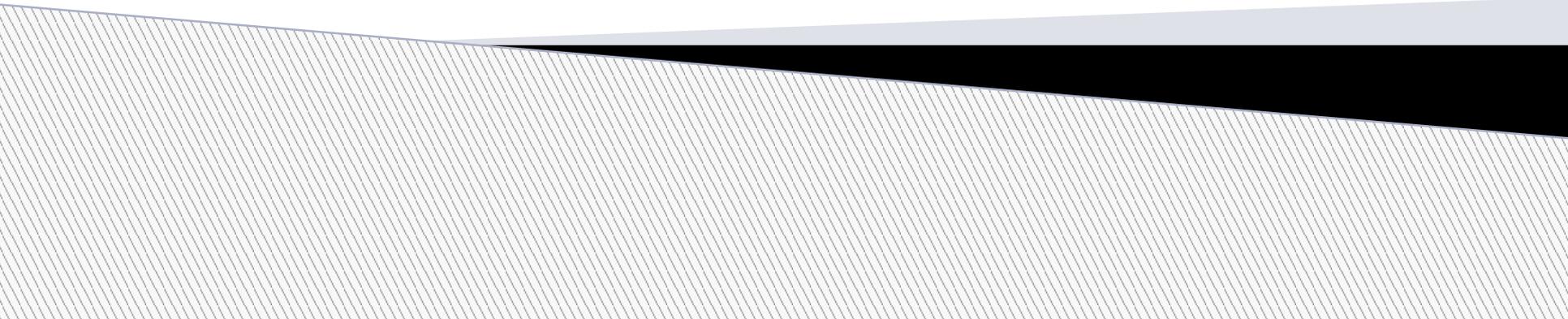


*ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.
Аммосова»
Инженерно-технический институт
Кафедра прикладной механики*

**Решение задач
по дисциплине «Техническая механика»
270800 - Строительство**

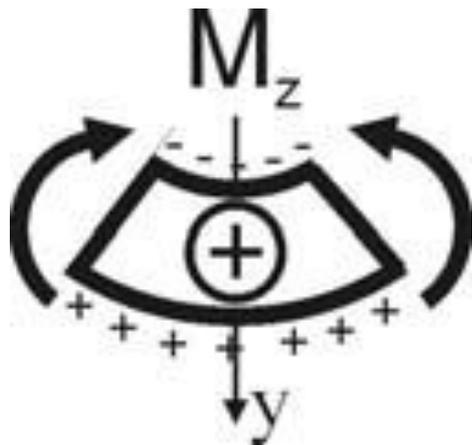
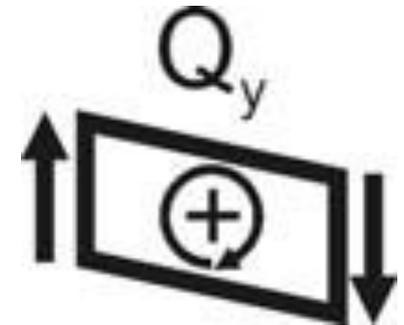
Построение эпюр внутренних усилий в балке



Правило знаков при определении внутренних усилий:

1) Продольная сила N считается **положительной**, если направлена **от сечения** и растягивает элемент, то есть одна часть тянется к другой.

2) Поперечная сила Q_y считается **положительной**, если она стремится **повернуть** рассматриваемый элемент балки **по часовой стрелке**;



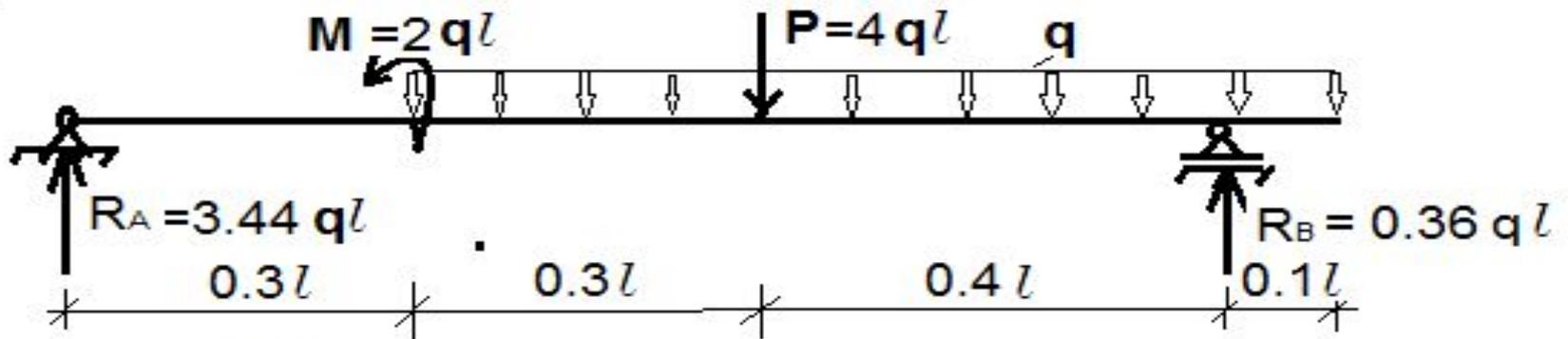
3) Изгибающий момент M_x считается **положительным**, если при изгибе элемента балки верхние волокна элемента оказываются сжатыми, а нижние – растянутыми (**правило зонта**).

Решение задачи по определению внутренних усилий :

- 1) из условия равновесия конструкции в целом определяем реакции опор;
- 2) выделяем характерные участки балки, принимая за границы участков сечения, в которых: - приложены сосредоточенные силы и моменты, - начинается или заканчивается действие распределенной нагрузки, - имеется шарнир или ось элемента меняет направление (излом);
- 3) определяем внутренние усилия в сечениях балки, рассматривая условия равновесия отсеченной части (слева или справа) на каждом из участков.
- 4) по полученным значениям внутренних усилий строим эпюры.

Эпюра внутреннего усилия – **график**, показывающий изменение величины внутреннего усилия по длине элемента.

Пример построения эпюр внутренних усилий - поперечных сил и изгибающих моментов



1. Определяем опорные реакции:

$$\sum m_A = R_B \cdot l + m - P \cdot 0.6l - q \cdot 0.8l \cdot 0.7l = 0$$

$$R_B = \frac{-2ql^2 + 3ql \cdot 0.6l + q \cdot 0.8l \cdot 0.7l}{l} = 0.36ql$$

$$\sum Y = R_B + R_A - 3ql - 0.8ql = 0 \quad R_A = 3.44ql$$

Выполните проверку

2. Определяем границы участков:

Рассматриваемая расчетная схема имеет 4 участка:

1 участок – от опоры А до сечения где приложен момент и начинается действие распределенной нагрузки, длиной $0,3l$;

2 участок – от конца 1 участка до сечения где приложена сосредоточенная сила, длиной $0,3l$;

3 участок – от конца 2 участка до опоры В, длиной $0,4l$;

4 участок – консоль, длиной $0,1l$;

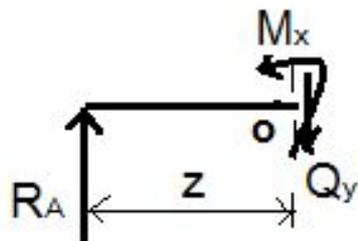
3. Определяем внутренние усилия:

1-й участок: $0 \leq z \leq 0,3l$

$$\sum y = R_A - Q_y = 0, \quad Q_y = 3.44ql$$

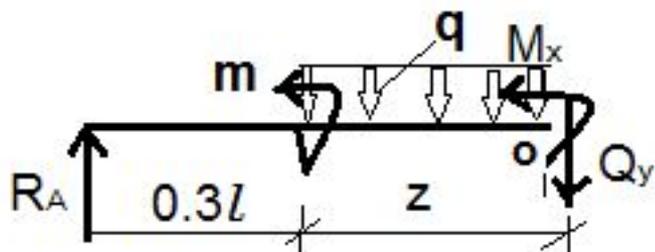
$$\sum m_o = M_x - R_A \cdot z = 0, \quad M_x = 3.44ql \cdot z / 0.3l$$

$$\text{При } z=0, \quad M_x=0, \\ z=0.3 \quad M_x=1.032ql \quad l^2$$



Продольная сила N не рассматривается, т.к. нагрузки приложены только вертикальные.

2-й участок: $0 \leq z \leq 0,3l$



$$\sum y = R_A - q \cdot z - Q_y = 0$$

$$Q_y = 3.44ql - q \cdot z / 0^{0.3l}$$

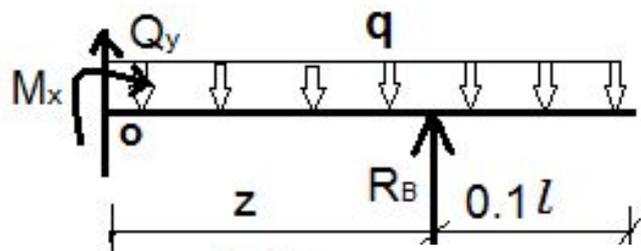
$$\sum m_o = M_x - R_A \cdot (0.3l + z) + q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = 0$$

$$M_x = 3.44ql \cdot (0.3l + z) - q \frac{z^2}{2} / 0^{0.3l}$$

при $z = 0$ $Q_y = 3.44ql$ $M_x = 0.968ql^2$;

при $z = 0.3l$ $Q_y = 3.14ql$, $M_x = 0.019ql^2$;

3-й участок: $0 \leq z \leq 0,4l$



$$\sum y = R_B - q \cdot (0.1l + z) + Q_y = 0$$

$$Q_y = -0.36ql + q \cdot (0.1l + z)$$

$$\sum m_o = -M_x + R_B \cdot z - q \cdot (0.1l + z) \cdot \frac{(0.1l + z)}{2} = 0$$

$$M_x = 0.36ql \cdot z - q \cdot \frac{(0.1l + z)^2}{2}$$

$$\text{при } z = 0 \quad Q_y = -0.26ql \quad M_x = -0.005ql^2$$

$$\text{при } z = 0.4l \quad Q_y = 0.14ql \quad M_x = 0.19ql^2$$

Положение точки перехода эпюры Q_y через ноль (особая точка) определяем из:

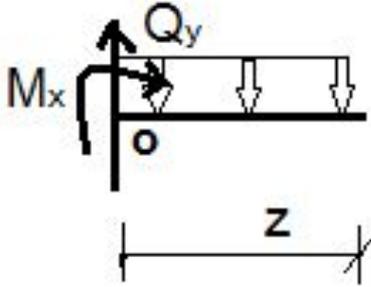
$$Q_y = -0.36ql + q \cdot (0.1l + z_1) = 0$$

$$\text{отсюда} \quad z_1 = 0.36l$$

Подставив полученное значение $z_1 = 0.36l$ в выражение для изгибающего момента определим, что в этом сечении

$$M_x = 0.238ql^2$$

4-й участок: $0 \leq z \leq 0,1l$



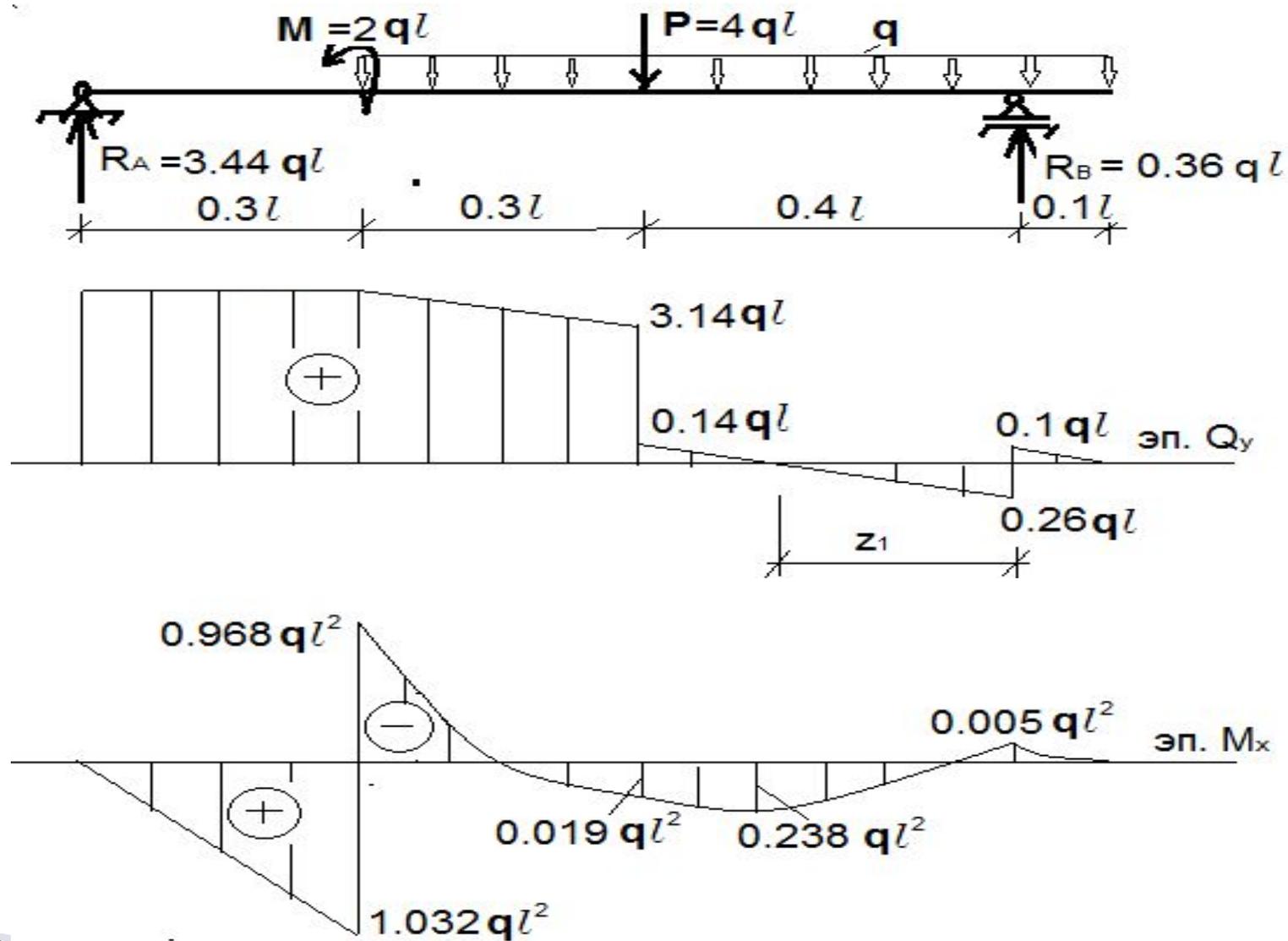
$$\sum y = Q_y - q \cdot z = 0$$

$$Q_y = q \cdot z \Big|_{0,1l}^0 = 0,1ql$$

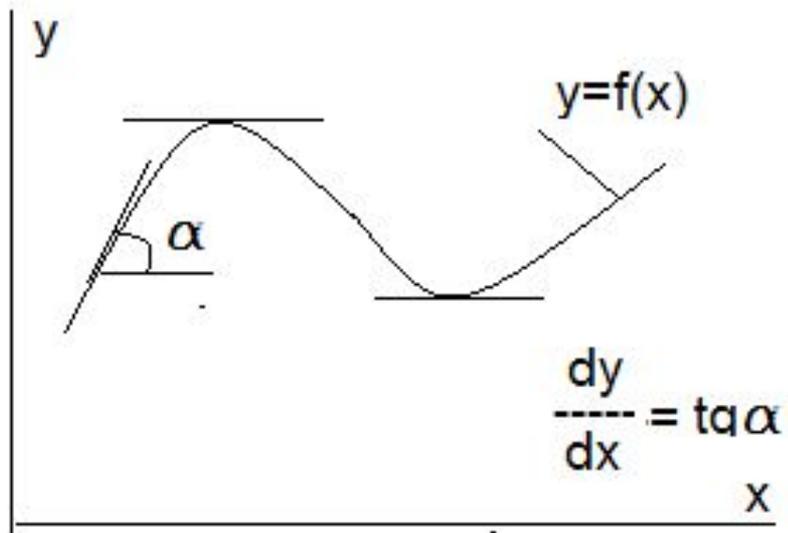
$$\sum m_o = -M_x - q \cdot \frac{z^2}{2} = 0$$

$$M_x = -q \cdot \frac{z^2}{2} = \Big|_{0,1l}^0 -0,005ql^2$$

4. Строим эпюры внутренних усилий:



Правила проверки правильности построенных эпюр Q_y и M_x



Так как первая производная от функции есть тангенс угла наклона касательной к графику рассматриваемой функции, то эпюра Q_y показывает изменение тангенса угла наклона касательной к эпюре M_x .

- если на участке эпюра Q_y **положительная**, то эпюра M_x **возрастает**;
- если на участке эпюра Q_y **отрицательная**, то эпюра M_x **убывает**;
- если на участке **нет распределенной нагрузки** $q(Z)=0$, то эпюра Q_y имеет **постоянное значение**, а эпюра M_x изменяется **по линейному закону**;
- если на участке балки **действует равномерно распределенная нагрузка** $q(Z)=q$, то эпюра Q_y изменяется **по линейному закону**, а эпюра M_x – **квадратная функция**;

• если на участке эпюра Q_y **переходит через нуль**, то эпюра M_x в этом сечении имеет **экстремальное значение**. При этом, если эпюра Q_y **переходит от положительного к отрицательному значению**, то эпюра M_x имеет **максимальное значение**, если **от отрицательного к положительному значению**, то эпюра M_x имеет **минимальное значение**;

- так как **вторая производная** от функции изгибающего момента **имеет отрицательную величину** $\left(\frac{d^2 M_x}{dZ^2} = -q(Z) \right)$

то выпуклость эпюры M_x **направлена по направлению распределенной нагрузки (правило «паруса»)**;

• в том сечении, где действует **сосредоточенная сила**, эпюра Q_y **имеет скачок**, равный по величине и по направлению силе P , а эпюра M_x **имеет излом** по направлению силы;

• в том сечении, где приложен **сосредоточенный момент** M , эпюра M_x **имеет скачок**, равный по величине и по направлению момента M , а эпюра Q_y **не меняется**;

- на защемленном конце балки эюра Q_y равна величине опорной реакции, а эюра M_x опорному моменту;
- на шарнирной концевой опоре эюра Q_y равна опорной реакции, а эюра M_x равна нулю, если на опоре не приложен сосредоточенный момент;
- на свободном конце консольной балки эюра Q_y равна нулю, если отсутствует сосредоточенная сила, а эюра M_x равна нулю, если нет сосредоточенного момента;
- на промежуточной опоре эюра Q_y имеет скачок, равный по величине и по направлению опорной реакции, а эюра M_x имеет излом по направлению опорной реакции;
- в промежуточном шарнирном соединении эюра M_x равна нулю, если нет сосредоточенного момента, а эюра Q_y равна внутренним усилиям в шарнире.
- на участке, где эюра поперечных сил Q_y равна нулю, а эюра изгибающих моментов постоянная балка испытывает деформацию чистого изгиба.

Простейшие балки: реакции опор и эюры Q_y и M_x

