Математика
Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 2

Векторные функции скалярного аргумента

1. Векторная функция скалярного аргумента.

2. Предел и непрерывность вектор-функции.

3. Производная вектор-функции.

1. Векторная функция скалярного аргумента.

Если каждому значению $t \in D$ (множество чисел) поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(t) \in R^3$, то говорят, что на множестве D задана ***векторная функция*** $\vec{r}(t)$.

Под $\vec{r}(t)$ можно понимать свободные векторы или радиус-векторы с закрепленным концом.

Задание векторной функции равносильно заданию трёх скалярных функций $x(t),\ y(t),\ z(t)$ - координат вектора $\vec{r}(t)$.

Обозначения.

(1) $$\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right);$$

(2) $$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k};$$

(3) $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

(1), (2) - ***векторная форма*** записи $\vec{r}(t)$.

(3) - ***координатная форма*** записи

При изменении параметра ***t*** ,конец вектора $\vec{r}(t)$ описывает линию, называемую ***годографом*** векторной функции $\vec{r}(t)$.

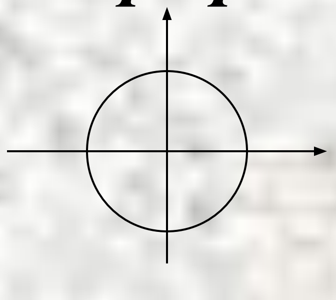
Годограф векторной функции $\vec{r}(t)$ - геометрическое место точек ***М*** конца вектора $\vec{r}(t)$, т.е. ***траектория движения точки М.***

Пример.

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}.$$

Годограф - окружность

$$L: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$



Рассмотрим координатную форму $\vec{r}(t)$:

$$(3)\qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Уравнения (3) являются параметрическими уравнениями некоторой линии в пространстве.

Таким образом, любую линию в пространстве, заданную параметрическими уравнениями (3), можно рассматривать как годограф векторной функции .

Примеры.

1. ***Окружность*** - годограф векторной функции

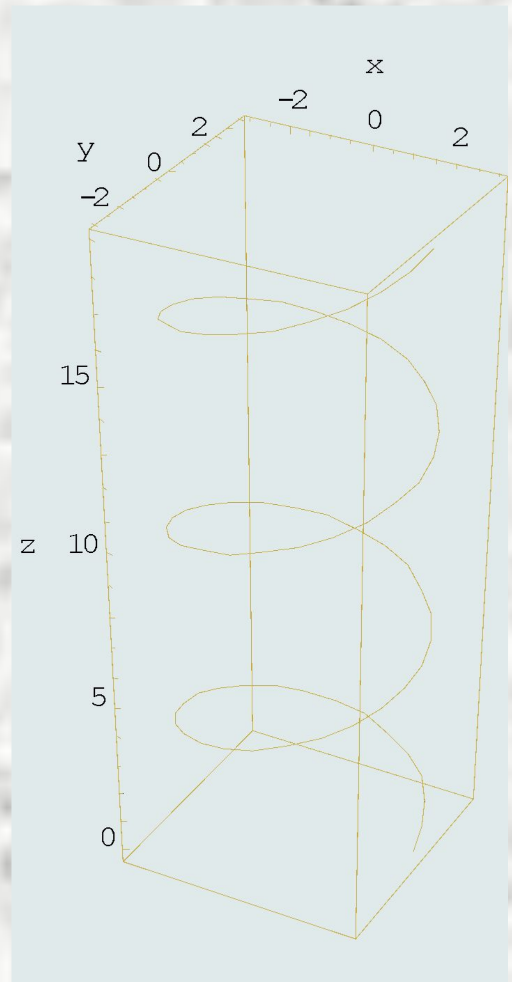
$$\vec{r}(t) = \left(a\cos t, a\sin t\right).$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} -$$ параметрические уравнения годографа.

$$x^2 + y^2 = a^2$$ - уравнение годографа в декартовых координатах.

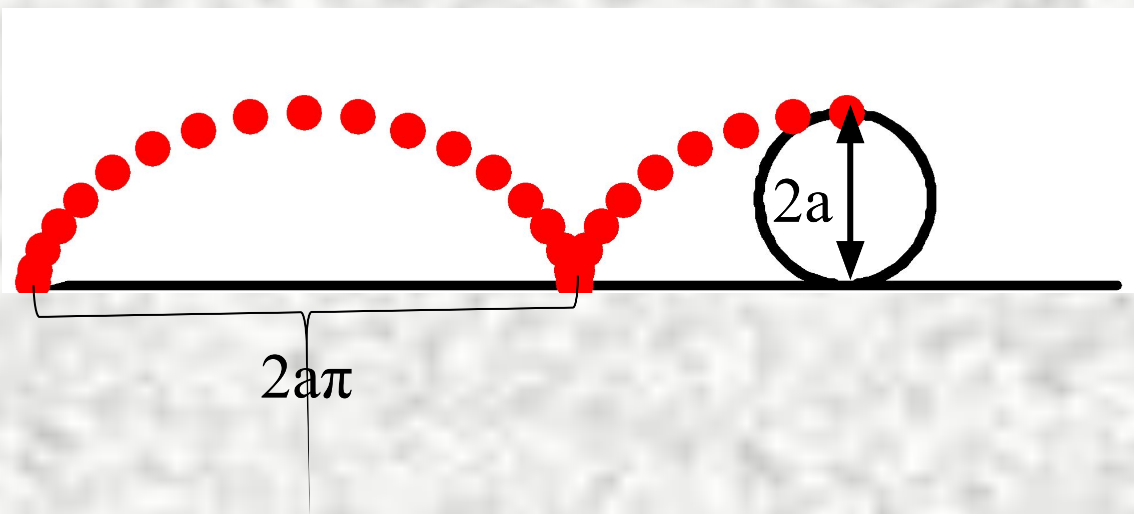
2. ***Винтовая линия*** - годограф радиус-вектора точки, движущейся по окружности в плоскости, параллельной OXY, и с постоянной скоростью в направлении оси OZ.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$



3. ***Циклоида*** - траектория точки окружности, которая без скольжения катится вдоль оси ОХ.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



2. Предел и непрерывность вектор-функции.

Пусть $\vec{r}(t)$ определена в некоторой окрестности точки t_0, за исключением быть может самой точки t_0

Вектор $\vec{a}$ называется ***пределом*** вектор-функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

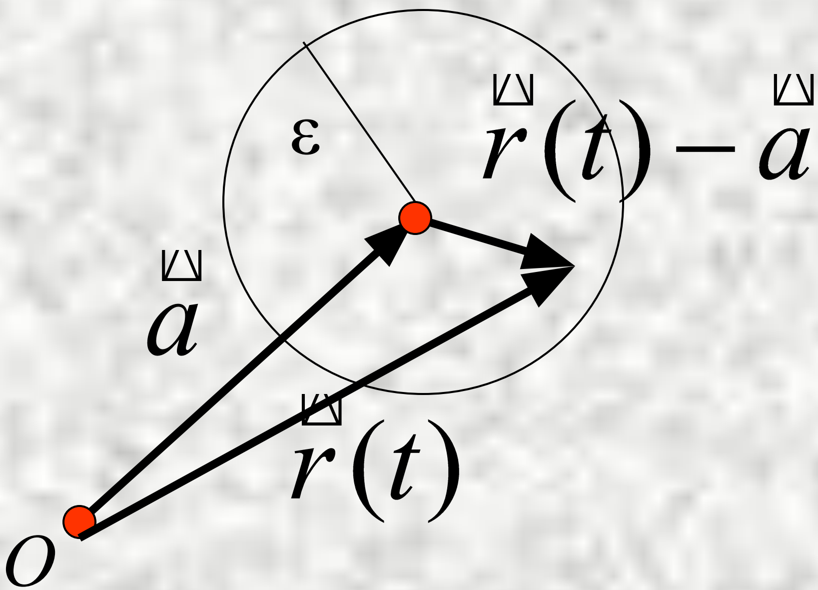
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon):$$

$$|t - t_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$$

Обозначение.

$$\boxed{\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}}$$

<u>Геометрический смысл</u>



$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \left| \vec{r}(t) - \vec{a} \right| = 0}$$

(см. чертеж)

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t) \right)$$

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} x(t) = a_x, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_y, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_z}$$

Свойства пределов вектор-функции.

1. $$\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right]=\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t);$$

2. $$\lim_{t\to t_0} f(t)\cdot\vec{r}(t)=\lim_{t\to t_0} f(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t);$$

3. $$\lim_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t),\vec{r}_2(t)\right)=\left(\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t),\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right);$$

4. $$\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right]=\left[\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\times\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right];$$

Вектор-функция $\vec{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки t_0, называется ***непрерывной*** в точке t_0, если:

$$1)\exists\,\vec{r}(t_0),\quad 2)\exists \lim_{t\to t_0}\vec{r}(t),\quad 3)\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0).$$

3. Производная вектор-функции.

Производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Обозначение: $\vec r\,'(t_0) \equiv \dot{\vec r}(t_0)$

Таким образом

$$\boxed{\dot{\vec r}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec r(t_0 + \Delta t) - \vec r(t_0)}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\dot{\vec r}(t_0) = \left(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\right)}$$

Рассмотрим

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

$$\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t_0) + \vec{\alpha}, \textit{б} \quad \textit{м} \; |\vec{\alpha}| - \quad /$$

$$\Delta \vec{r}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0) \cdot \Delta t + \vec{\alpha} \cdot \Delta t$$

$$\boxed{\Delta \vec{r}(t_0) = d\,\vec{r}(t_0) + \vec{\alpha} \cdot \Delta t}$$

Дифференциалом вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0

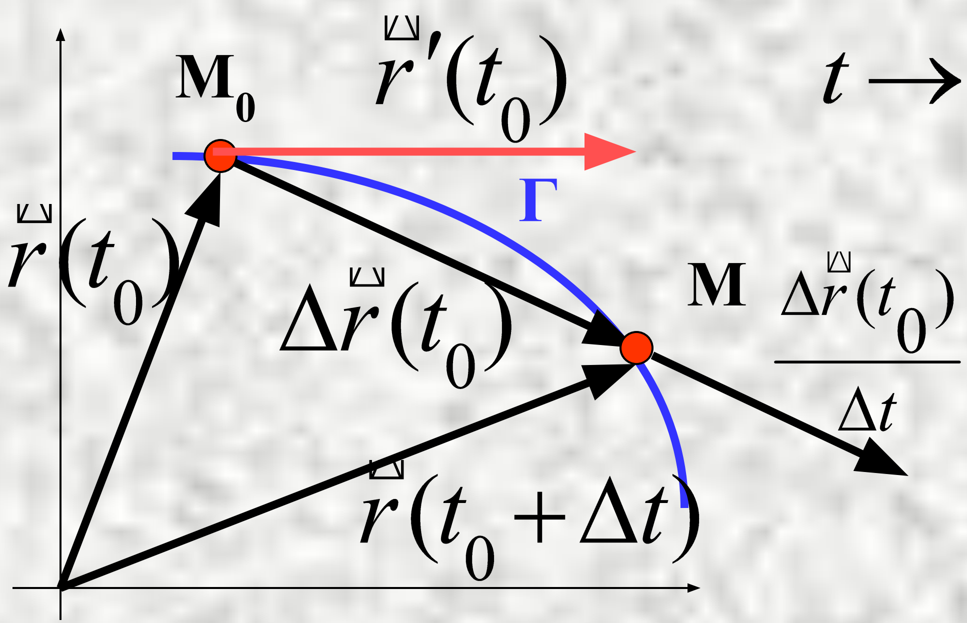
называется главная (линейная) часть её приращения

$$\boxed{d\vec{r}(t_0) = \dot{\vec{r}}(t_0) \cdot \Delta t}$$

Геометрический и механический смысл производной вектор-функции.

Рассмотрим $\vec{r}(t)=\big(x(t),y(t)\big).$

Пусть **Г** - годограф $\vec{r}(t).$



$$t\to t_0\Rightarrow M\to M_0\to$$

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}\to\vec{r}'(t_0)$$

- Вектор $\vec{r}'(t_0)$ ***направлен по касательной*** к годографу вектор-функции в точке M_0 в сторону возрастания параметра t.

- Если t - время, то $\vec{r}'(t_0)$ - ***вектор скорости точки***, двигающейся по годографу в момент t_0.

Пример.

Найти скорость тела, движущегося по закону

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \qquad \vec{S}(t) = \left(v_0 t, \dfrac{gt^2}{2} \right)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{S}'(t) = (v_0, gt)$$

Вектор скорости имеет две составляющие:

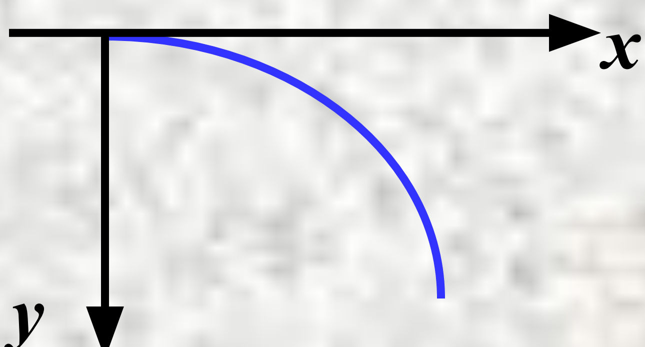
горизонтальную v_0 и вертикальную gt.

Траектория движения тела - годограф $\vec{S}(t)$.

После исключения параметра

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{g}{2v_0^2}x^2}$$

- парабола



Свойства операции дифференцирования вектор-функции.

1. $\left(\vec{a}(t)+\vec{b}(t)\right)' = \vec{a}'(t)+\vec{b}'(t);$

2. $\left(\alpha\cdot\vec{a}(t)\right)' = \alpha\cdot\vec{a}'(t);$

3. $\vec{a}'(t)=0; \vec{a}(t)-const;$

4. $\left(\varphi(t)\cdot\vec{a}(t)\right)' = \varphi'(t)\cdot\vec{a}(t)+\varphi(t)\cdot\vec{a}'(t);$

5. $\left(\vec{a}(t),\vec{b}(t)\right)' = \left(\vec{a}'(t),\vec{b}(t)\right) + \left(\vec{a}(t),\vec{b}'(t)\right);$

6. $\left[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right]' = \left[\vec{a}'(t)\times\vec{b}(t)\right] + \left[\vec{a}(t)\times\vec{b}'(t)\right];$

7. $\vec{a}'\left(\varphi(t)\right) = \vec{a}'_{\varphi}\cdot\varphi'(t);$