9. Кривые и поверхности 2-го порядка

Геометрические образы 1-го порядка (прямая и плоскость)

прямая

плоскость

описываются уравнениями 1-го порядка:

$Ax + By + C = 0$

$Ax + By + Cz + D = 0$

Геометрические образы 2-го порядка (прямая и плоскость)

эллипс, гипербола, парабола

эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры

эллипсоид, сфера, однополостный и двуполостный гиперболоиды

конус, эллиптический и гиперболический параболоиды

описываются уравнениями 2-го порядка:

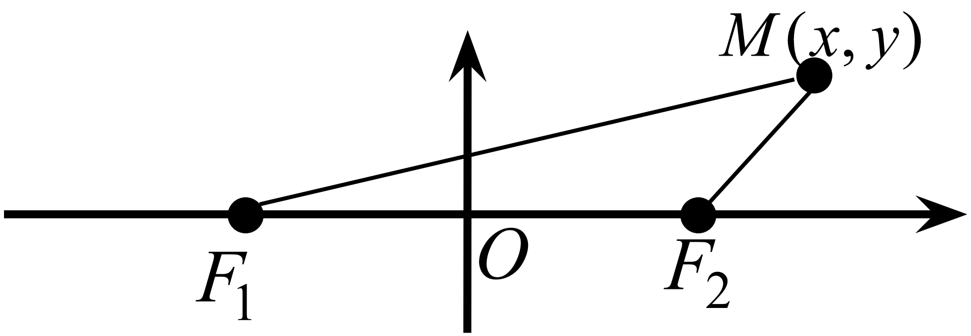
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \\ + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

9.1 Кривые второго порядка

9.1.1. Эллипс

Эллипс *— ГМТ плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек* F_1 *и* F_2 *постоянна и равная* $2a$

($2a>|F_1F_2|$).



F_1 и F_2 — ***фокусы*** эллипса.

$F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$

$|OF_1| = |OF_2| = c.$

$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a$$

фокальное свойство эллипса

фокальные радиусы

$$|(x+c, y)| + |(x-c, y)| = 2a$$

Вывод уравнения

$$|\overline{F_1M}|+|\overline{F_2M}|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad |^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

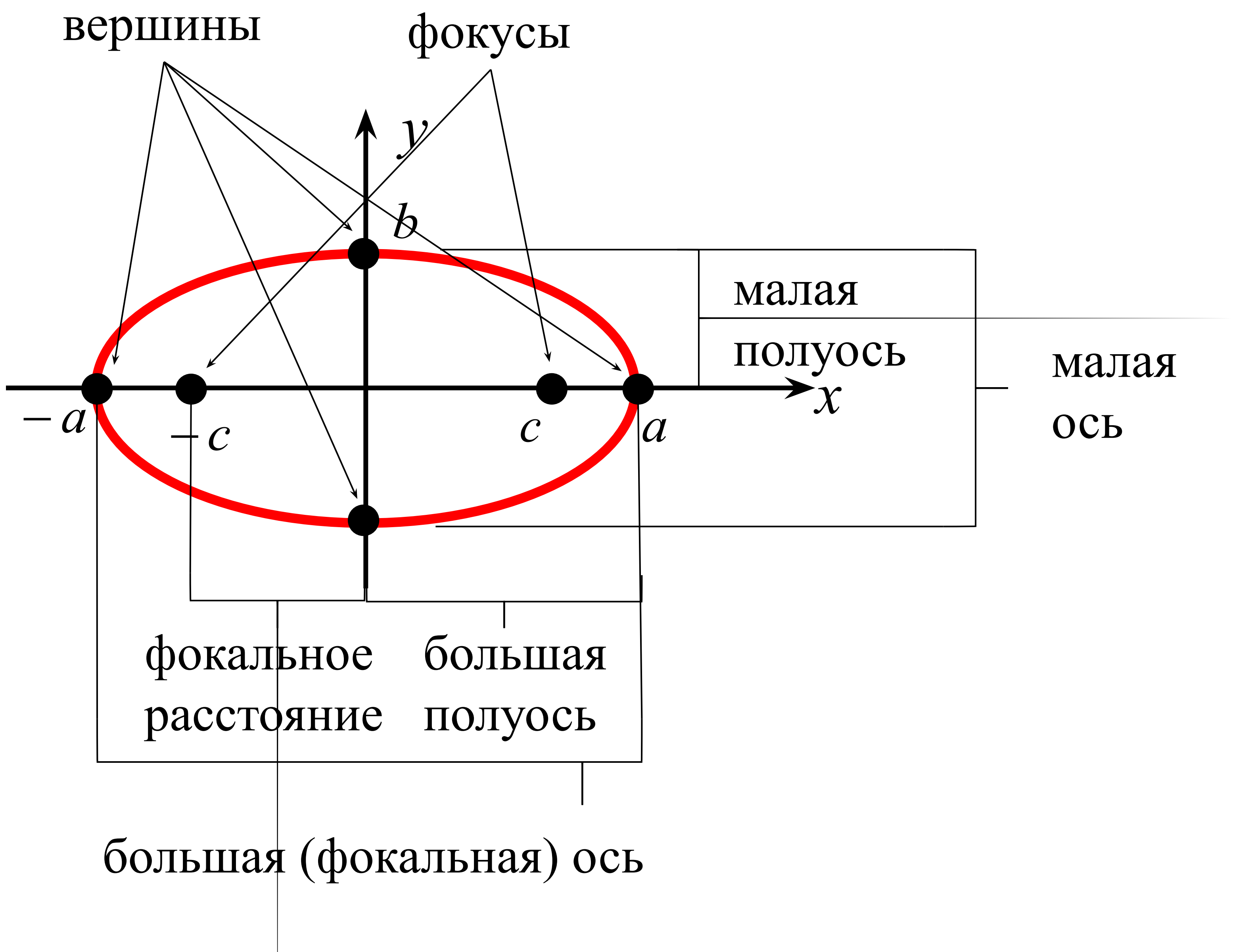
$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

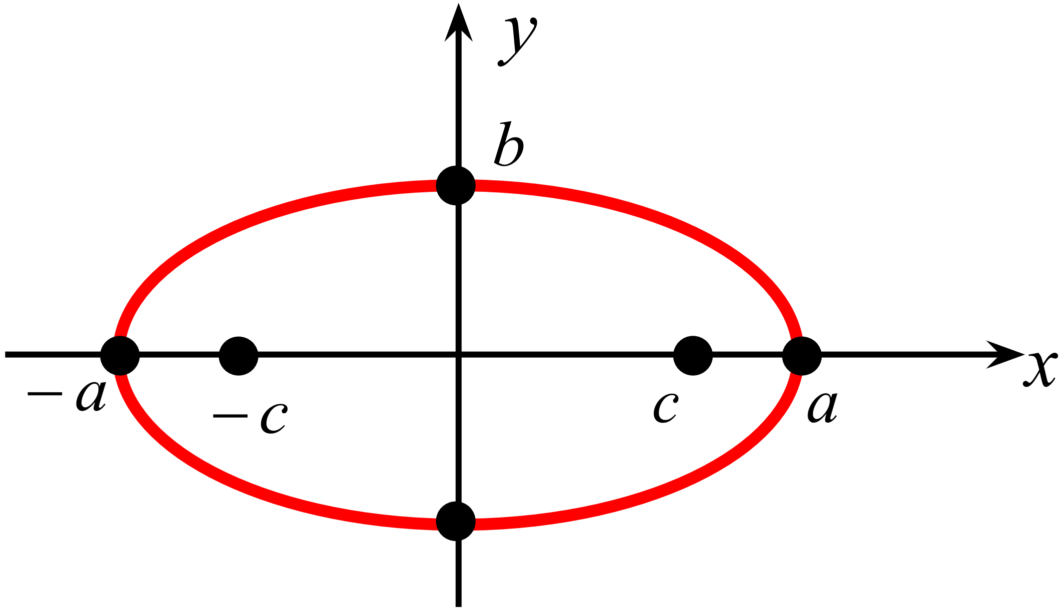
$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2$$

$$x^2-2xc+c^2+y^2=a^2-2cx+\left(\frac{cx}{a}\right)^2$$

$$x^2\frac{a^2-c^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2 \quad \boxed{\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad c^2=a^2-b^2}$$

Элементы эллипса





$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

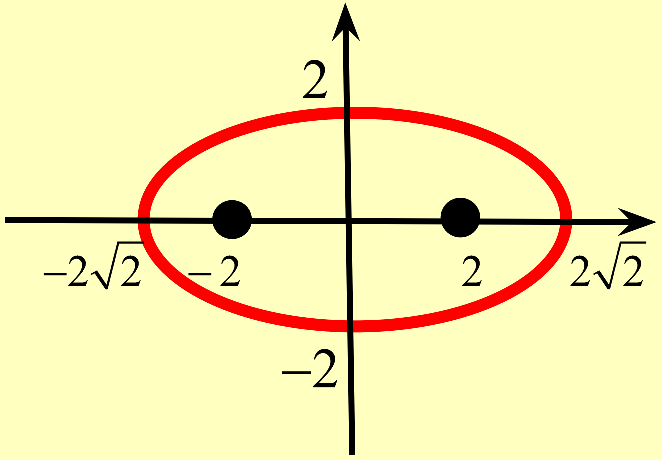
$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

эксцентриситет эллипса $\qquad e=\dfrac{c}{a}$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}<a \quad => \quad 0<e<1.$$

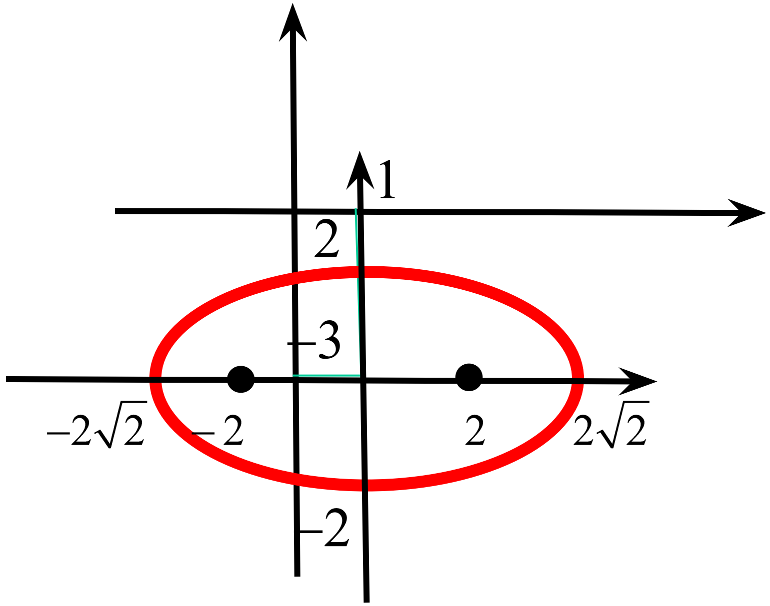
$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

$$c=\sqrt{8-4}=2 \quad => \quad e=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



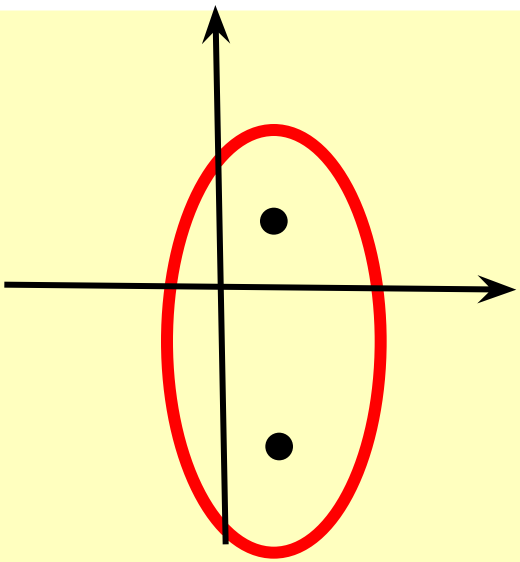
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ – *уравнение со смещенным центром*

$$\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$$



$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{8}=1$$

- большая и малая оси меняются местами



Приведение к каноническому виду

$$4x^2+24x+y^2-6y-4=0$$

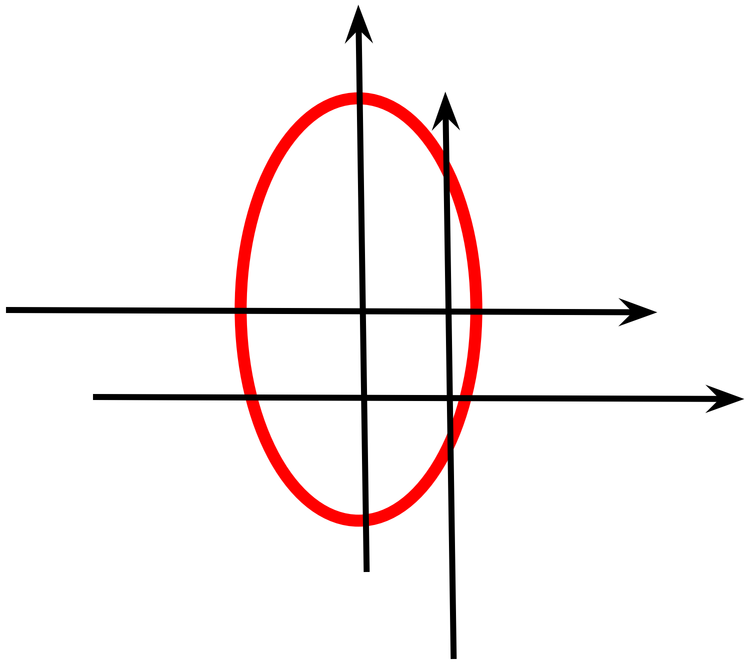
$$(2x)^2+2\cdot 6\cdot (2x)+6^2+y^2-2\cdot 3y+3^2-36-9-4=0$$

$$(2x+6)^2+(y-3)^2=49$$

$$\frac{4(x+3)^2}{49}+\frac{(y-3)^2}{49}=1$$

$$\frac{(x+3)^2}{(3,5)^2}+\frac{(y-3)^2}{7^2}=1$$

$$\frac{(y-3)^2}{7^2}+\frac{(x+3)^2}{(3,5)^2}=1$$



Параметрические уравнения эллипса

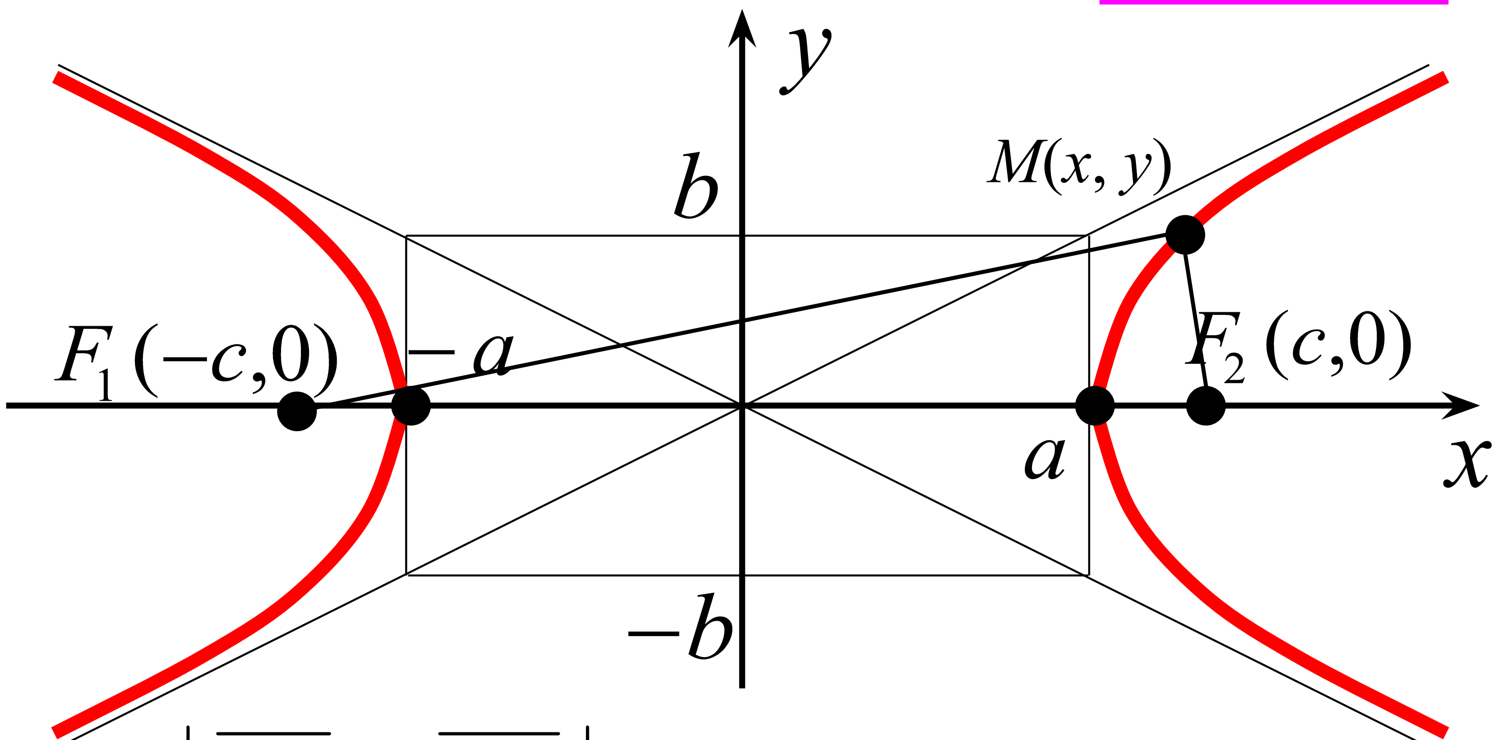
$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

9.1.2. Гипербола

Гипербола — *ГМТ плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек* F_1 *и* F_2 *величина постоянная и равная* $2a$ $(2a < |F_1F_2|)$.

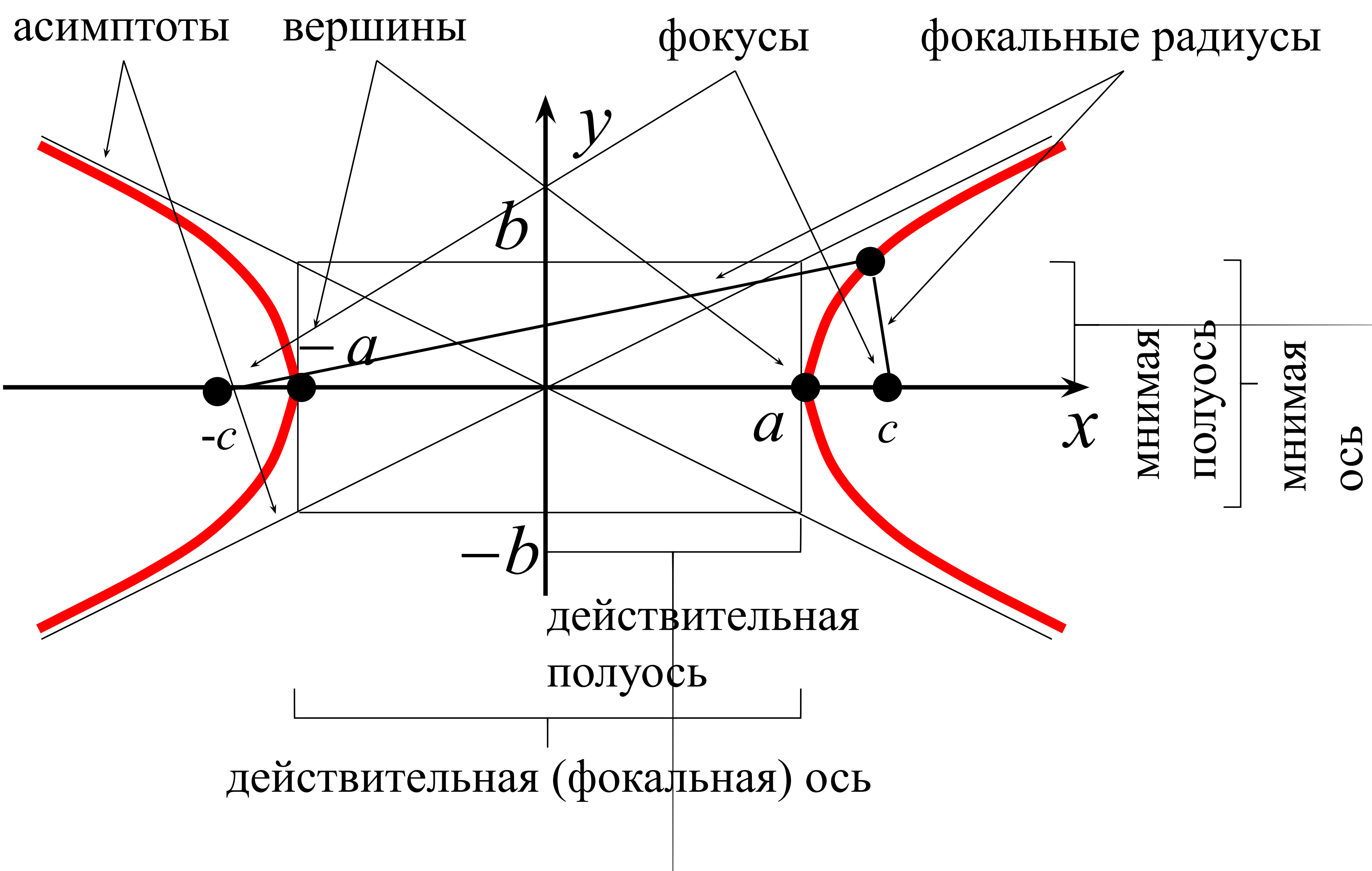
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} > a \quad \Rightarrow \quad e = \frac{c}{a} > 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



$$\left|\,|\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|\,\right| = 2a$$ - фокальное свойство гиперболы

Элементы гиперболы



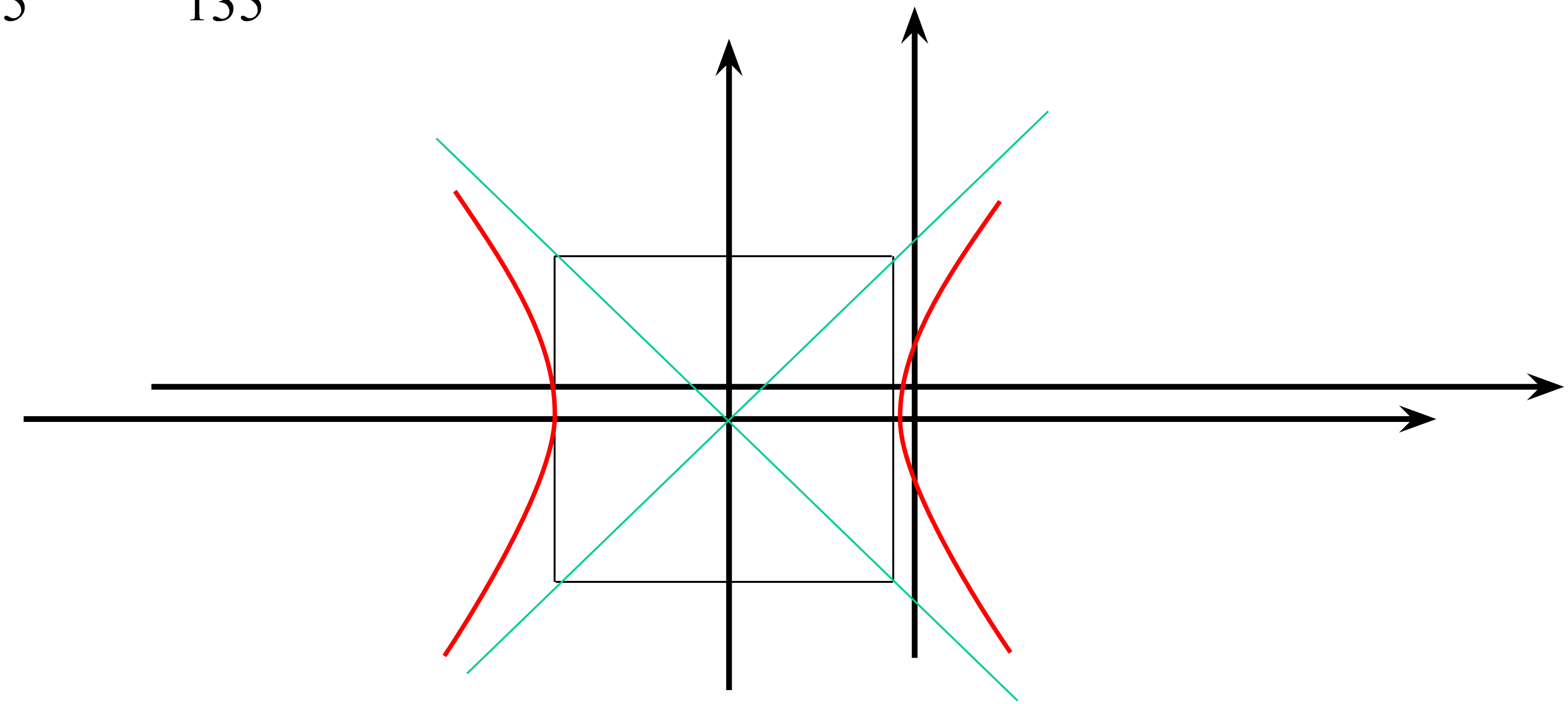
Приведение к каноническому виду

$$x^2+24x-y^2-6y=0$$

$$\left(x^2+24x+144\right)-\left(y^2+6y+9\right)=144-9$$

$$\left(x+12\right)^2-\left(y+3\right)^2=135$$

$$\frac{\left(x+12\right)^2}{135}-\frac{\left(y+3\right)^2}{135}=1$$



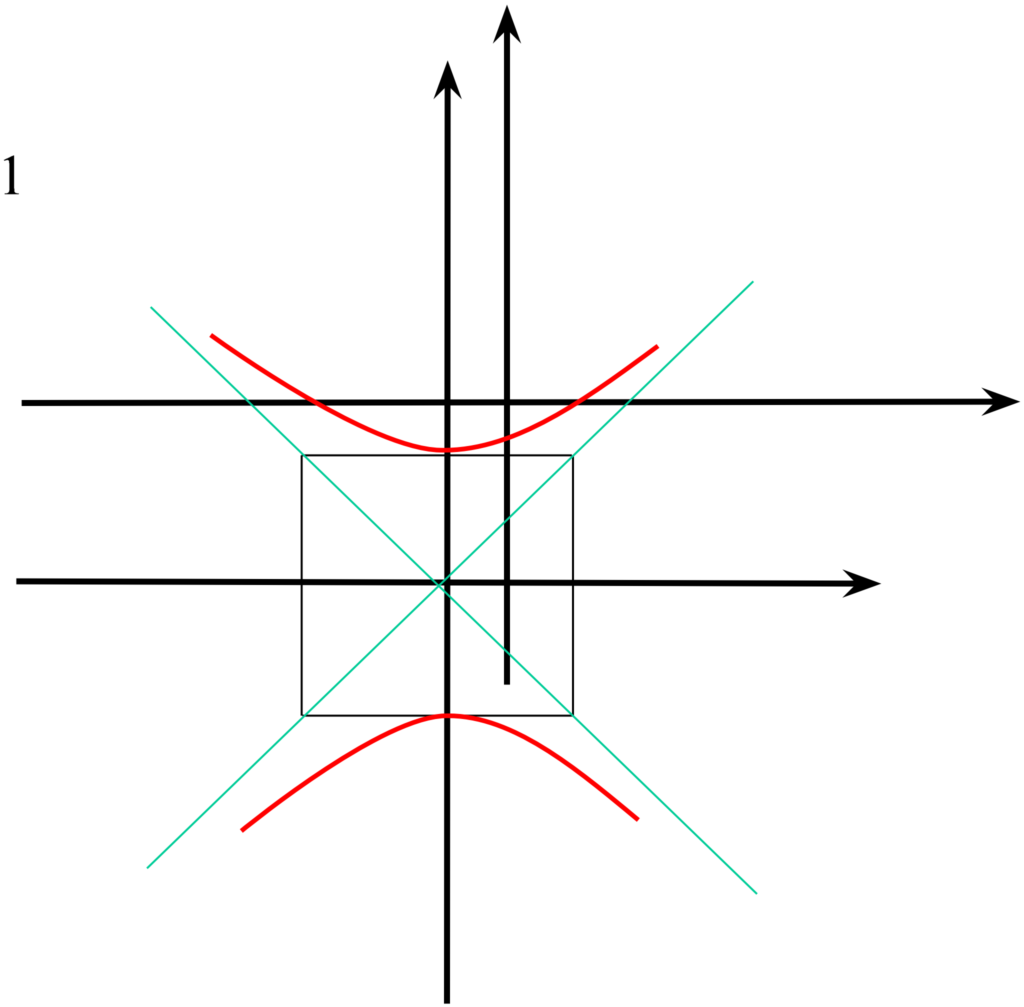
Приведение к каноническому виду

$$x^2+2x-y^2-6y-1=0$$

$$\left(x^2+2x+1\right)-\left(y^2+6y+9\right)=4-9+1$$

$$\left(x+1\right)^2-\left(y+3\right)^2=-4$$

$$\frac{\left(y+3\right)^2}{4}-\frac{\left(x+1\right)^2}{4}=1$$

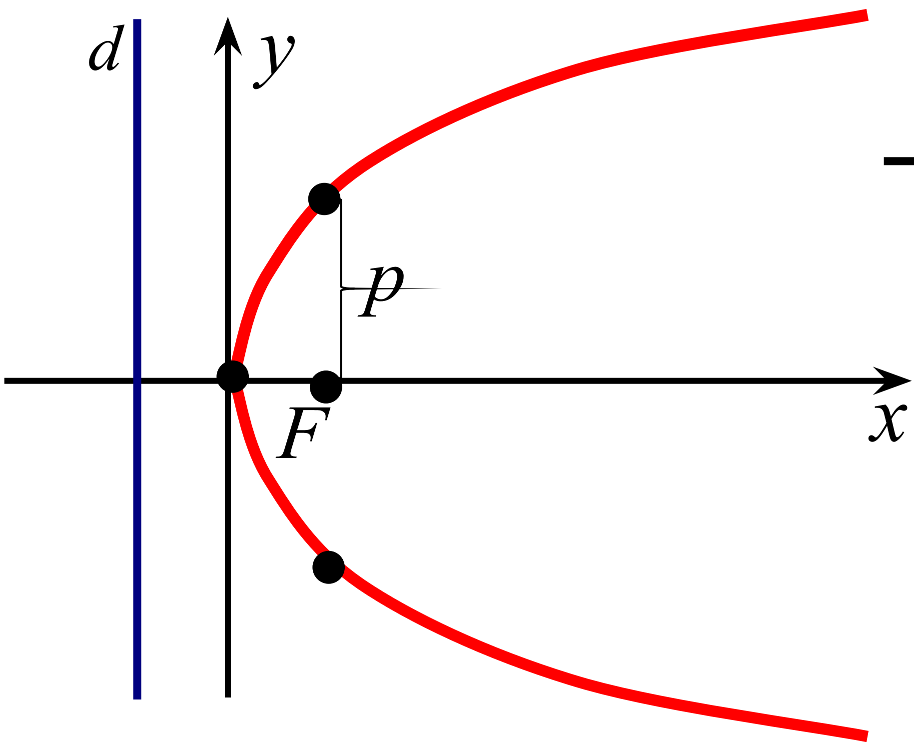


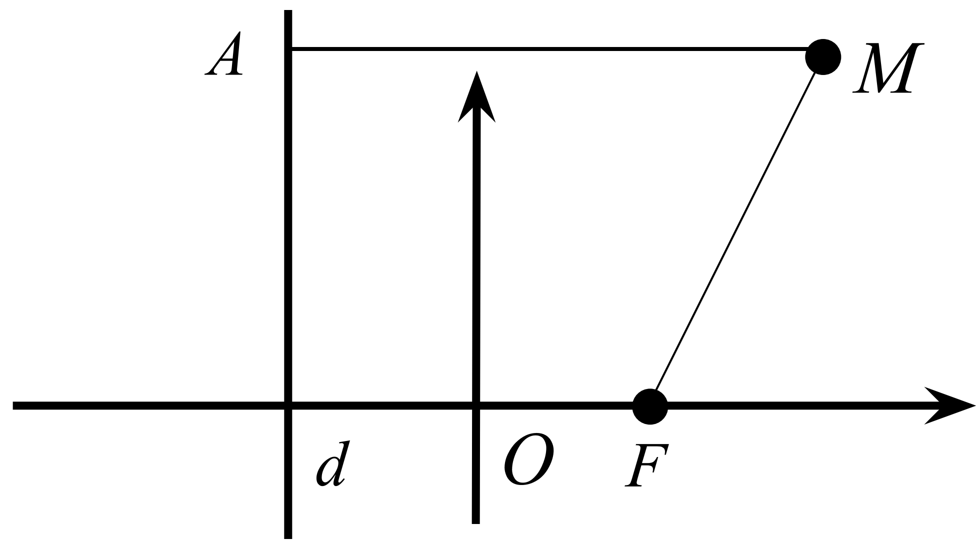
9.1.3. Парабола

Парабола *— ГМТ плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой* ***d*** *и до фиксированной точки F (не лежащей на прямой* ***d****) одинаково.*

F ***— фокус параболы***, ***d*** – ***директриса***.

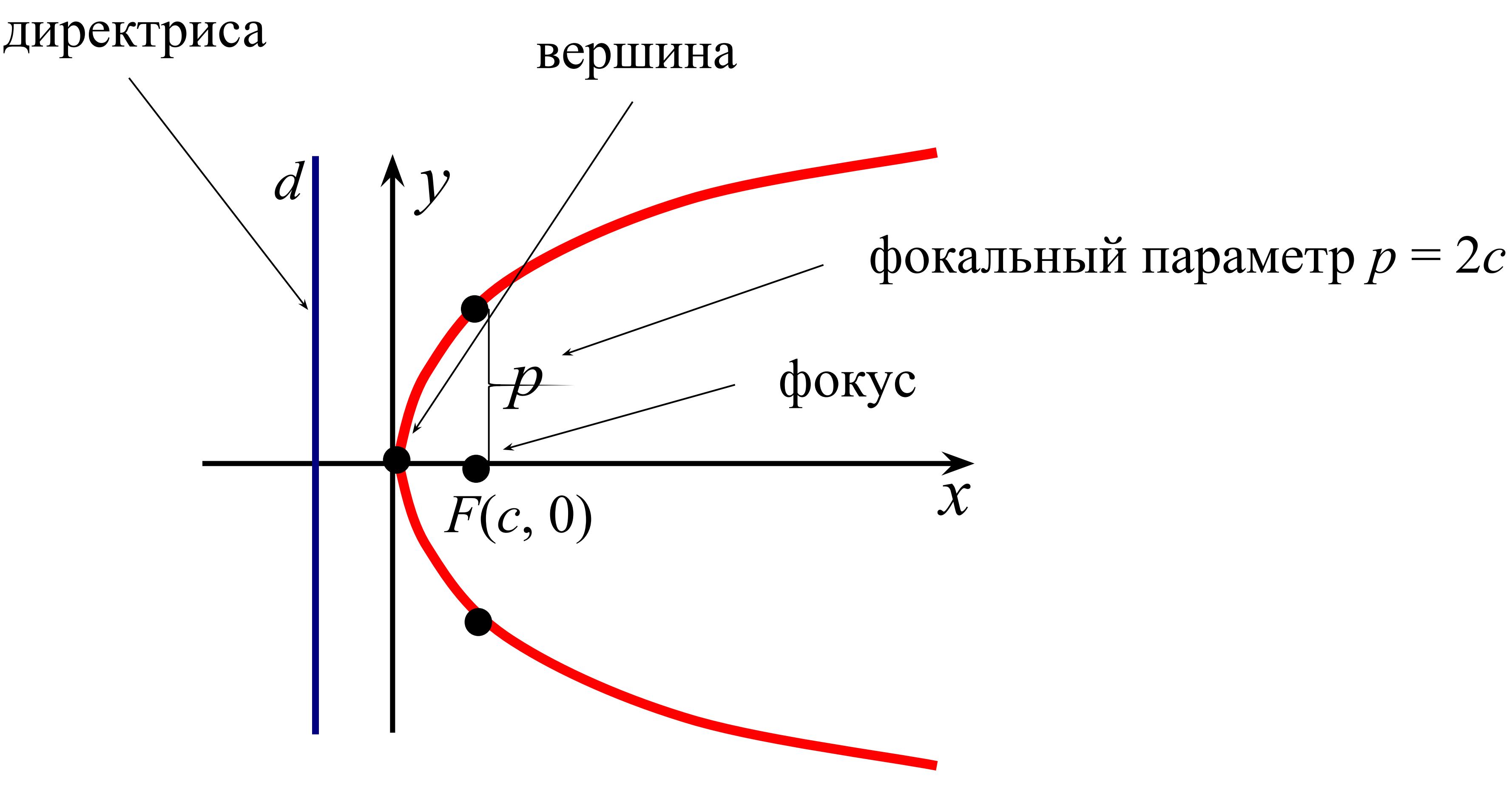
$y^2 = 2px$ или $x = ay^2$





$|AM| = |FM|$ - фокальное свойство параболы

Элементы параболы



9.1.4. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы

$d_{1,2} : x = \pm \dfrac{a}{e}$ — ***директрисы*** *эллипса и гиперболы*

M – произвольная точка кривой.
$r_i = |MF_i|$ — расстояние до фокуса,
$\rho_i = \rho(M, d_i)$ — расстояние до директрисы

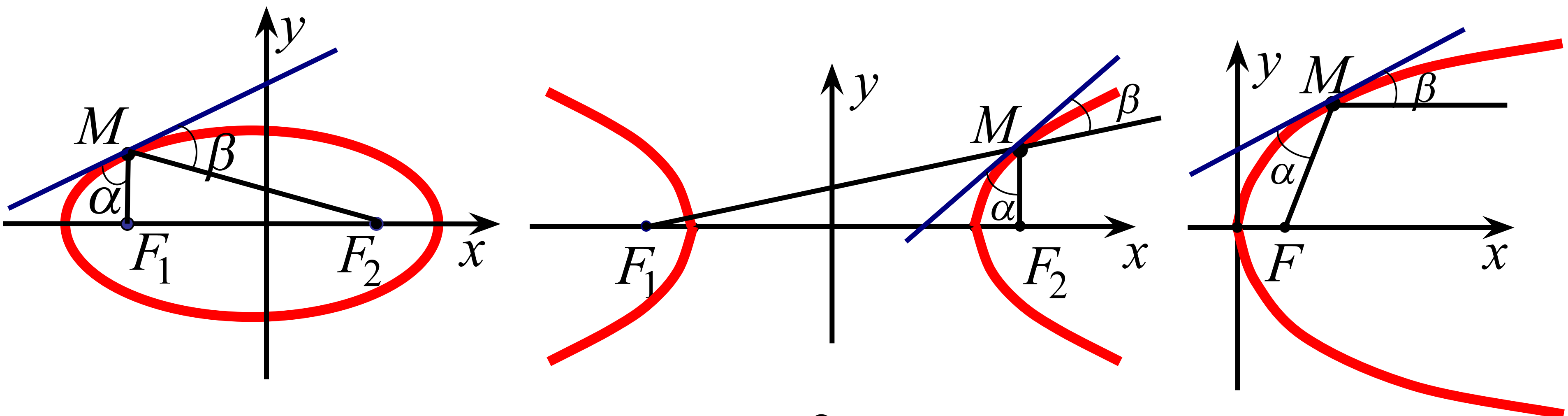
ТЕОРЕМА.
Для любой точки эллипса, гиперболы или параболы имеет место равенство

$$\frac{r_i}{\rho_i} = e$$

ГМТ, *для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы постоянно и равно* ***e***, *называется*

1) *эллипсом, при* ***e***<1 ;
2) *гиперболой, при* ***e***>1;
3) *параболой, при* ***e*** $= 1$.

9.1.5. Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы



$$\alpha = \beta$$

1) Если источник света находится в фокусе эллиптического зеркала, то лучи, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе.

2) Если источник света находится в фокусе гиперболического зеркала, то лучи, отразившись от зеркала, идут так, как если бы они исходили из другого фокуса.

3) Если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи, отразившись от зеркала, идут параллельно оси.