1. Оценка точности функций

Косвенные измерения как функции $y = f(x_1, x_2, x_3 \ldots)$.

Основные задачи оценки точности функций:

- Оценка точности функций по погрешностям аргументов (однофункциональная прямая задача);

-Оценка точности вектор-функции по погрешностям аргументов (многофункциональная прямая задача);

-Предрасчет точности аргументов функции при заданном значении погрешности функции (однофункциональная задача проектирования);

-Предрасчет точности аргументов вектор-функции при заданном значении погрешностей (и связей) вектор-функции (многофункциональная задача проектирования).

1. Оценка точности функций

Определение математического ожидания функции

Для любой функции:

Количество:

$$MO\left(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right)\approx f\left(MO(x_1),MO(x_2),\ldots,MO(x_n)\right)$$

Качество:

Прямая задача теории погрешностей измерений.

Постановка задачи:

дана произвольная функция $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

с погрешностями аргументов σ_i.

Найти погрешность функции σ_y.

1. Оценка точности функций

Обозначения: $$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

В ряд Тейлора функцию если необходимо (1 порядок):

$$f(x_1, x_2, \ldots) \approx f(MO(x_1), MO(x_2), \ldots) + f_1 \cdot (x_1 - MO(x_1)) +$$
$$+ f_2 \cdot (x_2 - MO(x_2)) + \ldots = f(MO(x_1), MO(x_2), \ldots) + f_1 \cdot \sigma_1 + \ldots$$

Применим к ней свойства дисперсии

$$D(c) = 0 \qquad D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \cdot D(X_i)$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2 \cdot \operatorname{cov}(X, Y)$$

1. Оценка точности функций

Оценка меры рассеивания функции в виде дисперсии

$$\hat{D}_y = \hat{\sigma}_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot D(x_i) + 2 \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \cdot K_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 \cdot D(x_i) + 2 \sum_{i<j} f_i \cdot f_j \cdot K_{ij} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_n \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D(x_i) & \cdots & \operatorname{cov}(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_n, x_1) & \cdots & D(x_i) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = f \cdot K_x \cdot f^T$$

Уточнения, варианты.

1. Оценка точности функций

ПРИМЕРЫ:

Погрешность линейной функции общего вида:

$$f = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + \ldots + k_n \cdot x_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = k_i = f_i$$

$$m_f^2 = f \cdot K_x \cdot f^T =$$

$$= k_1^2 \cdot \sigma_1^2 + k_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \ldots + k_n^2 \cdot \sigma_n^2 + 2 \cdot \sum_{i<j} k_i \cdot k_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

Все погрешности одинаковы:

$$\sigma_f^2 = \left[k^2\right] \cdot \sigma^2 + \sigma^2 \cdot 2 \cdot \sum_{i<j} k_i \cdot k_j \cdot r_{ij} = \sigma^2 \cdot \left(\left[k^2\right] + 2 \cdot \sum_{i<j} k_i \cdot k_j \cdot r_{ij} \right)$$

1. Оценка точности функций

ПРИМЕРЫ:

Погрешность среднего из *n* измерений:

$$f = \bar{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{1}{n} \cdot x_1 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot x_n \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n} = f_i$$

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma_n^2 + 2\sum_{i<j} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} r_{ij} \sigma_i \sigma_j =$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\left[\sigma^2\right] + 2\sum_{i<j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j \right) = f K_x f^T$$

1. Оценка точности функций

Варианты: Результаты независимы:

$$\sigma_{\bar{x}}^{2} = \frac{1}{n^{2}} \cdot \left[\sigma^{2} \right]$$

Все погрешности одинаковы:

$$\sigma_{\bar{x}}^{2} = \frac{1}{n^{2}} \cdot n \cdot \sigma^{2} = \frac{\sigma^{2}}{n}$$

Все погрешности и корреляция одинаковы:

$$\sigma_{\bar{x}}^{2} = \frac{1}{n^{2}} \cdot \left[\sigma^{2} \right] \cdot (1 + 2r)$$

1. Оценка точности функций

Погрешность суммы углов в n – угольнике:

$$f = \beta_1 + \ldots + \beta_n$$

$$\sigma_f^2 = (1)^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + (1)^2 \cdot \sigma_n^2 + 2\sum_{i<j} 1 \cdot 1 \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j =$$

$$\left[\sigma^2\right] + 2\sum_{i<j} r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = fK_x f^T$$

Погрешности одинаковы:

$$\sigma_f^2 = n \cdot \sigma^2 + 2 \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij} = \sigma^2 \cdot \left(n + 2\sum_{i<j} r_{ij} \right)$$

не коррелированы: $\sigma_{f=\Sigma} = \sigma \cdot \sqrt{n}$

1. Оценка точности функций

Разнородные измерения (в функции углы и линии):

$$f = \Delta x = S \cdot \cos(\alpha)$$

Дисперсия функции

$$D_f = \sigma_f^2 = (cos(\alpha))^2 \cdot \sigma_S^2 + (S \cdot sin(\alpha))^2 \cdot \frac{\sigma_\alpha^2}{\rho^2}$$

Варианты:

$$\sigma_f^2 = (S \cdot cos(\alpha))^2 \cdot \frac{\sigma_S^2}{S^2} + (S \cdot sin(\alpha))^2 \cdot \frac{\sigma_\alpha^2}{\rho^2} =$$

$$= (\Delta x)^2 \cdot \frac{\sigma_S^2}{S^2} + (\Delta y)^2 \cdot \frac{\sigma_\alpha^2}{\rho^2}$$

:

1. Оценка точности функций

Оценка точности вектор – функции.

Описание двумя и более функциями - объединяются в *вектор-функцию* вида

$$Y = f(X) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Оценки: вектор оценок математических ожиданий

$$\hat{M}(Y) = \begin{cases} \hat{M}\left(f_1(x_1, \ldots, x_n)\right) \\ \vdots \\ \hat{M}\left(f_k(x_1, \ldots, x_n)\right) \end{cases}$$

1. Оценка точности функций

Качество- ковариационная матрица для вектор-функции

Расширение фундаментальной теоремы переноса погрешностей на k функций. Комбинации из ТВ и МС.

$$K_Y = F \cdot K_x \cdot F^T$$

Матрица *Якоби*

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$J = F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1} & \cdots & f_{kn} \end{bmatrix}$$

1. Оценка точности функций

Универсальный характер формулы из за малости погрешностей, т.е. оценка **линеаризованного** варианта вектор-функции общего вида.

Линейная функция:

$$Y = Ax + b$$

$$K_Y = M(Y \cdot Y^T) = M(Ax \cdot x^T A^T) = A\left(M(x \cdot x^T)\right)A^T = AK_x A^T$$

$$M(Y) = A \cdot M(x) + b$$

1. Оценка точности функций

Пример:

Пункт полярной засечкой с не безошибочными исходными.

$$Y = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 + S\cdot\cos(\alpha) \\ Y_0 + S\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби

$$F = \begin{array}{c|cc|cc} & X_0 & Y_0 & S & \alpha \\ \hline X_P & 1 & 0 & \cos(\alpha) & -S\cdot\sin(\alpha) \\ Y_P & 0 & 1 & \sin(\alpha) & +S\cdot\cos(\alpha) \\ & & F_1 & & F_2 \end{array}$$

1. Оценка точности функций

Ковариационная матрица для вектор-функции Y

$$F \cdot K_x \cdot F^T = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{исх.} & K_{исх.,x} \\ K_{x,исх.} & K_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F \\ F_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(\alpha) & -S \cdot \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & \sin(\alpha) & S \cdot \cos(\alpha) \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} K_{исх.} & K_{исх.,x} \\ K_{x,исх.} & K_x \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -S \cdot \sin(\alpha) & S \cdot \cos(\alpha) \end{array}\right]$$

Погрешности исходных данных:

$$K_{исх.} = \begin{bmatrix} m_x^2 & \operatorname{cov}(x,y) \\ \operatorname{cov}(y,x) & m_y^2 \end{bmatrix} \qquad K_{исх.} = \begin{bmatrix} m_x^2 & 0 \\ 0 & m_y^2 \end{bmatrix} \qquad K_{исх,x} = 0$$

1. Оценка точности функций

Окончательная ковариационная матрица для вектор-функции

$$K_{Y_{исх}} = \left[K_{x_{исх}} \quad F_2 \cdot K_{x_{исх}} \right] \cdot \begin{bmatrix} E \\ F_2^T \end{bmatrix} = K_{x_{исх}} + F_2 \cdot K_{x_{исх}} \cdot F_2^T = K_{Y_{исх}} + K_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} m_{x_0}^2 & 0 \\ 0 & m_{y_0}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -S \cdot \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & S \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_s^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{m_\alpha^2}{\rho^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -S \cdot \sin(\alpha) & S \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D_x & \operatorname{cov}(x,y) \\ \operatorname{cov}(x,y) & D_y \end{bmatrix}$$

Круговая погрешность **Гельмерта** (оценка пункта)

$$\sigma_P = \sqrt{e \cdot K_Y \cdot e^T} \qquad \sigma_P = \sqrt{e \cdot K_Y \cdot e^T} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{Tr(K_Y)}$$