Отношения и отображения

Отношения

- **Определение**. Пусть X и Y - два произвольных множества.

  Если какому-либо элементу $x \in X$ по некоторому правилу сопоставляется элемент $y \in Y$ (один или более), то говорят, что между элементами множеств X и Y установлено отношение (соответствие).

- Не исключено, что X=Y, тогда говорят, что отношение установлено между элементами множества X.
- Отношения могут обозначаться символами: R, P, f (специальные элементы ~, =, >, ≤ и т.д.).

- xRy, x∈X, y∈Y - *x* и *y* находятся в отношении *R*.
- xRy, x∈X, y∈Y - *x* и *y* не находятся в отношении *R*.

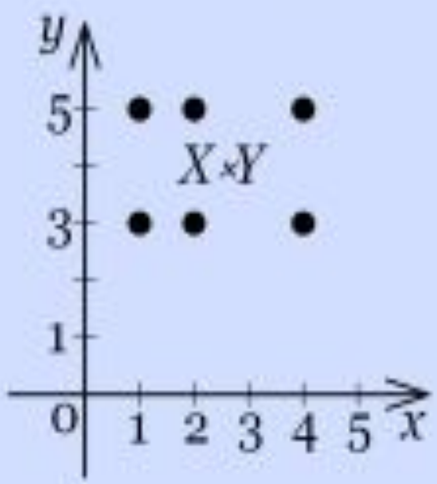
Пример. $X = Y = N$, R - отношение делимости: $12\ R\ 6$, $15\ \overline{R}\ 7$.

- Рассмотрим отношение R между множествами X и Y.
- Графиком отношения R называется множество $\Gamma=\{(x,y)\,|\,x\in X,\ y\in Y,\ xRy\}\supseteq X\times Y$.
- **Определение.** Декартовым произведением множеств X и Y называется множество всевозможных упорядоченных пар, первая компонента которых является элементом множества X, вторая - множества Y.

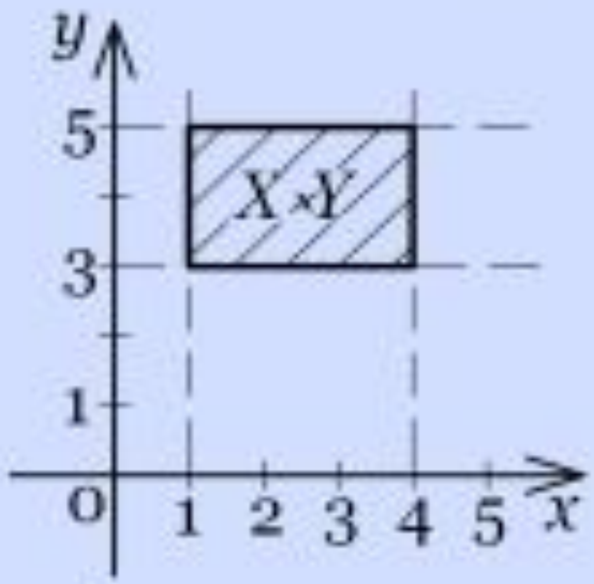
Пример.

$$a)\; X = \{1, 2, 4\}, Y = \{3, 5\}.$$

$$X \times Y = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (4,3), (4,5)\}.$$



б) $X = [1, 4], Y = [3, 5]$.



- Всякое отношение имеет график - некоторое подмножество декартового произведения X и Y, и наоборот, всякое подмножество $R \subset X \times Y$ задаёт некоторое отношение xRy. В связи с этим получаем следующее определение.
- **Определение.** Отношением между элементами множеств X и Y называется подмножество $R \subset X \times Y$.

Отношение эквивалентности

- **Определение.** Отношение R, заданное на множестве X, называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:

  1) рефлекивность: $xRx\ \forall x \in X$;

  2) симметричность: $xRy \Rightarrow yRx\ x,y \in X$

  3) транзитивность: xRy и $yRz \Rightarrow xRz\ \forall x,y,z \in X$.

Пример.

1) Отношение равенства.

Проверим, будет ли отношение равенства отношением эквивалентности.

$\forall x \in Z \;\; x = x$

$\forall x, y \in Z \;\; x = y \Rightarrow y = x$

$\forall x, y, z \in Z \;\; x = y, y = z \Rightarrow y = z$

2) Отношение параллельности на множестве прямых.

3) Отношение подобия на множестве треугольников.

- С отношением эквивалентности тесно связано разбиение множества на классы.
- **Определение.** Множество X разбито на классы (подмножества), если выполняются следующие два условия:

1) объединение всех классов есть множество X;
2) классы являются попарно не пересекающимися множествами.

Пример.

1) X - множество треугольников.

X_1 - прямоугольные, X_2 - равнобедренные, X_3 - равносторонние.

Такое разбиение не считается классификацией, так как: $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, $X_2 \cap X_3 \neq \emptyset$.

2) X - множество треугольников.

X_1 - прямоугольные, X_2 - остроугольные, X_3 - тупоугольные.

$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$

$X_1 \cup X_2 = \emptyset, X_1 \cup X_3 = \emptyset\ X_2 \cup X_3 = \emptyset$

Это типичная классификация.

Отношение >

- **Определение.** Отношение > заданное на множестве X называется отношением частичного строгого порядка, если оно обладает следующими свойствами:

  1) ассиметричность $x>y \overline{\Rightarrow y}>x$;

  2) транзитивность $x>y$ и $y>z \Rightarrow x>z$

Отношение $\geq$

- **Определение.** Отношение $\geq$, заданное на множестве X, называется отношением частичного нестрогого порядка, если выполнены следующие условия:

  1) $x \geq x$;

  2) $x \geq y$ и $y \geq x \Rightarrow x = y$;

  3) $x \geq y$ и $y \geq z \Rightarrow x \geq z$.

Множество X, в котором определены отношения частичного порядка (строгие и нестрогие) называется частично упорядоченным.

Отображения

- Пусть X и Y - два произвольных множества.
- **Определение.** Соответствие, при котором каждому из элементов множества X сопоставляется единственный элемент из множества Y, называется *отображением*.
- Обозначение отображения из множества X в множество Y: $X \xrightarrow{f} Y$

- Множество X называется *областью определения* отображения и обозначается $X=D(f)$.
- $E(f)$ называется *множеством значений* отображения, и $E(f)=\{y\in Y \mid \exists x\in X, y=f(x)\}$.
- Множество Г (f) называется *графиком* отображения $\Gamma(f)=\{(x,y)\in X\times Y, y=f(x), \forall x\in X, y\in Y\}$.

- Пусть f - некоторое отображение из множества X в множество Y. Если x при этом отображении сопоставляется y, то y=f(x).
- При этом y называется *образом* x, или *значением* отображения f в точке x. А x -*прообразом* элемента y.
- Исходя из определения отображения, видно, что не требуется, чтобы все элементы в множестве Y являлись образами какого-либо x и при том единственного.

Пример.

Даны два множества $X = \{\text{с}, \text{е}, \text{н}, \text{т}, \text{я}, \text{б}, \text{р}, \text{ь}\}$ и $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11\}$

Отображение из множества X в множество Y имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccccc} \{\text{с}, & \text{е}, & \text{н}, & \text{т}, & \text{я}, & \text{б}, & \text{р}, & \text{ь}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 9, & 10, & 11\} \end{array}$$

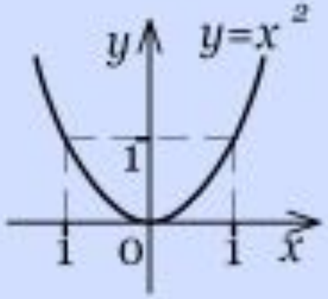
- **Определение.** Совокупность всех элементов из множества X, образом которых является y из Y, называется *полным прообразом* Y из X.
 Обозначается: $f^{-1}(y)$

- **Определение.** Пусть $A \subset X$. Совокупность всех элементов f(a), $a \in A$, называется *полным образом* множества A при отображении f.

- **Определение.** Пусть $B \subset Y$. Множество всех элементов из X, образы которых принадлежат множеству B, называется полным прообразом множества B.

Пример.

$$X = Y = R, y = x^2.$$



$$A = [-1; 1] \subset X$$

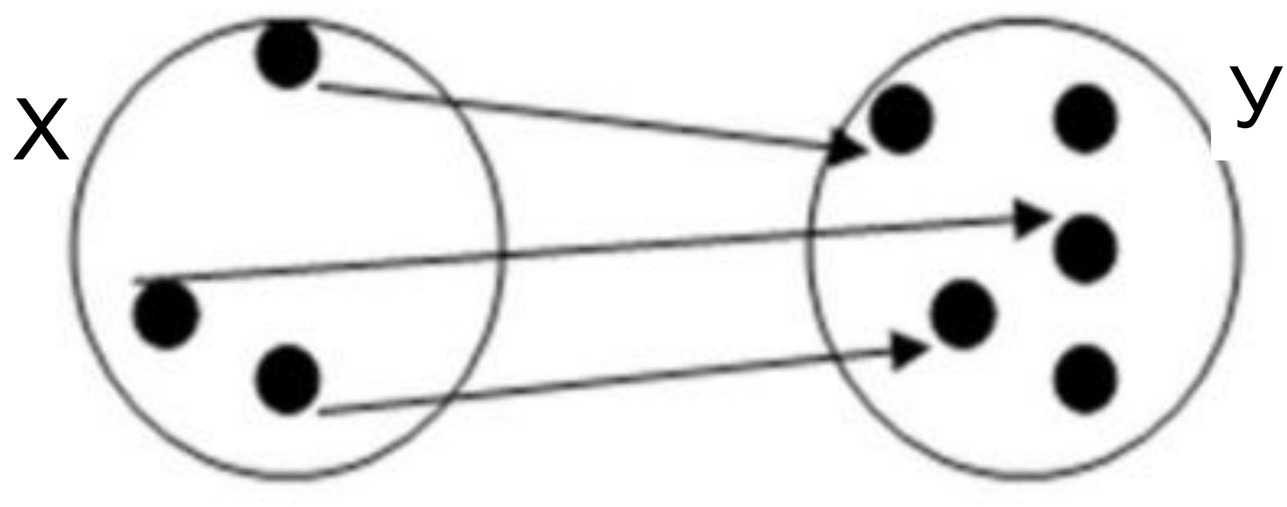
Полный образ $f(A) = [0; 1]$

$$B = [0; 1] \subset Y$$

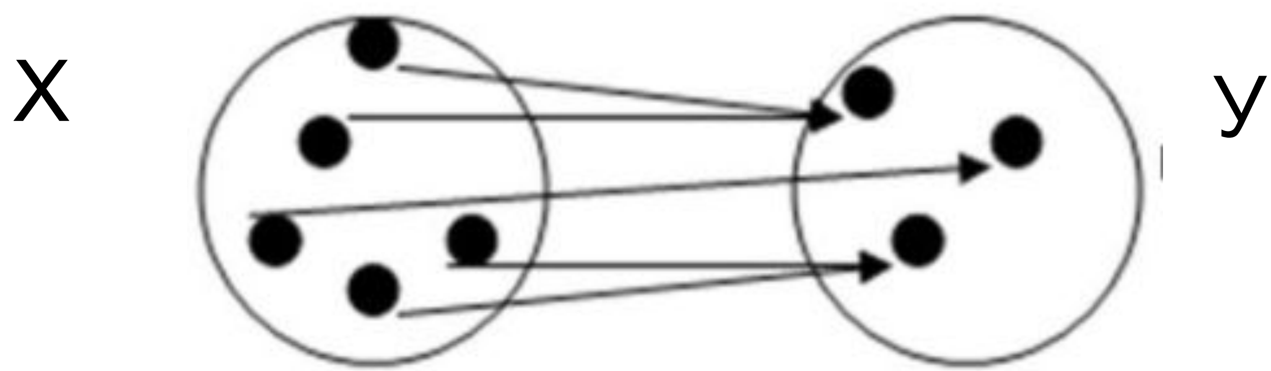
Полный прообраз $f^{-1}(B) = [-1; 1]$

Виды отображений

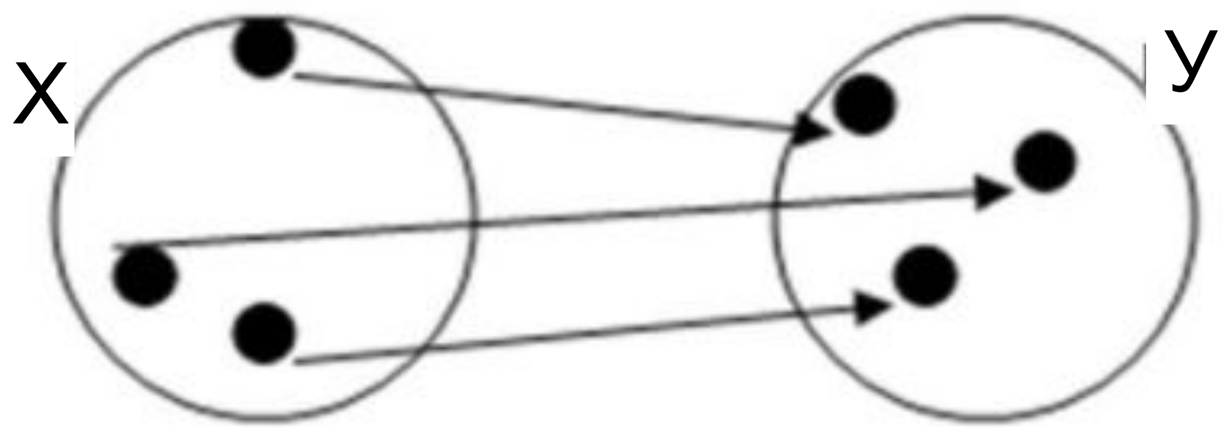
- **Определение.** Отображение f называется *инъективным* отображением, если $\forall\ y \in Y\ \ y=f(x)$ является образом не более одного x.



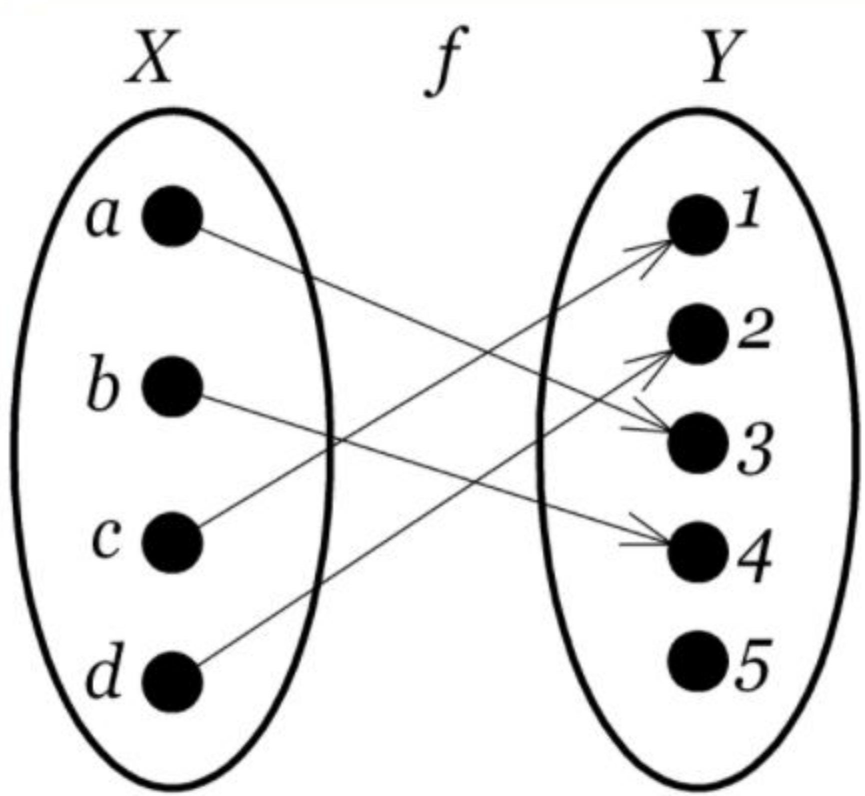
- Отображение f называется *сюръективн ым* отображением, если все элементы в множестве Y являются образами хотя бы одного x. (Это отображение множества X на множество Y).



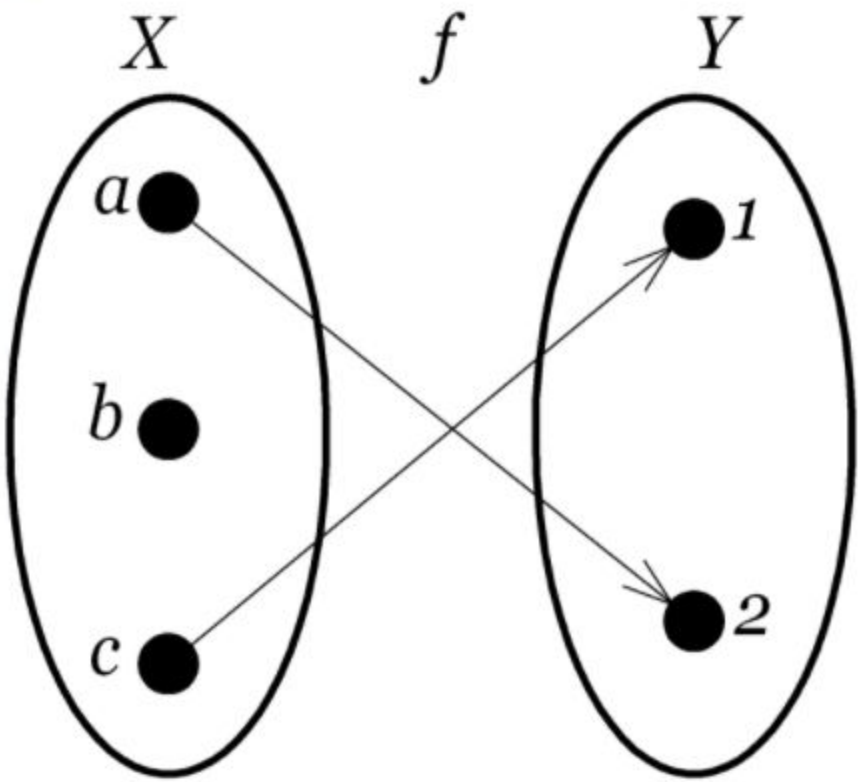
- Отображение f называется *биективны м*, если оно инъективно и сюръективно, (взаимно однозначным соответствием).



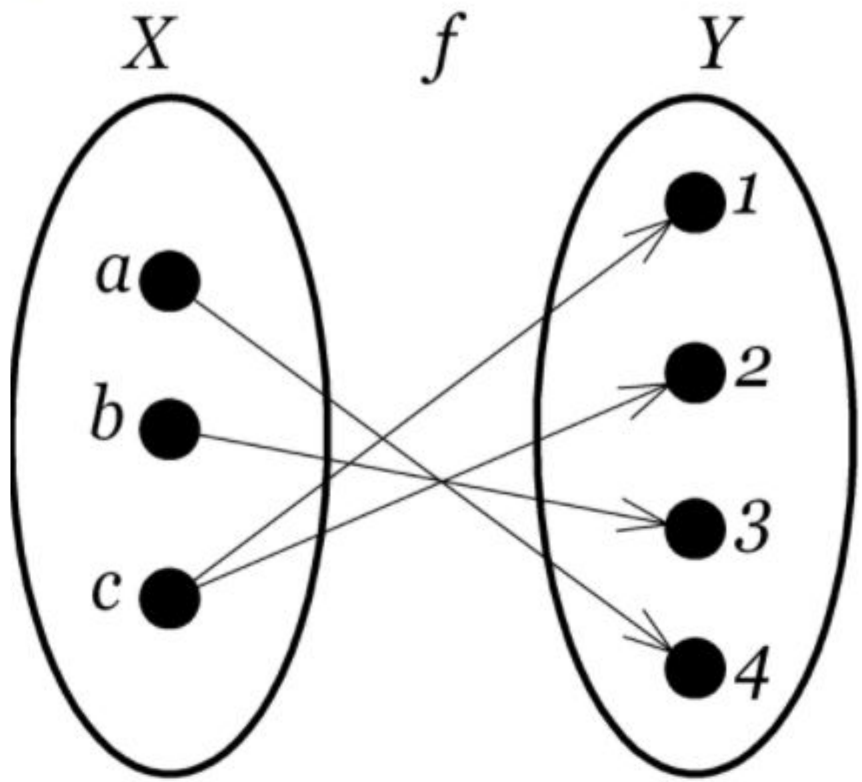
Примеры



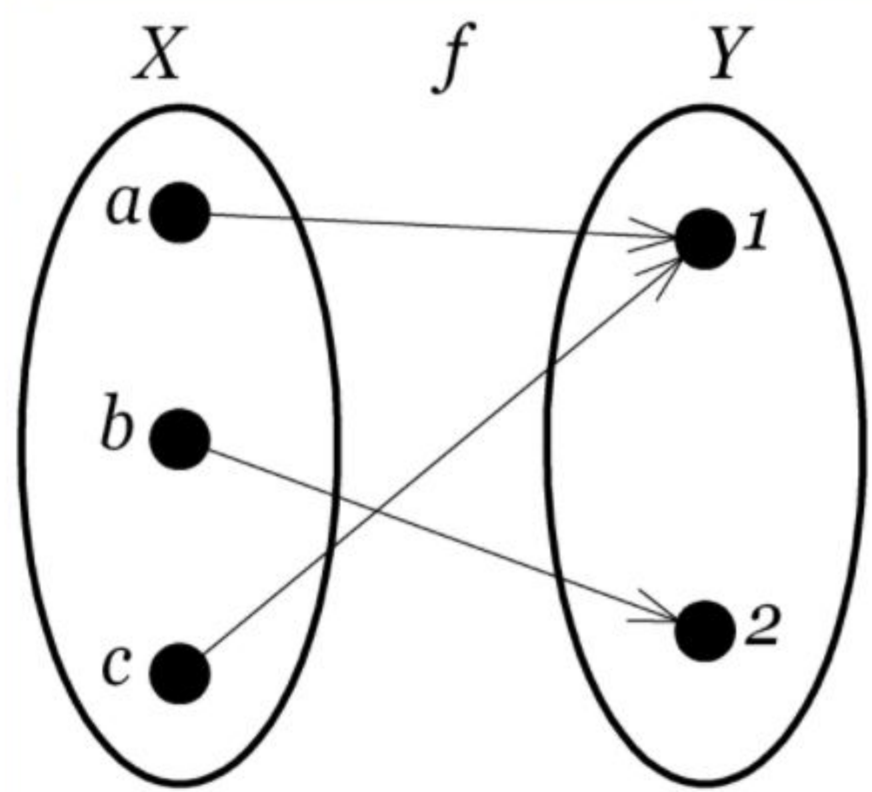
- Отображение. Инъективное, не сюръективное.



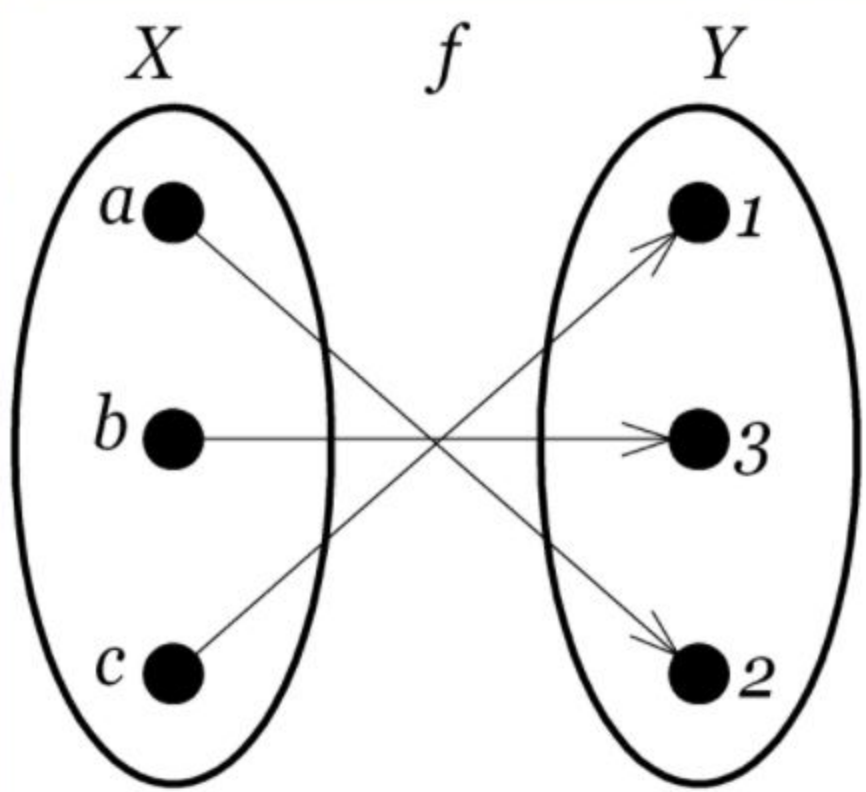
- Не отображение.



- Не отображение.



- Отображение. Не инъективное, сюръективное.



- Отображение. Инъективное, сюръективное ⇒ биективное.