Равномерная непрерывность

Опр. $f(x)$, $x \in X$ называется равномерно непрерывной на X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:
$\forall x', x'' \in X$, $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Если $f(x)$ равн. непр. на $X \Rightarrow f(x)$ непр. $\forall x_0 \in X$ (самостоятельно).

Отрицание равн. непр. $f(x)$, $x \in X$ не явл. равн. непр. на X, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$
$\exists x', x'' \in X$, $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

Пример 1 $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon > 0\ \forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$
$|x' - x''| < \delta (= \varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| =$
$= |\sin x' - \sin x''| = \left|2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cdot \cos \frac{x' + x''}{2}\right| \leq$
$\leq 2\left|\frac{x' - x''}{2}\right| \cdot 1 = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$ является равн. непр.

Пример 2. $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$\exists \varepsilon = 1 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, $\exists x'' = \frac{1}{\delta}$
$|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} =$
$= \frac{1}{\delta^2} + 2 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4} - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon$ не явл. равн. непр.

Равномерная непрерывность

Опр. $f(x)$, $x \in X$ называется равномерно непрерывной на X, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$:
$\forall x', x'' \in X$, $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Если $f(x)$ равн. непр. на $X \Rightarrow f(x)$ непр. $\forall x_0 \in X$ (самостоятельно).

Отрицание равн. непр. $f(x)$, $x \in X$ не явл. равн. непр. на X, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$
$\exists x', x'' \in X$, $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

Пример 1 $\quad f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \varepsilon > 0 \; \forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$

$|x' - x''| < \delta (= \varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| =$

$= |\sin x' - \sin x''| = \left|2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cdot \cos \frac{x' + x''}{2}\right| \leq$

$\leq 2 \left|\frac{x' - x''}{2}\right| \cdot 1 = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$ является равн. непр.

Пример 2. $\quad f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$

$\exists \varepsilon = 1 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$, $\exists x'' = \frac{1}{\delta}$

$|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} =$

$= \frac{1}{\delta^2} + 2 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4} - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon$ не явл. равн. непр.

Т (Кантор). $f(x) \in C[a, b] \Rightarrow f(x)$ равном. непрерывна на $[a, b]$

Д-во. Пусть $f(x)$ не явл. равн. непр. на $[a, b]$, т. е. $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x', x'' \in [a, b]$,
$|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

$\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$; $\exists x'_n, x''_n \in [a, b] : |x'_n - x''_n| < \delta_n = \frac{1}{n}$,
но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$

$a \leq x'_n \leq b_n$, т.е. $\{x'_n\}$ огран. $\Rightarrow \exists \{x'_{k_n}\} \subset \{x'_n\}$

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} x'_{k_n} = x_0$, $x_0 \in [a, b]$. $\quad x''_{k_n} = x'_k +$
$+ (x''_{k_n} - x'_{k_n})$, т. е. $\underbrace{x'_{k_n} - \delta_{k_n}}_{\to x_0} < x''_{k_n} < \underbrace{x'_{k_n} + \delta_{k_n}}_{\to x_0}$

$0 < \delta_{k_n} = \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} x''_k = x_0$. $f(x)$ непр. при $x = x_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x'_{k_n}) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x''_{k_n}) = f(x_0)$

$|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \geq \varepsilon \qquad n \to \infty$

$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \lim\limits_{n \to \infty} |f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})| \geq \varepsilon > 0$

Противоречие

Теорема д-зана

Дифференциальное исчисление

Производная.

$y=f(x)$ опред. в окр. x_0, $x-x_0=\Delta x$, $x=x_0+\Delta x$.

$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ определено для всех дост. малых Δx (кроме $\Delta x=0$)

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. x_0. Производной ф-ии $f(x)$ при $x=x_0$ называется

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Обозначения: $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\left.f'(x)\right|_{x=x_0}$ и др.

Для $f(x)$ в одностор. окр-сти x_0 – одностор. пр-ые:

$$f'_{пр}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\ f'_{лев}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f'_{пр}(x_0),\ \exists f'_{лев}(x_0) \text{ и } f'_{пр}(x_0)=f'_{лев}(x_0)$$

Если произв. $=\infty, +\infty, -\infty$, то произв. нет!

Пусть $f'(x_0)=A$, т.е. $A=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тогда

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, т.е. б.м.

Дифференциальное исчисление

Производная.

$y=f(x)$ опред. в окр. x_0, $x-x_0=\Delta x$, $x=x_0+\Delta x$.

$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ определено для всех дост. малых Δx (кроме $\Delta x = 0$)

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. x_0. Производной ф-ии $f(x)$ при $x=x_0$ называется

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Обозначения: $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\left.f'(x)\right|_{x=x_0}$ и др.

Для $f(x)$ в одностор. окр-сти x_0 — одностор. пр-ые:

$$f'_{пр}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad f'_{лев}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f'_{пр}(x_0), \exists f'_{лев}(x_0) \text{ и } f'_{пр}(x_0)=f'_{лев}(x_0)$$

Если произв. $=\infty, +\infty, -\infty$, то произв. нет!

Пусть $f'(x_0)=A$, т.е. $A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тогда

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A+\alpha(\Delta x)$, где $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, т.е. б.м.

Т1. $\exists f'(x_0) \Rightarrow f(x)$ непрер. при $x=x_0$

Д-во. $f'(x_0)=A$. $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x)$,

$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0 \Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+A\cdot\Delta x+$
$+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x]=f(x_0)$.

Теорема д-зана.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0 \Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0)+A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x\right]=f(x_0).$$

Теорема д-зана.

<u>Т2.</u> $\exists f'(x_0), \exists g'(x_0) \Rightarrow \exists (f(x)\pm g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$,

$\exists (f(x)\cdot g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$, а если

$g(x_0)\neq 0$, то $\exists \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)\Big|_{x=x_0}=\dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Д-во Т2. Сумма и разность – самостоятельно.

$F(x)=f(x)\cdot g(x)$. $(f(x)\cdot g(x))'\big|_{x=x_0}=F'(x)\big|_{x=x_0}=F'(x_0)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} g(x_0+\Delta x)+f(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

$$G(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x_0)\neq 0;\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\Big|_{x=x_0}=G'(x)\big|_{x=x_0}=G'(x_0)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x_0+\Delta x)-G(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}=\frac{1}{g(x_0)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x_0+\Delta x)}\cdot$$

$$\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{g^2(x_0)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x_0)\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Теорема д-зана

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0 \Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+A\cdot\Delta x+$
$+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x]=f(x_0).$

Теорема д-зана.

Т2. $\exists f'(x_0), \exists g'(x_0) \Rightarrow \exists (f(x)\pm g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$,
$\exists (f(x)\cdot g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$, а если
$g(x_0)\neq 0$, то $\exists\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\Big|_{x=x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Т3. В окр. x_0 $\exists y(x)=f(\varphi(x))$. $\exists \varphi'_x(x_0)$;
$\exists f'_u(u_0)$, где $u_0=\varphi(x_0) \Rightarrow \exists y'_x(x_0)=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0)$

Д-во Т3. $\Delta u=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'_x(x_0)\cdot\Delta x+$
$+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=$
$=f'_u(u_0)\cdot\Delta u+\beta(\Delta u)\cdot\Delta u$, $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\beta(\Delta u)=0$. $\beta(\Delta u)$
не опред. при $\Delta u=0$. Положим $\beta(0)=0$.

$\Delta y=(f'_u(u_0)+\beta(\Delta u))\cdot\Delta u=(f'_u(u_0)+\beta(\Delta u))(\varphi'_x(x_0)+\alpha(\Delta x))\cdot\Delta x$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0)+f'_u(u_0)\cdot\alpha(\Delta x)+\varphi'_x(x_0)\cdot\beta(\Delta u)+\alpha(\Delta x)\cdot\beta(\Delta u)$

$\Delta x\to 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x)\to 0, \Delta u\to 0; \Rightarrow \beta(\Delta u)\to 0$

$\Rightarrow y'_x(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0).$

Т. доказана

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0 \Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+A\cdot\Delta x+$
$+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x]=f(x_0).$

Теорема д-зана.

T2. $\exists f'(x_0), \exists g'(x_0) \Rightarrow \exists (f(x)\pm g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$,
$\exists (f(x)\cdot g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$, а если
$g(x_0)\neq 0$, то $\exists \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)\Big|_{x=x_0}=\dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

T3. В окр. x_0 $\exists y(x)=f(\varphi(x))$. $\exists \varphi'_x(x_0)$;
$\exists f'_u(u_0)$, где $u_0=\varphi(x_0) \Rightarrow \exists y'_x(x_0)=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0)$

T4. $y=f(x)$ непр. и строго монот. в окр. x_0,
$\exists f'_x(x_0)\neq 0. \Rightarrow$ обратная ф-я $x=\varphi(y)$ при
$y=y_0$ ($y_0=f(x_0)$) имеет производную $\varphi'_y(y_0)=\dfrac{1}{f'_x(x_0)}$

Д-во Т3. $\Delta u=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'_x(x_0)\cdot\Delta x+$
$+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=$
$=f'_u(u_0)\cdot\Delta u+\beta(\Delta u)\cdot\Delta u$, $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\beta(\Delta u)=0$. $\beta(\Delta u)$
не опред. при $\Delta u=0$. Положим $\beta(0)=0$.

$\Delta y=(f'_u(u_0)+\beta(\Delta u))\cdot\Delta u=(f'_u(u_0)+\beta(\Delta u))(\varphi'_x(x_0)+\alpha(\Delta x))\cdot\Delta x$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0)+f'_u(u_0)\cdot\alpha(\Delta x)+\varphi'_x(x_0)\cdot\beta(\Delta u)+\alpha(\Delta x)\cdot\beta(\Delta u)$

$\Delta x\to 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x)\to 0, \Delta u\to 0; \Rightarrow \beta(\Delta u)\to 0$

$\Rightarrow y'_x(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0)$.

Т. доказана

Д-во Т4. $\exists x=\varphi(y)$ — непр. и строго монот.,
причём $\Delta x\neq 0 \Leftrightarrow \Delta y\neq 0$, $\Delta x\to 0 \Leftrightarrow \Delta y\to 0$

$\varphi'_y(y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{1}{\Delta y/\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta y/\Delta x}=$

$=\dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\dfrac{1}{f'_x(x_0)}$.

Теорема д-зана

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0 \Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+A\cdot\Delta x+$

$+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x]=f(x_0).$

Теорема д-зана.

<u>Т2.</u> $\exists f'(x_0), \exists g'(x_0) \Rightarrow \exists (f(x)\pm g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$,

$\exists (f(x)\cdot g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$, а если

$g(x_0)\neq 0$, то $\exists \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\Big|_{x=x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

<u>Т3.</u> В окр. x_0 $\exists y(x)=f(\varphi(x))$. $\exists \varphi'_x(x_0)$;

$\exists f'_u(u_0)$, где $u_0=\varphi(x_0) \Rightarrow \exists y'_x(x_0)=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0)$

<u>Т4.</u> $y=f(x)$ непр. и строго монот. в окр x_0, $\exists f'_x(x_0)\neq 0. \Rightarrow$ обратная ф-я $x=\varphi(y)$ при $y=y_0$ ($y_0=f(x_0)$) имеет производную $\varphi'_y(y_0)=\frac{1}{f'_x(x_0)}$

<u>Т5.</u> В окр t_0 $x(t), y(t)$ непрер., $x(t)$ строго монот. $\exists x'_t(t_0)\neq 0, \exists y'_t(t_0). \Rightarrow$ у ф-ии $y=Y(x)$, определённой из с-мы $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $\exists Y'_x(x_0)=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$, где $x_0=x(t_0)$.

Д-во Т3. $\Delta u=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'_x(x_0)\cdot\Delta x+$ $+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=$ $=f'_u(u_0)\cdot\Delta u+\beta(\Delta u)\cdot\Delta u$, $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\beta(\Delta u)=0$. $\beta(\Delta u)$ не опред. при $\Delta u=0$. Положим $\beta(0)=0$.

$\Delta y=(f'_u(u_0)+\beta(\Delta u))\cdot\Delta u=(f'_u(u_0)+\beta(\Delta u))(\varphi'_x(x_0)+\alpha(\Delta x))\cdot\Delta x$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0)+f'_u(u_0)\cdot\alpha(\Delta x)+\varphi'_x(x_0)\cdot\beta(\Delta u)+\alpha(\Delta x)\cdot\beta(\Delta u)$

$\Delta x\to 0 \Rightarrow \alpha(\Delta x)\to 0, \Delta u\to 0; \Rightarrow \beta(\Delta u)\to 0$

$\Rightarrow y'_x(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_u(u_0)\cdot\varphi'_x(x_0).$

Т. доказана.

Д-во Т4. $\exists x=\varphi(y)$ – непр. и строго монот., причём $\Delta x\neq 0 \Leftrightarrow \Delta y\neq 0$, $\Delta x\to 0 \Leftrightarrow \Delta y\to 0$

$\varphi'_y(y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y/\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta y/\Delta x}=$

$=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'_x(x_0)}.$

Теорема д-зана.

Д-во Т5. $\exists t=t(x)$ -ф-я, обратная к $x=x(t)$, она непрер. и строго монот. $Y(x)=y(t(x))$ – -сложная ф-я. $t'_x(x_0)=\frac{1}{x'_t(t_0)} \Rightarrow$

$\exists Y'_x(x_0)=y'_t(t_0)\cdot t'_x(x_0)=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$

Теорема д-зана.