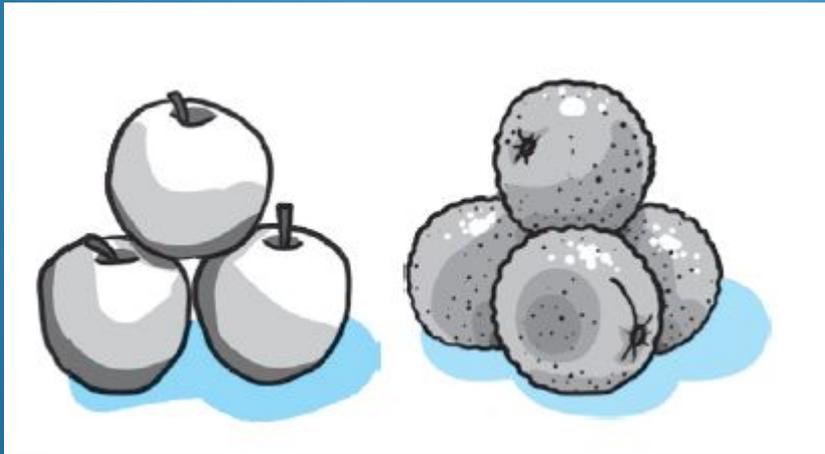


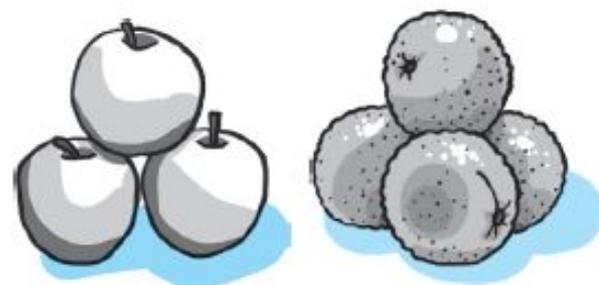
Комбинаторика для детей

и взрослых



Комбинаторными называются задачи на определение числа возможных конечных множеств или кортежей (упорядоченных множеств) с определенными свойствами, которые можно составить из элементов данных множеств.

- 811.** На столе лежат 3 яблока и 4 апельсина. Сколько вариантов выбрать один фрукт?



Одно яблоко можно выбрать тремя способами и четыре способа выбрать один апельсин, значит всего $3 + 4 = 7$ способов.



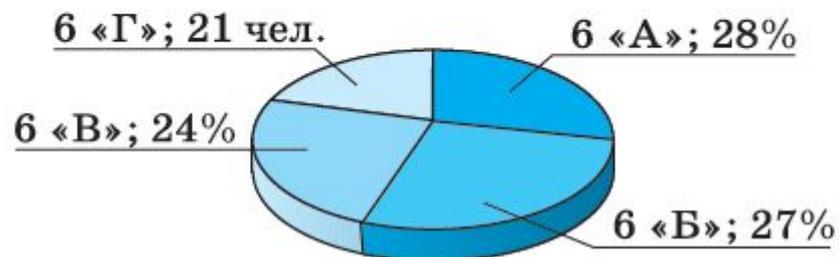
Правило суммы. Если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b можно выбрать m способами, то выбрать a или b можно $n + m$ способами.



Правило суммы позволяет найти число элементов в объединении двух конечных непересекающихся множеств.

812. В коробке цветные и простые карандаши. Сколькими способами можно выбрать один карандаш, если простых карандашей всего два, что составляет 8% от всех карандашей?

813. В школе четыре шестых класса. Информацию о численности классов найди на диаграмме. Сколько вариантов выбора одного шестиклассника для съемки в ролике о школе?



Самостоятельная работа

I вариант

815. Саша коллекционирует монеты. Монет советского периода у него на 12 больше, чем юбилейных российских монет, а дореволюционных монет в 27 раз меньше, чем юбилейных и советских. Сколько вариантов у Саши выбрать одну монету из своей коллекции для выставки, если советских монет 60?

II вариант

814. У Олега в 3,5 раза больше фотографий с моря, чем из деревни. Фотографии из поездки по Золотому кольцу составляют 20% от фотографий с моря и деревни. Сколько у Олега вариантов выбрать одну фотографию для школьной стенгазеты «Как я провел лето», если фотографий из деревни на одну больше, чем из поездки по Золотому кольцу?

816. У Леры 7 платьев и три пары туфель. Сколько различных комплектов она может из них составить?



Сравни свои рассуждения с размышлениями Маши и Миши.



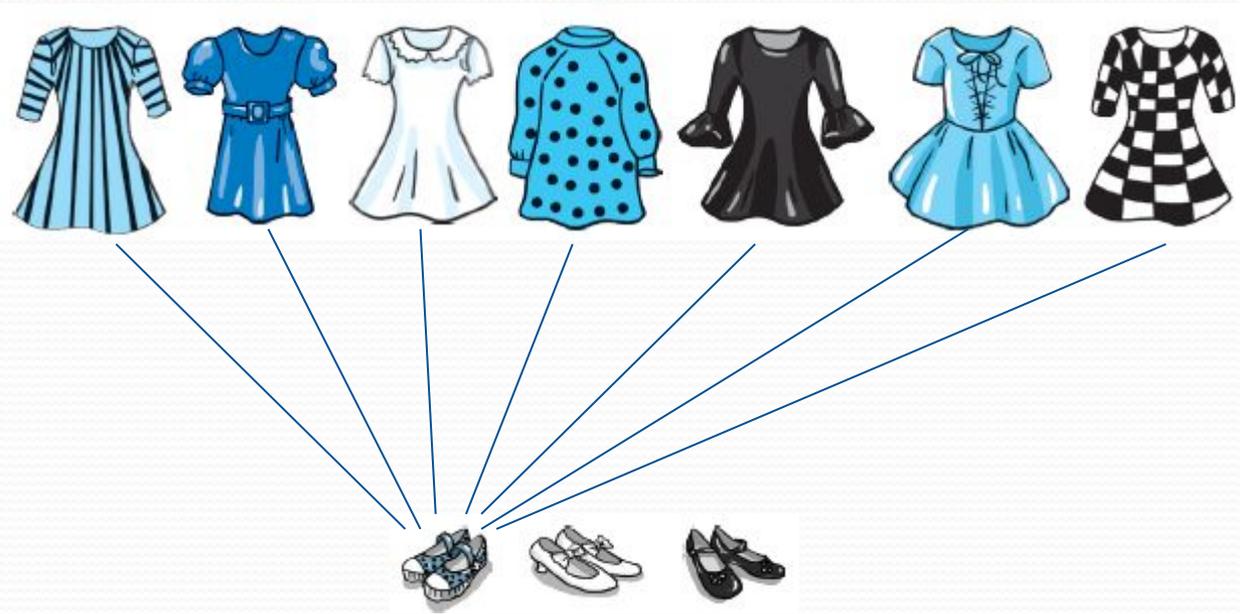
Белые туфли подходят к каждому платью. Это 7 вариантов. И черные туфли с каждым платьем составляют 7 вариантов. Туфли в горошек с каждым платьем дают еще 7 вариантов.

Всего $7 + 7 + 7 = 7 \cdot 3 = 21$



А я составлю таблицу. Каждая клетка — это новый вариант.

Всего $3 \cdot 7 = 21$ вариант



Платья	Платья						
	Синее	Белое	Черное	Голубое	В полоску	В горошек	В клетку
Туфли							
Белые	+	+	+	+	+	+	+
Черные	+	+	+	+	+	+	+
В горошек	+	+	+	+	+	+	+



Правило произведения. Если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b можно выбрать m способами, то выбрать пару a и b можно $n \cdot m$ способами.



Правило произведения позволяет найти число элементов в декартовом произведении двух множеств

817. В классе 10 девочек и 12 мальчиков. Сколько вариантов выбрать мальчика и девочку для вручения цветов ветеранам?

- А сколько вариантов выбора двух девочек и одного мальчика?

818. Сколько можно составить двузначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, в которых цифры могут повторяться?

- Запиши все составленные числа в порядке возрастания.

819. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1 и 2? А двузначных? Трёхзначных? Однозначных?

- Найди в таблице ответы на вопросы.

Числа	Однозначные	Двузначные	Трёхзначные	Четырёхзначные	
Варианты чисел	1 2	11 21 12 22	111 211 112 212 121 221 122 222	1111 2111 1112 2112 1121 2121 1122 2122 1211 2211 1212 2212 1221 2221 1222 2222	
	Количество вариантов	2	4	8	16

- Сравни числа в первом и втором столбце. Чем они похожи? Чем отличаются?
- Сравни составленные двузначные, трёхзначные и четырёхзначные числа, их количество. Найди закономерность.
- Как ты думаешь, сколько можно составить пятизначных чисел из цифр 1 и 2? Проверь своё предположение, записав все числа в порядке возрастания.
- Рассмотрю последнюю строку таблицы. Как можно записать количество вариантов в виде степени?

820. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2 и 3? Рассмотрю таблицу, найди закономерность и используй её для ответа на вопрос.

Числа	Однозначные	Двузначные	Трёхзначные
Варианты чисел	1 2 3	11 12 13 21 22 23 31 32 33	111 112 113 121 122 123 131 132 133 211 212 213 221 222 223 231 232 233 311 312 313 321 322 323 331 332 333
Количество вариантов	3^1	3^2	3^3

Сравни свой ответ с рассуждениями Миши.



Первая цифра четырёхзначного числа может быть любой: 1, 2 или 3. Всего три варианта. И вторая – любой из них. Тоже три варианта. Для третьей и четвёртой цифр тоже по 3 варианта. Всего $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ вариант.

Размещение с повторениями из k элементов по m элементов – это кортеж, составленный из m элементов k -элементного множества.

Число всевозможных размещений с повторениями из k элементов по m элементов находят по формуле:

$$\tilde{A}_k^m = k^m$$

Например, если требуется составить из цифр 1, 2 и 3 всевозможные двузначные числа, то есть размещения с повторениями из трехэлементного множества двухэлементных кортежей, то это будет $3^2=9$. {11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33}

Самостоятельная работа

I вариант

829. Сколько двузначных чисел, кратных трём, можно составить из цифр 1, 2, 4, 5 и 6? Запиши все варианты таких чисел в порядке возрастания.

II вариант

823. Сколько пятизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 3, 5 и 7?

824. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «наука»?

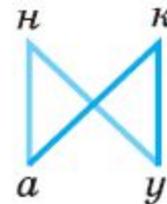
Сравни свой ответ с рассуждениями Маши и Миши.



В слове «наука» три гласные и две согласные буквы. Всего $3 \cdot 2 = 6$ вариантов выбрать гласную и согласную буквы.



В слове «наука» две гласных буквы «а», поэтому варианты выбора с первой буквой «а» и второй будут одинаковыми. Можно составить только четыре различных варианта: на, ну, ка, ку.



С кем из ребят ты согласен?

826. Сколько четных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5 и 0?

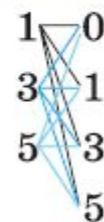
Сравни свои рассуждения с решением Маши.



Первая цифра трёхзначного числа не может быть 0, остается 3 варианта (1, 3 или 5). Вторая цифра может быть любой из предложенных (это 4 варианта), а последняя – только 0, так как число должно быть чётным.

Получаем $3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$ вариантов.

- Запиши все варианты трёхзначных чисел в порядке убывания.



Размещение без повторений из k элементов по m элементов – это кортеж, составленный из m неповторяющихся элементов k -элементного множества.

Число всевозможных размещений без повторений из k элементов по m элементов находят по формуле:

$$A_k^m = k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot (k - m + 1)$$

Например, если требуется составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 всевозможные трехзначные числа, в которых все цифры разные, т. е. размещения из 5 элементов по 3 без повторений, то это будет $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

832. В корзине лежат 10 яблок и 13 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин, после чего Надя берёт и яблоко, и апельсин.

- В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня возьмёт яблоко или если он возьмёт апельсин?



Если Ваня возьмёт яблоко, то останется 9 яблок и 13 апельсинов. Значит, у Нади $9 \cdot 13 = 117$ вариантов выбрать яблоко и апельсин.

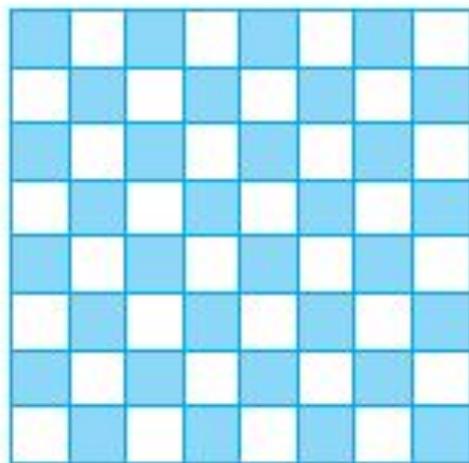
Продолжи рассуждения Миши.



Если Ваня возьмёт апельсин, то останется 12 апельсинов и 10 яблок.
Значит, у Нади вариантов выбрать яблоко и апельсин будет $12 \cdot 10 = 120$.

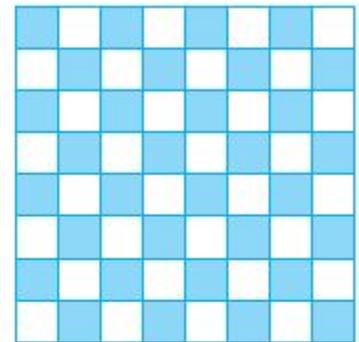
В каком случае Надя имеет большую свободу выбора?

833. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты?



835. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

У шахматной доски всего 64 клетки. Из них 32 белых и 32 черных. Пусть первой выберем чёрную клетку. Можно выбрать любую, значит, всего вариантов выбора 32. Затем выберем белую клетку. Так как чёрная уже выбрана, то нельзя брать белую клетку из того же ряда по вертикали и по горизонтали, что и чёрная. В каждом горизонтальном и вертикальном ряду по 4 белых клетки. Значит, это количество вариантов отпадает, остается 24 вариантов выбрать белую клетку. Чтобы найти общее количество выбора надо $32 \cdot 24 = 768$.



- Каким правилом воспользуешься для нахождения общего количества вариантов: правилом суммы или правилом произведения?

837. На собрании должны выступить 5 человек. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов?

Сравни свои рассуждения с решением Маши.



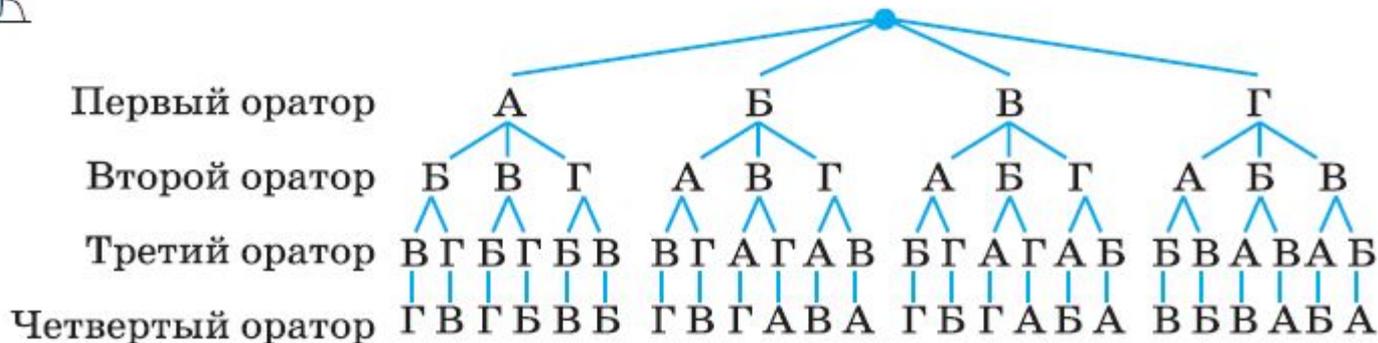
Первым оратором может быть любой. Это 5 вариантов. Для выбора второго оратора остается четыре кандидатуры. Третьего оратора можно выбрать тремя способами, а четвертого только двумя. Пятый оратор будет оставшийся. Это один вариант. Всего вариантов $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

- Найди все варианты расположения 4 человек в списке выступающих, рассуждая как Маша, и проверь свой ответ, записав все варианты.

Сравни свой ответ с решением Миши.



Предлагаю записать все комбинации в виде дерева вариантов. Обозначим ораторов буквами А, Б, В и Г.



- Реши аналогичную задачу для 3 ораторов и проверь правильность решения, нарисовав дерево вариантов.
- Сколькими способами можно расположить двух ораторов в списке выступающих?
- Рассмотрим таблицу и найди закономерность.

Количество ораторов	1	2	3	4	5	6
Количество вариантов расположения ораторов в списке выступающих	1	$2 \cdot 1 = 2$ или $1 \cdot 2 = 2$	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3$ или $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ или $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ или $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$?

- Пользуясь закономерностью, найди количество вариантов расположения шести ораторов в списке выступающих.

Размещения из k элементов по k элементов называют перестановками из k элементов без повторений.

Число перестановок без повторений подсчитывают по формуле $P_k = k!$, где $k!$ читают « k факториал».

Факториалом числа k называется произведение всех натуральных последовательных чисел от 1 до k . Факториал находится по формуле $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$.

Например, если в задаче спрашивается: сколько различных флагов можно составить из трех горизонтальных полос одинаковой ширины белого, синего и красного цвета, то это будет задача на нахождение числа перестановок из 3 элементов $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.



838. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный соседние квадраты?

● Реши задачу, ответив на следующие вопросы:

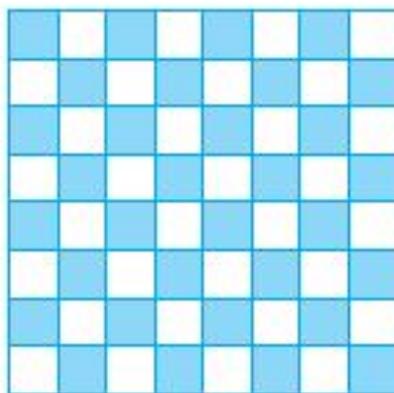
а) сколько вариантов выбрать соседние белый и чёрный квадраты в одном вертикальном ряду?

б) сколько вертикальных рядов на шахматной доске?

в) сколько вариантов выбрать на шахматной доске два соседних квадрата так, чтобы один был над другим?

● Ответь на такие же вопросы, но про горизонтальные ряды.

● Каким правилом воспользуешься для нахождения общего количества вариантов: правилом суммы или правилом произведения?



Самостоятельная работа

I вариант

841. Сколькими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, если на каждый палец надеть по одному кольцу?

II вариант

840. Сколько различных семизначных чисел можно получить, переставляя цифры в числе 1362845?

842. У Жени шесть разных моделей машин, две из них он решил подарить младшему брату. Сколько у Жени вариантов выбрать две машинки?

Сравни свои рассуждения с размышлениями Маши и Миши.



Всего 6 машинок. Первую машинку для подарка можно выбрать 6 способами, а вторую — 5. Всего $6 \cdot 5 = 30$ вариантов.



Я не согласен. Среди твоих вариантов есть повторяющиеся. Каждый вариант рассматривается дважды: первая и вторая машинки — то же самое что вторая и первая машинки, и т.д.

- Рассмотрю таблицу и найду одинаковые варианты.

Машинки	1	2	3	4	5	6
1		1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1		2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2		3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3		4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4		5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	

- Почему клетки по диагонали закрашены?
- Сколько всего различных вариантов выбрать две машинки из шести? А три? Четыре? Пять? Шесть?

 Проверь себя, сверив свои ответы с табличными данными.

Количество машинок, которое Женя решил подарить брату	Ни одной	Одну	Две	Три	Четыре	Пять	Шесть
Количество вариантов выбрать эти машинки	1	6	15	20	15	6	1

- Для какого числа машинок количество вариантов выбора одинаковое? Почему?
- Продолжи рассуждения: выбрать две машинки для подарка — то же самое, что решить, какие _____ моделей оставить себе.
- Реши эту же задачу, если у Жени было пять разных моделей машин, а ответ оформи в виде обобщающей таблицы.

Количество машинок, которое Женя решил подарить брату	Ни одной	Одну	Две	Три	Четыре	Пять
Количество вариантов выбрать эти машинки						

Самостоятельная работа

I вариант

843. Из спортивной команды, состоящей из 7 мальчиков и 4 девочек, надо выбрать 6 человек для соревнований так, чтобы среди них было не менее 2 девочек. Сколькими способами это можно сделать?

II вариант

844. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть по движению, а трое — против движения, остальным безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

846. В магазине 7 различных новогодних открыток. Оле надо купить пять открыток. Сколько у Оли вариантов сделать свой выбор?

Сравни свои рассуждения с размышлениями Маши и Миши.



Всего 7 открыток. Первую можно выбрать 7 способами, а вторую — 6, третью — 5, четвертую — 4, пятую — 3 способами. Всего $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ вариантов. Но надо учитывать, что среди этих вариантов есть одинаковые. Поэтому нужно узнать, сколько вариантов перестановок среди пяти выбранных открыток. Это $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Тогда ответ будет $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21$.



Проще найти, сколько у Оли вариантов выбрать две открытки из семи, которые она покупать не будет. Это $\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$.

- Реши эту задачу, если Оле надо купить три (четыре, шесть, семь, одну, ни одной) открытки и оформи решение в виде таблицы.

Количество открыток	Ни одной	Одну	Две	Три	Четыре	Пять	Шесть	Семь
Количество вариантов выбора			21			21		
Как посчитать			$\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$			$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$		



Проверь свои ответы, записав все варианты выбора.

Сочетания без повторений из k элементов по m элементов – это m - элементное подмножество множества, содержащего k элементов.

Два сочетания из k элементов по m элементов отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число всевозможных сочетаний без повторений из k элементов по m элементов находят по формуле

$$C_k^m = \frac{A_k^m}{m!} = \frac{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-m+1)}{m!} = \frac{k!}{(m-k)! \cdot m!}$$

Домашняя работа

- 827.** Сколько двузначных простых чисел можно составить из цифр числа 207316? Запиши все варианты в порядке возрастания.
Если возникнут трудности, обратись к таблице простых чисел.
- 828.** Сколько чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 5, 6 и 7, если каждую цифру можно использовать не более одного раза? Запиши все варианты таких чисел в порядке возрастания.
- 831.** У Дениса есть 7 книг по математике, а у Бориса — 9 книг по истории. Сколькими способами они могут обменять книгу Дениса на книгу Бориса?
- 847.** Сколько ожерелий можно составить из пяти одинаковых бусинок и двух большего размера? Нарисуй все возможные варианты.
- 848.** Сколькими способами можно расставить 7 книг на двух полках, если каждая полка может вместить все 7 книг?
- 849.** Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?
- 850.** Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может встречаться в записи числа несколько раз?

Размещения с повторением из 5 по 2 = $5 \cdot 5 = 25$

Размещения без повторения из 5 по 2 = $5 \cdot 4 = 20$

Перестановки из 5 = $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Сочетания из 5 по 2 = $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$





