Нелинейная парная регрессия (НПР)

План:

1. **Общие сведения о нелинейных парных регрессионных моделях, виды нелинейных регрессий**
2. **Оценка параметров нелинейной модели относительно фактора**
3. **Оценка параметров нелинейной модели по параметрам**

1. Общие сведения о нелинейных парных регрессионных моделях

Различают два класса нелинейных регрессий:

- регрессии, **нелинейные относительно фактора**, но линейные по параметрам
- Регрессии, **нелинейные по параметрам**

Регрессии, нелинейные относительно фактора

1) Полиномиальная

$$\hat{y} = a + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p$$

2) Гиперболическая

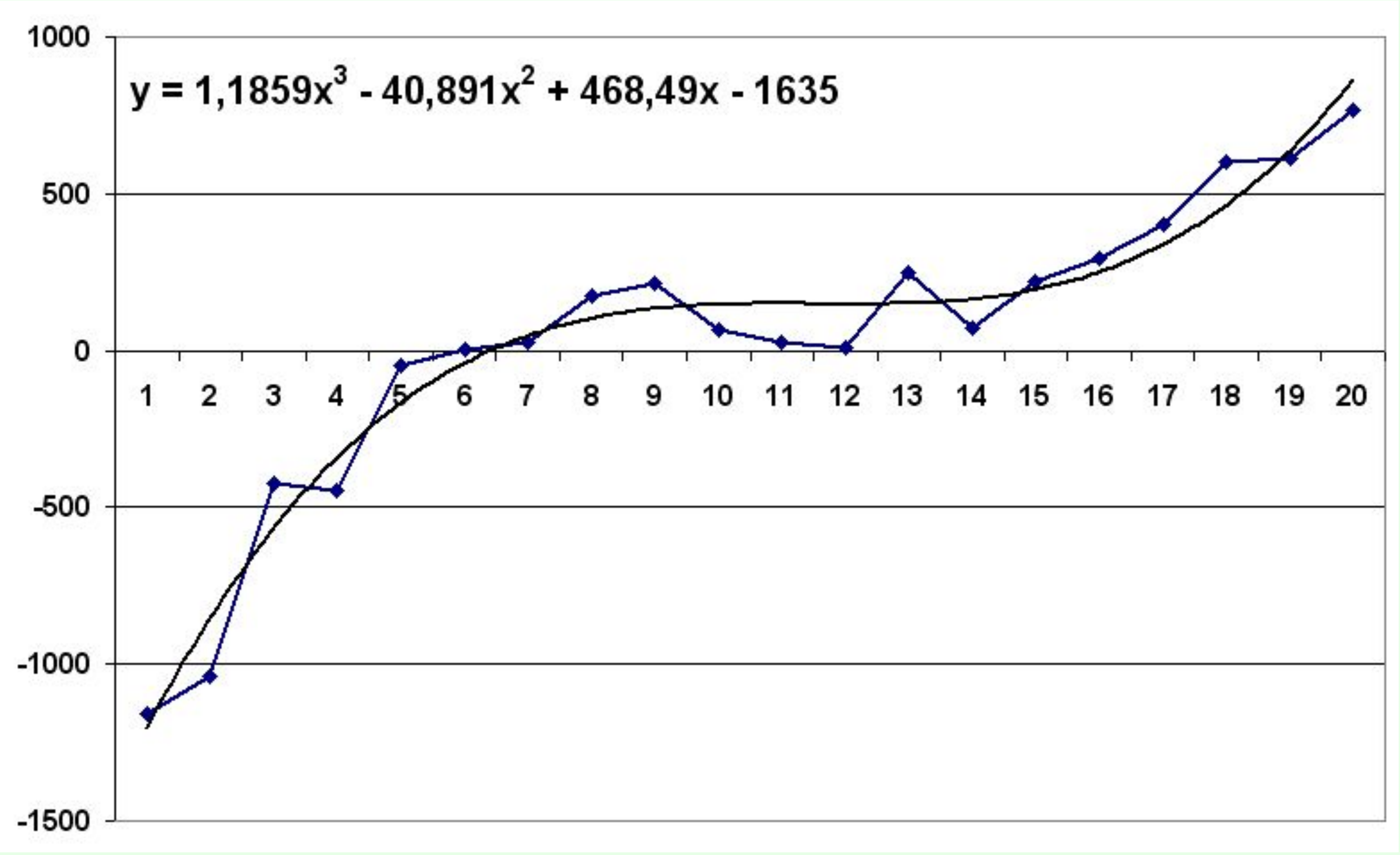
$$\hat{y} = a + \frac{b}{x}$$

3) Логарифмическая

$$\hat{y} = a + b \cdot \ln x$$

Регрессии, нелинейные относительно фактора

Полиномиальная



Регрессии, нелинейные относительно фактора

Применение полиномиальных моделей

Полиномом второй степени могут быть представлены зависимости:

-*Заработная плата физического труда от возраста*

-*Урожайность от количества внесенных удобрений*

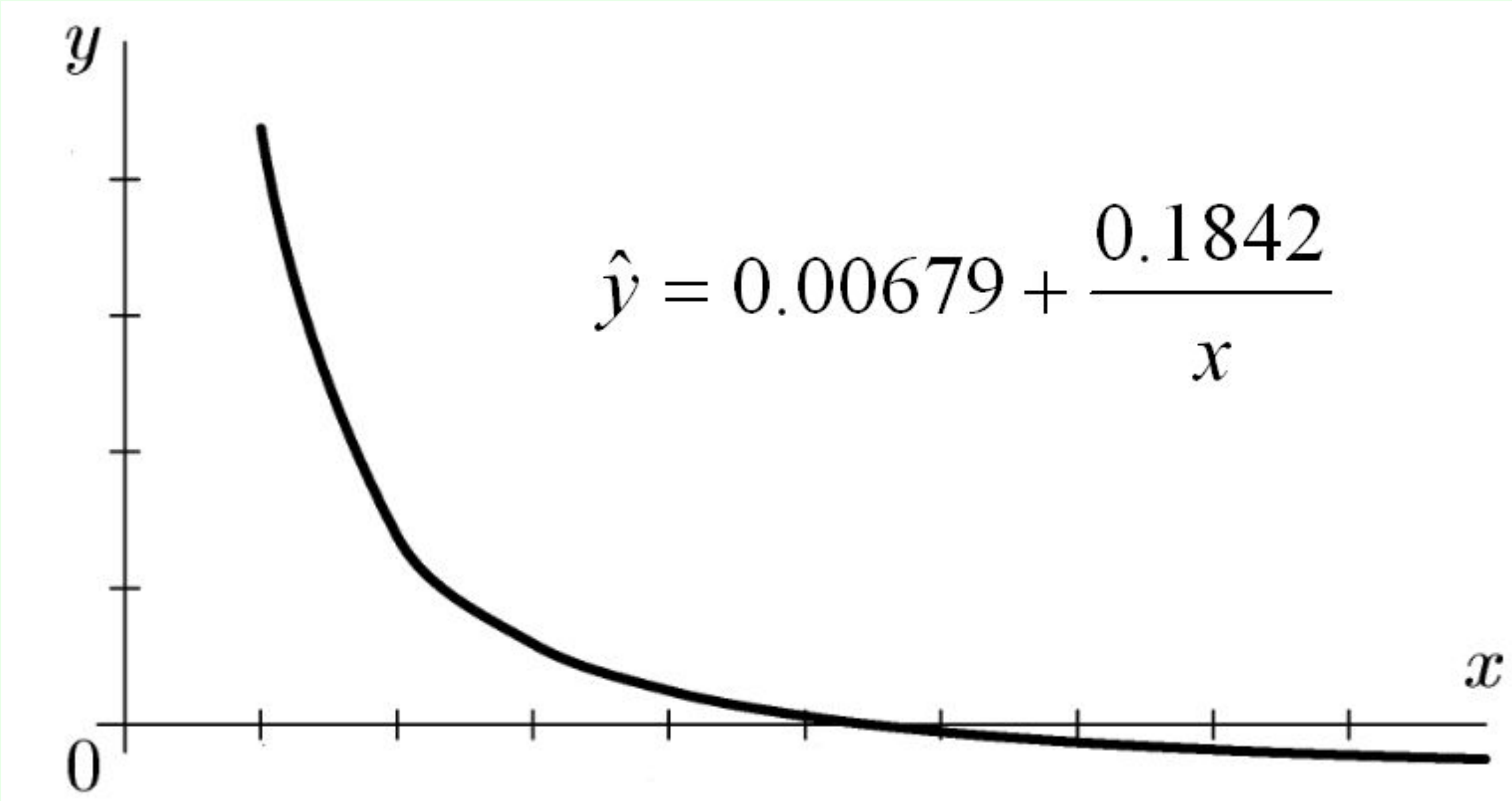
-*Прибыль от количества каналов, исполняющих заявки в системе массового обслуживания и т. д.*

Регрессии, нелинейные относительно фактора

Применение гиперболических моделей

Классический пример: ***кривая Филлипса*** *- графическое отображение* ***обратной зависимости*** *между уровнем инфляции и уровнем безработицы.*

Кривая Филлипса



X – общий уровень безработицы (в процентах)

Y – годовой темп прироста ставки заработной платы (в процентах)

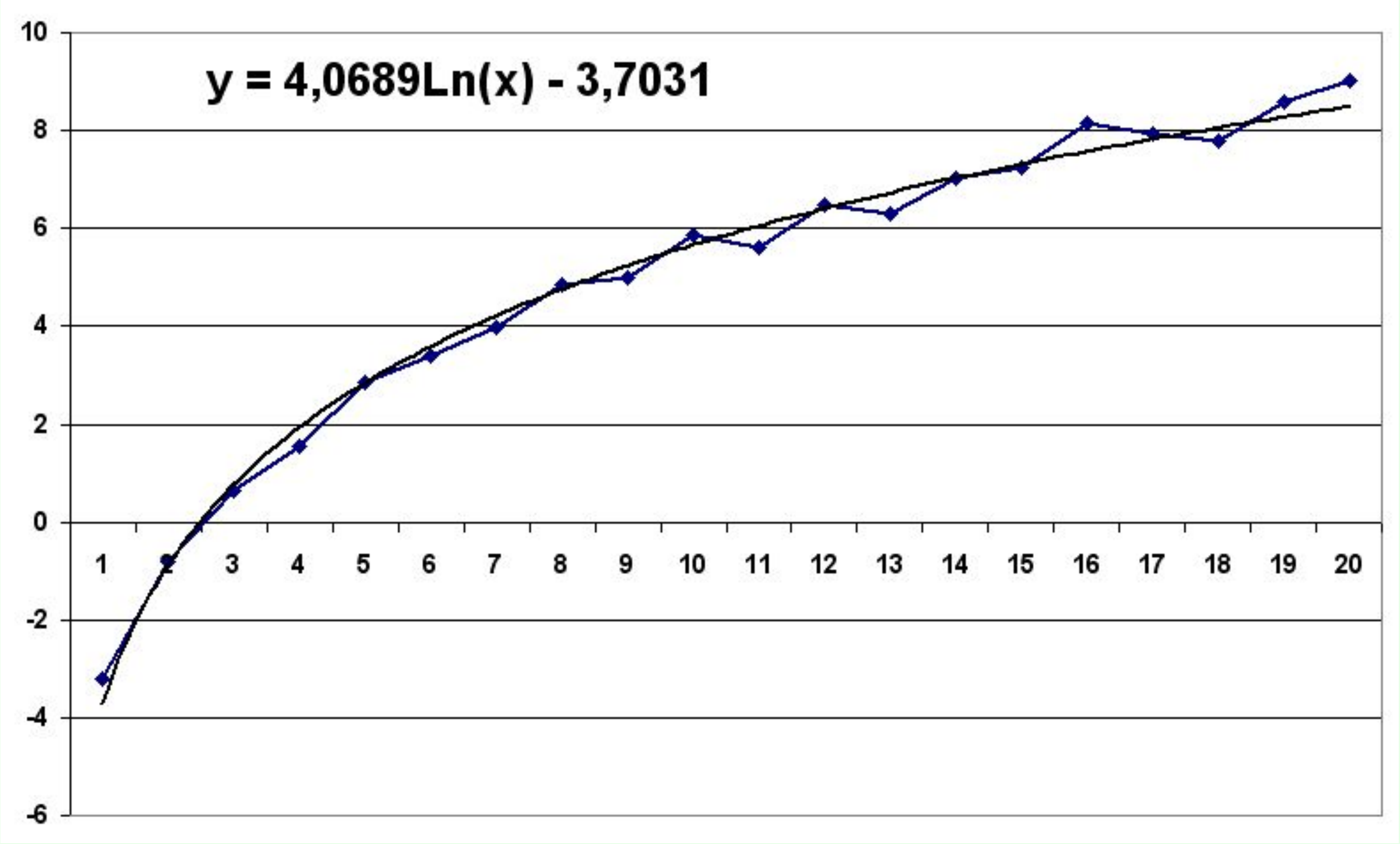
Кривая Филлипса

Олбан Уильям Филлипс (1914-1975) - австралийский экономист, работавший в Англии.

Кривую Филлипса получил в 1958 г. на основе эмпирических данных по Англии за 1861-1957 годы

Регрессии, нелинейные относительно фактора

Пример произвольной логарифмической модели



Регрессии, нелинейные относительно фактора

Применение логарифмических моделей

Может быть использована для описания доли расходов на товары длительного пользования (кривая Энгеля) в зависимости от общих сумм расходов

Эрнст Энгель (26.03.1821 - 08.12.1896) - немецкий экономист и статистик, занимал должность директора Прусского статистического бюро в Берлине

❖ **Регрессии, нелинейные относительно параметров**

1) $\hat{y} = a \cdot x^{b}$ – степенная

2) $\hat{y} = a \cdot b^{x}$ – показательная

3) $\hat{y} = e^{a+bx}$ – экспоненциальная

❖ **Регрессии, нелинейные относительно параметров**

$$1)\ \hat{y} = a \cdot x^{b} \ \text{– степенная}$$

В степенной функции регрессии показатель **b** является **коэффициентом эластичности***

- **Регрессии, нелинейные относительно параметров**

Степенная регрессия нашла большое использование в производственных функциях, в исследованиях спроса и потребления

Производственная функция валового внутреннего продукта США по данным 1960-1995 гг.

$$Y = 2.248 K^{0.404} L^{0.803}$$

Y – валовой внутренний продукт США

K – капитал

L - труд

2. Оценка параметров нелинейной модели относительно фактора

Полиномиальная, гиперболическая и логарифмическая модели **сводятся** к **линейной форме** заменой переменных

Затем используются известные соответствующие методы оценивания параметров и проверки гипотез

Полиномиальная модель

На практике используются полиномы не более третьего порядка

$$\hat{y} = a + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Введем новые переменные:

$$x_1 = x,\ \ x_2 = x^2,\ \ x_3 = x^3$$

Получили линейную модель множественной регрессии:

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

Гиперболическая модель

$$\hat{y} = a + \frac{b}{x}$$

Преобразование: $t = \frac{1}{x}$

Получили линейную модель : $\hat{y} = a + bt$

Применяя МНК, получаем формулы для расчета параметров модели:

$$a = \bar{y} - b \cdot \overline{1/x}$$

$$b = \frac{\overline{y/x} - \bar{y} \cdot \overline{1/x}}{\overline{1/x^2} - \overline{1/x}^2}$$

Логарифмическая модель $\hat{y} = a + b \cdot \ln x$

Преобразование: $t = \ln x$

Получили линейную модель : $\hat{y} = a + bt$

Применяя МНК, получаем формулы для расчета параметров модели:

$$a = \bar{y} - b \cdot \overline{\ln x}$$

$$b = \frac{\overline{y \cdot \ln x} - \bar{y} \cdot \overline{\ln x}}{\overline{\ln^2 x} - \overline{\ln x}^2}$$

3. Оценка параметров нелинейной модели по параметрам

Некоторые нелинейные модели по параметрам можно привести к линейному виду путем **линеаризации**

Примеры нелинейных моделей и их линеаризация

№	Модель	Линеаризация
1.	$\hat{y} = a \cdot b^{x}$	$\ln \hat{y} = \ln a + x \cdot \ln b$
2.	$\hat{y} = e^{a+bx}$	$\ln \hat{y} = a + bx$
3.	$\hat{y} = \dfrac{1}{a + bx}$	$\dfrac{1}{\hat{y}} = a + bx$
4.	$\hat{y} = a \cdot x^{b}$	$\ln \hat{y} = \ln a + b \cdot \ln x$

Оценка параметров линеаризованных моделей

МНК применяют к преобразованному линеаризованному уравнению

Пример: степенная регрессия $\hat{y} = a \cdot x^b$

Логарифмируем: $\ln \hat{y} = \ln a + b \cdot \ln x$

Цель: $\sum_i (\ln y_i - \ln \hat{y}_i)^2 = \sum_i (\ln y_i - \ln a - b \cdot \ln x_i)^2 \to \min$

Оценка параметров линеаризованных моделей

$$\sum_i (\ln y_i - \ln \hat{y}_i)^2 = \sum_i (\ln y_i - \ln a - b \cdot \ln x_i)^2 \to \min$$

Решение задачи минимизации сводится к решению системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} -2\sum_i (\ln y_i - \ln a - b \cdot \ln x_i) = 0 \\ -2\sum_i (\ln y_i - \ln a - b \cdot \ln x_i) \cdot \ln x_i = 0 \end{cases}$$

Оценка параметров линеаризованных моделей

Продолжение: преобразование системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} -2\sum_i (\ln y_i - \ln a - b \cdot \ln x_i) = 0 \\ -2\sum_i (\ln y_i - \ln a - b \cdot \ln x_i) \cdot \ln x_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln a + b \cdot \overline{\ln x} = \overline{\ln y} \\ \ln a \cdot \overline{\ln x} + b \cdot \overline{\ln^2 x} = \overline{\ln x \cdot \ln y} \end{cases}$$

Оценка параметров линеаризованных моделей

Продолжение: из системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} \ln a + b \cdot \overline{\ln x} = \overline{\ln y} \\ \ln a \cdot \overline{\ln x} + b \cdot \overline{\ln^2 x} = \overline{\ln x \cdot \ln y} \end{cases}$$

выражаем параметры с учетом замены

Готовые формулы

$$b = \frac{\overline{\ln x \cdot \ln y} - \overline{\ln x} \cdot \overline{\ln y}}{\overline{\ln^2 x} - \overline{\ln x}^2}$$

$$\ln a = \overline{\ln y} - b \cdot \overline{\ln x} = A, \; a = e^A$$

Упражнение 1. Доказать, что в степенной функции регрессии показатель **b** является **коэффициентом эластичности**

Решение:

Известно, что коэффициент эластичности для любой парной зависимости:

$$L = \frac{dY / Y}{dX / X} = \frac{dY / dX}{Y / X}$$

Тогда для степенной НПР:

$$Y = \alpha X^{\beta}$$

Эластичность:

$$\frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\alpha\beta\, X^{\beta-1}}{\alpha X^{\beta-1}} = \beta,$$

Упражнение 2. По совокупности 30 предприятий торговли изучается зависимость между признаками: х – цена на товар, тыс. руб.; у – прибыль торгового предприятия, млн. руб.

При оценке регрессионной модели были получены следующие промежуточные результаты:

$$\sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = 39000;$$

$$\sum\left(y_i - \bar{y}_i\right)^2 = 120000.$$

а) Какой показатель корреляции можно определить по этим данным? Рассчитайте его

б) Постройте таблицу дисперсионного анализа для расчета значения F-критерия Фишера

в) Сравните фактическое значение F-критерия с табличным. Сделайте выводы.

Таблица дисперсионного анализа

Источники вариации	Суммы квадратов отклонений	Число степеней свободы	Дисперсия на одну степень свободы
Общая	$TSS = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$	$n - 1$	**120000/29**
Регрессия	$RSS = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	1	**81000**
Остаточная	$ESS = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$	$n - 2$	**39000/28**

Для расчета коэффициента детерминации (вариацию):

$$F = \frac{S_R^2}{S_E^2} = \frac{RSS \cdot (n-2)}{ESS \cdot 1} = \frac{RSS \cdot (n-2)}{TSS - RSS} = \frac{R^2}{1-R^2}(n-2)$$

Литература:

1. Елисеева И.И. Практикум по эконометрике: Учебное пособие. - М.: Финансы и статистика, 2005 - 192 с.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 311 с.
3. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1005 с.
4. Эконометрика. Курс лекций. – Учебно-методическое пособие. Составители: Козинова А.Т., Отделкина А.А. – Н. Новгород, 2004. – 95 с.