Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

- *1. Два комплексных числа*
- $z_1 = a_1 + b_1 i$ *и* $z_2 = a_2 + b_2 i$
- ***равны*** *тогда и только тогда, когда*
- $a_1 = a_2$ *и* $b_1 = b_2$,
- *т.е. когда равны и* ***действительные*** *и* ***мнимые*** *части комплексных чисел.*

Замечание

- *Понятия*
- *«больше»,*
- *«меньше»*
- *для комплексных чисел не определяются.*
- *Записи*
- $i > 0$, $1 + i < 2$
- *и им подобные лишены всякого смысла.*

- *Формула **сложения** комплексных чисел в новых обозначениях записывается так:*
- $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$ *.(1)*
- *Она дает правило сложения комплексных чисел в алгебраической форме.*

- ***Умножение*** *комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, производится следующим образом:*
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$. *(2)*

- *Положив в этой формуле*
- $a_1 = a_2 = 0$,
- $b_1 = b_2 = 1$,
- *получим важное соотношение*

$$i \cdot i = -1$$

- *или, применяя для произведения*

$$i \cdot i$$

- *сокращенное обозначение*
- $$i \cdot i = i^2 \quad ,$$
- *имеем:*
- $$i^2 = -1 \quad .$$

Пример 1.

- *Найти сумму и произведение комплексных чисел*
- $z_1 = a + bi$ *и* $z_2 = a - bi$.
- *Решение.*
- $z_1 + z_2 = (a + bi) + (a - bi) = 2a$,
- $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

Определение 1.

- *Комплексное число*

$$a - bi$$

- *называется сопряженным к числу*

$$z = a + bi$$

- *и обозначается*

- $$\overline{z}\ .$$

Утверждение.

- *Для любых комплексных чисел* $z, \quad z_1$
- *имеют место равенства:*
- *1)* $\bar{\bar{z}} = z$,
- *2)* $\overline{z + z_1} = \bar{z} + \overline{z_1}$,
- *3)* $\overline{z \cdot z_1} = \bar{z} \cdot \overline{z_1}$,
- *4)* $\bar{z}^{-1} = \overline{z^{-1}}$.
- *Все равенства доказываются непосредственной проверкой.*

- ***Деление*** *комплексных чисел в алгебраической форме производится согласно следующей формуле:*
- $$\frac{z_2}{z_1} = \frac{a_2 + b_2 i}{a_1 + b_1 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2} i \quad .$$

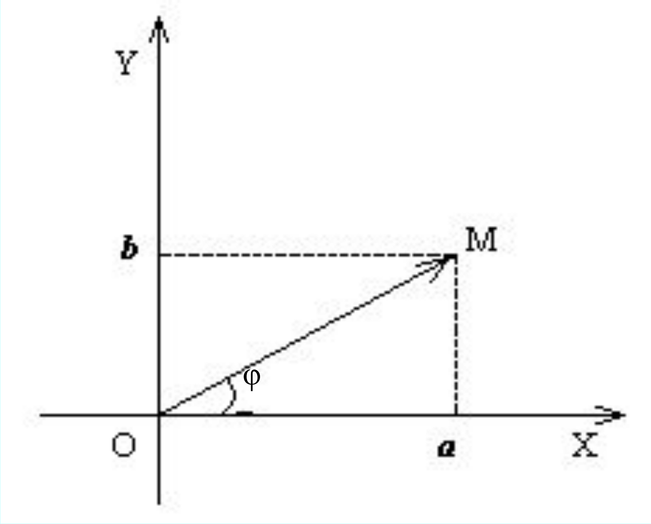
- *Произведем преобразование* $\dfrac{z_2}{z_1}$
- *другим способом.*
- *Умножим числитель и знаменатель на*
- $\overline{z_1}$,
- *получим:*

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\cdot\overline{z_1}}{z_1\cdot\overline{z_1}}=\frac{(a_2+b_2i)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}i$$

- *Другими словами, чтобы найти частное двух комплексных чисел надо*
- ***числитель*** *и* ***знаменатель***
- *умножить на число,* ***сопряженное*** *к знаменателю.*

Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

- *Возьмем на плоскости декартову систему координат* ***XOY*** *и изобразим комплексное число* $z = a + bi$
- *точкой плоскости с координатами* a, b



- *В итоге комплексному числу* z
- *будет сопоставлена точка* **M** *плоскости.*
- *Соответствие между комплексными числами и точками координатной плоскости* ***XOY*** *биективно, поэтому иногда множество комплексных чисел отождествляют с множеством точек координатной плоскости.*

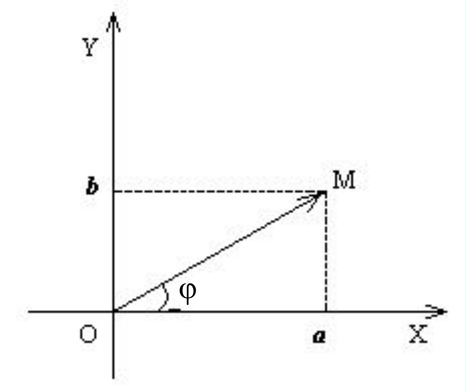
Определение 2.

- *Расстояние от точки O координатной плоскости XOY до точки M, изображающей комплексное число* z ,
- *называют модулем числа* z
- *и обозначают в виде* $|z|$.

Определение 2.

- ***Наименьший угол***, *на который нужно повернуть ось* ***OX*** *против часовой стрелки до совпадения ее направления с* z
- *направлением вектора ОМ, называется* ***аргументом*** *числа* $z \neq 0$
- *и обозначается в виде* $Argz$.
- *Для* $z = 0$
- *аргумент не определяется.*

Определение 2.



- *Непосредственно из рисунка видно, что модуль числа* $z = a + bi$
- *находится по формуле:*

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

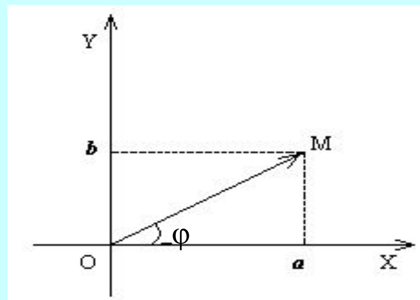
- *Аргумент числа* $z = a + bi$
- *определяется из формулы*
- $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$
- *при*
- $a \neq 0$;

- $Argz$ *определяется* **неоднозначно**,
- *а с точностью до слагаемого, кратного* 2π:
- $Argz = \arg z + 2k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$
- *где* $\arg z$
- *есть главное значение* $Argz$,
- *определяемое условиями*
- $-\pi < \arg z \leq \pi$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a}, & если\ \ x > 0, \\ \pi - arctg\,\dfrac{b}{a}, & если\ \ x < 0,\ \ y \geq 0, \\ -\pi + arctg\,\dfrac{b}{a}, & если\ \ x < 0,\ \ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & если\ \ x = 0,\ \ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & если\ \ x = 0,\ \ y < 0. \end{cases}$$

φ

- *Из изображения комплексного числа*



- *следует, что*
- $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$,
- *и, следовательно,*
- $z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

- *Запись комплексного числа в виде*

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

- *называется* ***тригонометрической формой*** *комплексного числа.*

Теорема

- *Для любых комплексных чисел*
- $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *и* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$
- *справедливы равенства:*
- *1)* $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ *;*
- *2)* $z_1^n = r_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1), \quad n \in N$.

Теорема

- *Если* $z_2 \neq 0$,
- *то справедливо равенство:*
- *3)* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right)$.
- *Доказательство равенств провести в качестве упражнений.*

- *Формула*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

- *называется* ***формулой Муавра***
- *в честь английского математика*
- *А. де Муавра (1667 – 1754).*

- *Наряду с этой формулой им же была выведена и формула извлечения корня степени из комплексного числа ,*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

- *т. е. формула нахождения всех корней уравнения*

$$x^n = z$$

- *относительно неизвестного х.*

- *Пусть*

$$\sqrt[n]{z} = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$$

- *возведем обе части равенства в степень n*
- *и, воспользовавшись, формулой Муавра получим:*
- $\rho^n\left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right) = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

- *В силу равенства двух комплексных чисел получаем равенства:*
- $\rho^n = r$ *и* $n\psi = \varphi + 2\pi k$
- *или*
- $\rho = \sqrt[n]{r}$ *и* $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$

- *где k – некоторое целое число,*
- $\sqrt[n]{r}$ *- арифметический корень из действительного неотрицательного числа r.*

- *Таким образом,*
- $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k \in Z \qquad ,$$
- *причем*
- $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Пример.

- *Найти все значения корня* $\sqrt[3]{2+2i}$
- *Имеем в тригонометрической форме число*

$$2+2i=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- *Согласно формуле*
- $$\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=\sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right),$$
- $k=0,\ 1,\ 2$.

- *Получим три значения:*
- $z_0 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\right)$;
- $z_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ\right)$;
- $z_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos 255^\circ + i\sin 255^\circ\right).$

- *Переведем комплексное число, записанное в тригонометрической форме в алгебраическую форму.*
- $\cos 15^\circ = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$
- $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$;

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

- $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;
- $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos 255^\circ = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$;
-
- $\sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

Поэтому

-
- $z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
- $z_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i$
- $z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
-

- *Применение формулы Муавра к преобразованиям тригонометрических выражений.*

Пример

- *Выразить* $tg5\varphi$
- *через* $tg\varphi$
- *Имеем соотношение*
- $\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5$

- *Возведя правую часть в 5-ую степень, получим*

$$\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi -$$

$$-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi +$$

$$+5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi$$

- *пользуемся тем, что*

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

- *Из равенства чисел, получим*

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10\cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5\cos\varphi \sin^4 \varphi$$

$$\sin 5\varphi = 5\cos^4 \varphi \sin\varphi - 10\cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi$$

- *откуда*

$$tg5\varphi = \frac{5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi}{\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi} =$$

$$= \frac{5tg\varphi - 10tg^3\varphi + tg^5\varphi}{1 - 10tg^2\varphi + 5tg^4\varphi}$$

- *мы поделили числитель и знаменатель на*

$$\cos^5\varphi$$

- *В качестве упражнения преобразовать в сумму*

$$B = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$$