac{DK}{KB} = \frac{6}{5}.$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Задача 3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что BD:DC =1:2. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.



Решение.

1) Возьмем точку К на АВ так, что DK││EC.

Δ CEB подобен Δ DKB по двум углам.

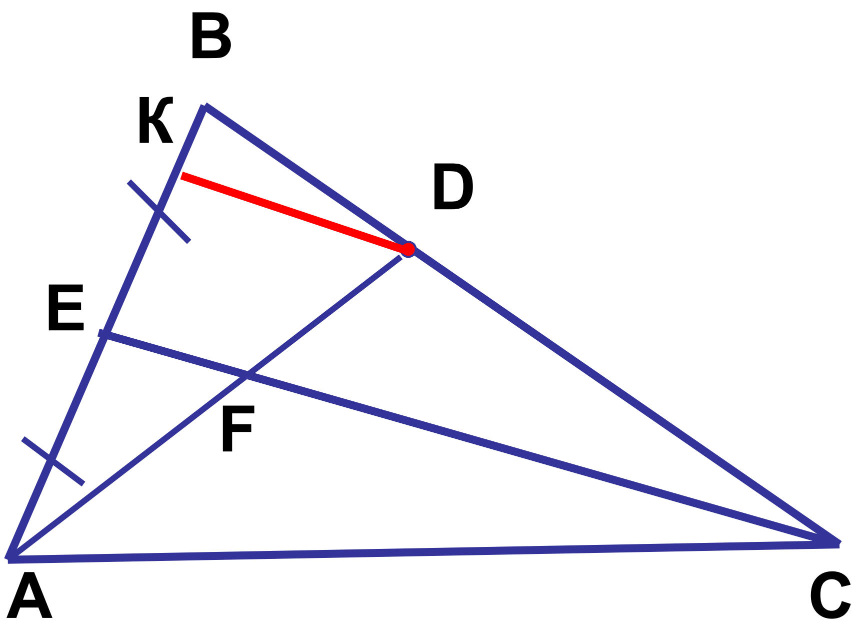
CB : DB = EB : BK = 3 : 1.

Тогда BK = x, AE = BE = 3x.

2) $S_{ABD} : S_{ABC} = BD : CB = 1 : 3$ (общая высота, проведенная из точки А).

3) $S_{AKD} : S_{ABD} = AK : AB = 5 : 6$ (общая высота, проведенная из точки D).

Задача 3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что BD:DC =1:2. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF.



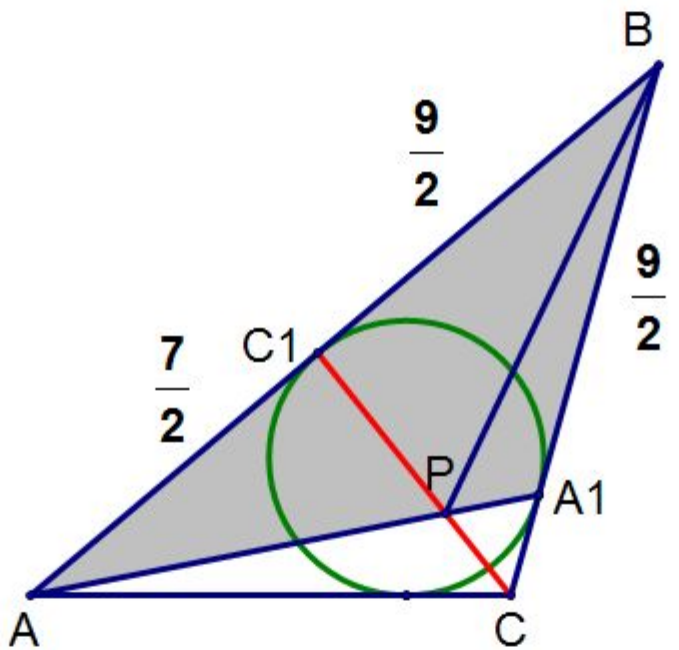
Решение.

4) Δ AEF подобен Δ ADK по двум углам.
$S_{AEF} : S_{AKD} = 9 : 25;$

$$S_{AEF} = \frac{9}{25} \cdot S_{AKD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot S_{ABD} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}.$$

Ответ: 0,1.

Задача 4. В треугольнике ABC, описанном около окружности, AB = 8, BC = 5, AC = 4. A_1 и C_1 – точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC и BA. P – точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1. Точка P лежит на биссектрисе BB_1. Найти отношение $AP : PA_1$.



Решение.

1) Пусть $BC_1 = BA_1 = x$, $A_1C = 5 - x$, $C_1A = 8 - x$.

$AC_1 + A_1C = 4$ (отрезки касательных)

$$5 - x + 8 - x = 4, \quad x = \frac{9}{2}.$$

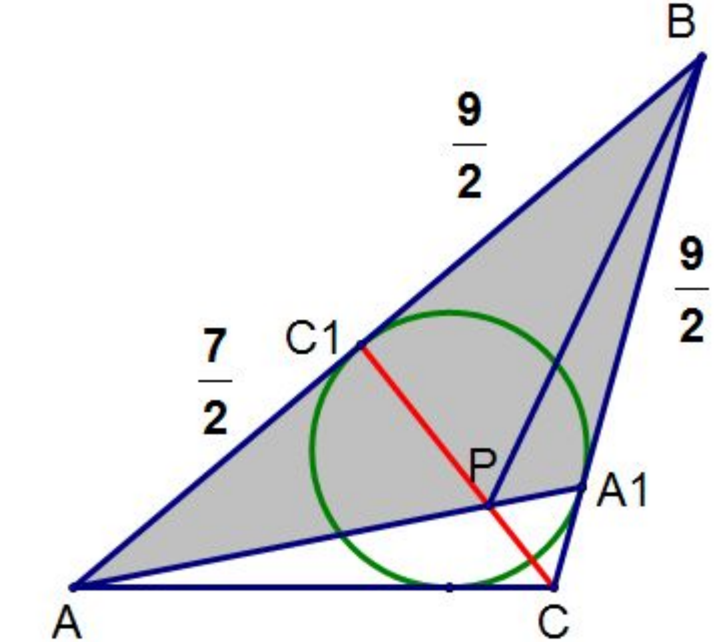
$BA_1 = BC_1 = \frac{9}{2}$, $C_1A = \frac{7}{2}$.

2) Применим теорему Менелая к $\Delta\ ABA_1$ и прямой CC_1:

Теорема Менелая

Задача 4. В треугольнике ABC, описанном около окружности, $AB = 8$, $BC = 5$, $AC = 4$. A_1 и C_1 – точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC и BA. P – точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1. Точка P лежит на биссектрисе BB_1. Найти отношение $AP : PA_1$.

Решение.



2) Применим теорему Менелая к Δ ABA_1 и прямой CC_1:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BC}{CA_1}\cdot\frac{A_1P}{PA}=1,\qquad \frac{A_1P}{AP}=\frac{9}{70}.$$

Ответ: $\frac{70}{9}$.

Домашнее задание.

1. Дан треугольник ABC, в котором BM – медиана. Точка P лежит на стороне AB, точка Q – на стороне BC, причем $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5}$, $\frac{BQ}{QC} = 6$.

   Отрезок PQ пересекает медиану BM в точке R. Найти $\frac{BR}{RM}$.

2. В треугольнике ABC угол C – прямой, BC = 3, AC = 4 и проведены биссектриса CD и медиана AM. Найти площадь треугольника CEM.

3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка пересечения делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины.