Линейное программирование

Основные идеи линейного программирования возникли во время второй мировой войны в связи с поиском оптимальных стратегий при ведении военных операций. С тех пор они нашли широкое применение в промышленности, торговле и управлении - как в местных, так и в государственных масштабах. Этими методами можно решить многие (хотя не все) задачи, связанные с эффективным использованием ограниченных ресурсов.

- Линейное программирование - это раздел прикладной математики о методах исследования и отыскания наибольших или наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

- Термин «линейное программирование» появился в 1951 году в работах американских ученых Дж. Б. Данцига, Тьяллинга Купманса (Koopmans). Слово «программирование» объясняется тем, что набор искомых переменных определяет программу (план) работы некоторого экономического объекта.

- Круг задач, решаемых при помощи методов линейного программирования достаточно широк. Это, например:
- задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании;
- задача о смесях (планирование состава продукции);
- задача о нахождении оптимальной комбинации различных видов продукции для хранения на складах (управление товарно-материальными запасами или "задача о рюкзаке");
- транспортные задачи (анализ размещения предприятия, перемещение грузов).

В общем виде задача линейного программирования может быть сформулирована следующим образом.

Дана линейная функция

$$\Phi = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_j \cdot x_j + ... + c_n \cdot x_n \quad (1)$$

система линейных ограничений

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1j} \cdot x_j + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1,$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2j} \cdot x_j + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2,$

. . . . (2)

$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{ij} \cdot x_j + \dots + a_{in} \cdot x_n = b_i,$

. . . .

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mj} \cdot x_j + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m,$

и условия неотрицательности переменных

$x_j \geq 0$, j = 1, n (3)

где a_{ij}, b_i и c_j - заданные постоянные величины.

Задача об оптимальном использовании ресурсов при производственном планировании

Общий смысл задач этого класса сводится к следующему.

Предприятие выпускает n различных изделий. Для их производства требуется m различных видов ресурсов (сырья, материалов, рабочего времени и т.п.). Ресурсы ограничены, их запасы в планируемый период составляют, соответственно, b_1, b_2,..., b_m условных единиц.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые показывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы изделия j-го вида (   ).

- Прибыль, получаемая предприятием при реализации изделия j-го вида, равна c_j.
- В планируемом периоде значения величин a_{ij}, b_i и c_j остаются постоянными.
- Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей.

пример задачи этого класса

- Компания специализируется на выпуске хоккейных клюшек и наборов шахмат. Каждая клюшка приносит компании прибыль в размере $2, а каждый шахматный набор - в размере $4. На изготовление одной клюшки требуется четыре часа работы на участке A и два часа работы на участке B. Шахматный набор изготавливается с затратами шести часов на участке A, шести часов на участке B и одного часа на участке C. Доступная производственная мощность участка A составляет 120 н-часов в день, участка B - 72 н-часа и участка C - 10 н-часов.
- Сколько клюшек и шахматных наборов должна выпускать компания ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль?

- Условия задач указанного класса часто представляют в табличной форме.

Исходные данные задачи об использовании производственных ресурсов

Производственные участки	**Затраты времени на единицу продукции, н-час**		**Доступный фонд времени, н-час**
	клюшки	наборы шахмат	
A	4	6	120
B	2	6	72
C	-	1	10
Прибыль на единицу продукции, $	2	4	

По данному условию сформулируем задачу линейного программирования.

Обозначим: x_1 - количество выпускаемых ежедневно хоккейных клюшек, x_2 - количество выпускаемых ежедневно шахматных наборов.

Формулировка ЗЛП:

$= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$4x_1 + 6x_2 \leq 120,$

$2x_1 + 6x_2 \leq 72,$

$x_2 \leq 10;$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Каждое неравенство в системе функциональных ограничений соответствует в данном случае тому или иному производственному участку, а именно: первое - участку А, второе - участку В, третье - участку С.

Задача о смесях (планирование состава продукции).

- На птицеферме употребляются два вида кормов - I и II. В единице массы корма I содержатся единица вещества A, единица вещества B и единица вещества C. В единице массы корма II содержатся четыре единицы вещества A, две единицы вещества B и не содержится вещество C. В дневной рацион каждой птицы надо включить не менее единицы вещества A, не менее четырех единиц вещества B и не менее единицы вещества C. Цена единицы массы корма I составляет 3 рубля, корма II - 2 рубля.
- Составьте ежедневный рацион кормления птицы так, чтобы обеспечить наиболее дешевый рацион.