

Численные методы

Система оценивания

Зачет

8 лекций -1 балл ($1*8=8$)

15 лабораторных работ - 3 балла ($((1+2)*15=45)$)

Текущий контроль – 2 балла ($2*8=16$)

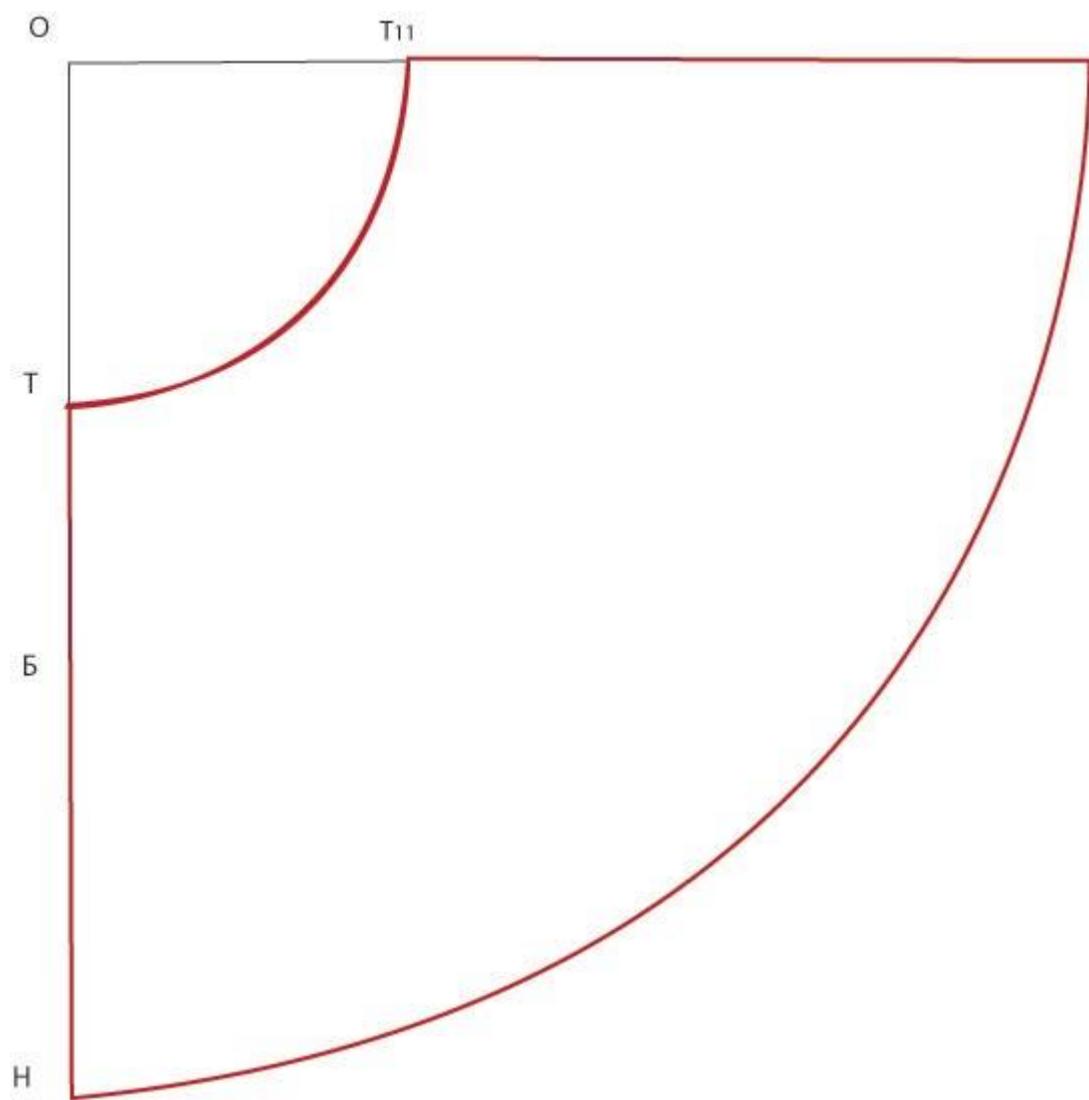
Итого: 69 баллов

Экзамен – 30 баллов:

$\left\{ \begin{array}{l} 20 \text{ баллов} - \text{тестирование} \\ 10 \text{ баллов} - \text{ответ на 1 вопрос (устно)} \end{array} \right.$

Приближенное значение величины.

**Абсолютная и
относительная
погрешность**



Виды погрешностей

- неустраняемая погрешность
- погрешность метода
- вычислительная погрешность

Неустраняемая погрешность

- погрешность, обусловленная неточностью задания чисел, входящих в описание задачи
- погрешность, являющаяся следствием несоответствия математического описания задачи реальной действительности

Погрешность метода

Связана со способом решения поставленной задачи (устраняемая или условная погрешность)

Вычислительная погрешность

Обусловлена необходимостью выполнять арифметические операции над числами, усеченными до определенного количества разрядов

Приближенным числом a
называется число,
незначительно отличающееся
от точного числа A
и заменяющее последнее
в вычислениях

Если $a < A$, то число a является
приближенным значением числа
 A *по недостатку*;

если $a > A$ –
приближенным значением
по избытку

Абсолютная погрешность

$$\Delta(a) = |a - A|$$

Пример: Пусть $A = 784,2737$,
 $a = 784,274$. Найти абсолютную
погрешность приближенного
числа

Решение

$$\Delta a = |A - a| = |784,2737 - 784,274| = 0,0003$$

Ответ: 0,0003

Относительная погрешность

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$$

Пример: Пусть при измерении книги и длины стола были получены результаты:

$$l_1 = 28,4 \pm 0,1 \text{ (см)} \text{ и}$$

$$l_2 = 110,3 \pm 0,1 \text{ (см)}.$$

Решение

$$\delta^*_{11} = 0,1 \text{ (см)} / 28,4 \text{ (см)} \approx 0,0035, \text{ или } 0,35\%;$$

$$\delta^*_{12} = 0,1 \text{ (см)} / 110,3 \text{ (см)} \approx 0,0009, \text{ или } 0,09\%.$$

Ответ: измерение стола точнее

Пример:

X	Δ_x	Y	Δ_y
$50^{\circ}30'10''$	$3''$	$45^{\circ}15'36''$	$2''$

Решение

$$x = 181810'' \pm 3'', \quad \delta_x = 3/181810 \approx 0,000017 = 0,0017\%;$$

$$y = 162936'' \pm 2'', \quad \delta_y = 2/162936 \approx 0,000013 = 0,0013\%.$$

Ответ: измерение y произведено более точно

Погрешности арифметических действий

Если

$$c = a + b$$

или

$$c = a - b$$

$$\begin{aligned} c &= (a \pm \Delta a) \pm (b \pm \Delta b) = \\ &= (a \pm b) \pm (\Delta a + \Delta b) \end{aligned}$$

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b$$

Относительная погрешность

$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} = \frac{\Delta a}{a + b} + \frac{\Delta b}{a + b} = \\ &= \frac{\Delta a}{a + b} \frac{a}{a} + \frac{\Delta b}{a + b} \frac{b}{b} = \\ &= \frac{a}{a + b} \delta_a + \frac{b}{a + b} \delta_b\end{aligned}$$

Относительная погрешность

$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a - b} = \frac{\Delta a}{a - b} + \frac{\Delta b}{a - b} = \\ &= \frac{\Delta a}{a - b} \frac{a}{a} + \frac{\Delta b}{a - b} \frac{b}{b} = \\ &= \frac{a}{a - b} \delta_a + \frac{b}{a - b} \delta_b\end{aligned}$$

Если $c = ab$

$$\begin{aligned}c &= (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = \\&ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a\Delta b = \\&= ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a\end{aligned}$$

$$\Delta(c) = a\Delta b \pm b\Delta a$$

Относительная погрешность

$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{\Delta c}{c} = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \\ &= \delta_a + \delta_b\end{aligned}$$

Если

$$c = a/b$$

$$c = \frac{(a \pm \Delta a)}{(b \pm \Delta b)} =$$

$$= \frac{(a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)}{(b \pm \Delta b)(b \pm \Delta b)} =$$

$$= \frac{a}{b} \pm \frac{(a\Delta b \pm b\Delta a)}{b^2}$$

$$\Delta c = \frac{(a\Delta b \pm b\Delta a)}{b^2}$$

Относительная погрешность

$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{\Delta c}{c} = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2 \frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \\ &= \delta_a + \delta_b\end{aligned}$$

Позиционная запись числа:

$$a = \pm a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$$

или

$$a = \pm \sum_{i=-m}^n a_j * 10^j$$

Первая слева цифра данного числа, отличная от нуля, и все расположенные за ней цифры называются значащими.

Например: числа 25,047 и -0,00259 имеют соответственно 5 и 3 значащих цифры.

Цифра a_j называется верной,

если $\Delta(a) \leq 10^j$, т.е.

абсолютная погрешность числа a
не превосходит одной единицы
соответствующего разряда десятичного числа

Например, $a=0,03045$ и $(\Delta a)=0,000003$

Последнюю верную цифру или все верные цифры
обычно подчеркивают

Правило.

За абсолютную погрешность приближенного числа с известными верными значащими цифрами принимается половина единицы того разряда, где находится последняя верная цифра.