# Курс « Динамика и устойчивость сооружений»

# Тема 1. Основы теории колебаний систем с сосредоточенными параметрами

## Лекция 1. Основные понятия теории колебаний и динамики сооружений

### *1.1. Понятия о колебаниях*

Рассмотрим некоторую механическую систему (*систему материальных точек, абсолютно твердых тел, упругие и вообще деформируемые тела*), взаимодействующих между собой и с окружающей средой по некоторому закону.

Пусть состояние системы в каждый момент времени дописывается некоторым набором параметров.

Возьмем один из числовых параметров системы $\boldsymbol{u}$.

Рассмотрим изменение этого параметра во времени $\boldsymbol{t}$ .

Это изменение может быть монотонным, немонотонным, существенно немонотонным (рис. 1).

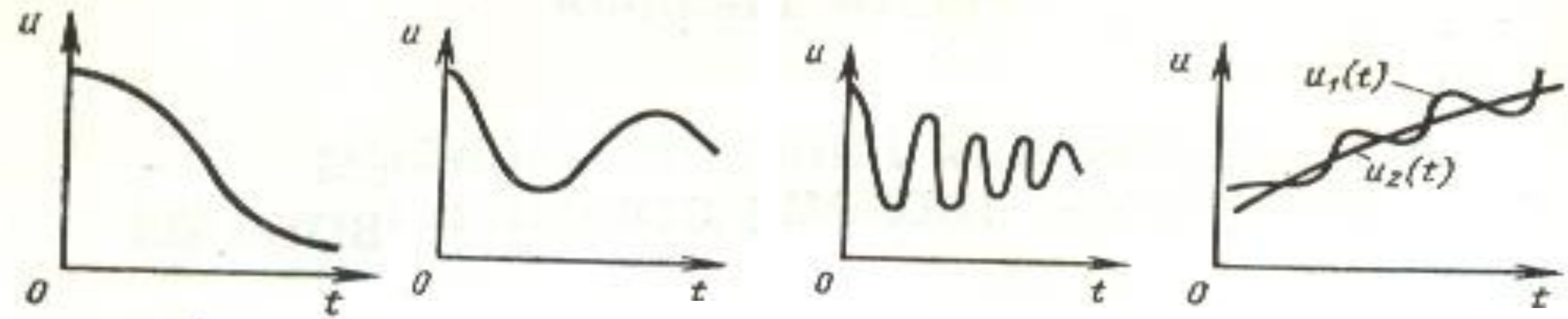



Рис. 1. Изменение параметра $u(t)$:
а) монотонное б) немонотонное в, г) существенно немонотонное

Процесс изменения параметра, который характеризуется многократным поочередным возрастанием и убыванием параметра во времени, называется ***колебательным процессом*** или просто ***колебаниями***.

Можно сформулировать более общее определение колебательного процесса: параметр $\boldsymbol{u_1(t)}$ совершает на заданном отрезке времени колебания относительно параметра $\boldsymbol{u_2(t)}$(и наоборот), если разность $\boldsymbol{u_1(t) - u_2(t)}$ на этом отрезке многократно изменяет знак (рис. 1,г).

Система, способная при определенных условиях совершать ***колебания***, называется ***колебательной системой***.

## 1.2. Классификация колебательных систем

***Понятие об уравнении системы.*** Классификация колебательных систем связана со свойствами операторного уравнения, устанавливающего зависимость между вектором состояния системы $\boldsymbol{u(t)}$ и вектором $\boldsymbol{F(t)}$ воздействий на систему со стороны окружающей среды:

$$\boldsymbol{Lu = F} \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{L}$ - оператор системы, включающий в себя все уравнения и дополнительные условия, необходимые для однозначного описания поведения системы $\boldsymbol{u(t)}$ при внешнем воздействии $\boldsymbol{F(t)}$.

Для механических систем операторное уравнение (1), как правило, сводится к совокупности некоторых ***дифференциальных уравнений*** с граничными и начальными условиями,

а также с дополнительными соотношениями типа уравнений связи.

### *1.2.1. Системы с конечным числом степеней свободы и распределенные системы.*

Классифицировать колебательные системы можно по различным признакам.

Одним из важнейших признаков является ***число степеней свободы*** системы, т. е. количество независимых числовых параметров, однозначно определяющих состояние системы (для механических систем - ***положение всех точек системы в пространстве***) в любой момент времени $t$.

Различают системы с ***конечным и бесконечным числом степеней свободы*** (либо счетным, либо континуальным).

Системы, обладающие континуальным множеством степеней свободы, называют ***распределенными*** (континуальными}.

Число степеней свободы зависит от характера идеализации реальной системы.

Упругие системы с распределенной массой являются распределенными системами; заменяя распределенную массу конечным числом сосредоточенных масс, получим систему с конечным числом степеней свободы.

Описываются с математической точки зрения:
- колебания систем с конечным числом степеней свободы - ***обыкновенными дифференциальными уравнениями***;
- колебания распределенных систем - ***дифференциальными уравнениями в частных производных***.

### *1.2.2. Линейные и нелинейные системы. Принцип суперпозиции.*

Система называется ***линейной***, если ее оператор является линейным, т. е. удовлетворяет условию

$$L(a_1\ u_1 + a_2\ u_2) = a_1 L\ u_1 + a_2 L\ u_2 \qquad (2)$$

Если условие (2) не выполняется, система называется ***нелинейной***.

Соотношение (2) содержит в себе принцип суперпозиции для линейных систем.

### *1.2.3. Стационарные и нестационарные системы.*

Если свойства системы не изменяются на данном отрезке времени, то систему называют ***стационарной***.

Если свойства системы изменяются во времени, то ее называют ***нестационарной***.

Процессы, происходящие в стационарных системах, описываются ***дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами***;

процессы, происходящие в нестационарных системах, — ***дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.***

### *1.2.4. Автономные и неавтономные системы.*

В операторном уравнении (1) для ***автономной системы*** следует положить $F=0$.

Колебательные процессы в автономных системах могут происходить лишь за счет внутренних источников энергии, либо энергии, сообщенной системе в виде начального возмущения.

Остальные системы называются ***неавтономными***.

### *1.2.5. Консервативные и неконсервативные системы.*

Система называется ***консервативной***, если ее полная механическая энергия остается постоянной при колебаниях. В противном случае система называется ***неконсервативной***.

Среди неконсервативных систем могут быть выделены:

**-** система называется ***диссипативной***, если полная механическая энергия автономной системы убывает.

**-** систему называют ***автоколебательной***, если она стационарна и автономна и если при определенных условиях в ней возможно самовозбуждение колебаний.

Автоколебательные системы характеризуются наличием в них источника энергии неколебательной природы, причем поступление энергии регулируется движением самой системы.

## *1.3. Классификация колебательных процессов*

***Свободные колебания.***

Колебания, которые совершаются при отсутствии переменного внешнего воздействия и без поступления энергии извне, называются ***свободными колебаниями.***

Они происходят за счет первоначально накопленной энергии, величина которой определяется перемещениями и скоростями, заданными системе в некоторый начальный момент времени.

***Свободные колебания*** могут происходить лишь ***в автономных системах***.

***Вынужденные колебания.*** Колебания, которые вызываются переменным внешним воздействием, называют ***вынужденными колебаниями***. Они характерны ***для неавтономных систем***.

***Параметрические колебания***. Колебания называют ***параметрическими***, если они вызываются ***изменением*** во времени ***параметров*** системы. Такие колебания возможны лишь ***в нестационарных системах***.

## *Автоколебания (самовозбуждающиеся колебания).*

Колебания называют самовозбуждающимися или ***автоколебаниями***, если они возникают и поддерживаются от источника энергии неколебательной природы, причем этот источник включен в систему.

Поступление энергии регулируется движением системы.

***Автоколебания*** возможны лишь ***в неконсервативных стационарных системах***, при этом параметры установившихся автоколебаний в существенной степени определяются нелинейными свойствами системы.

В колебательных системах возможны процессы смешанного характера, которые представляют собой результат наложения свободных колебаний, колебаний, возбуждаемых внешними воздействиями, параметрически возбуждаемых колебаний и колебаний, возбуждаемых внутренними источниками энергии.

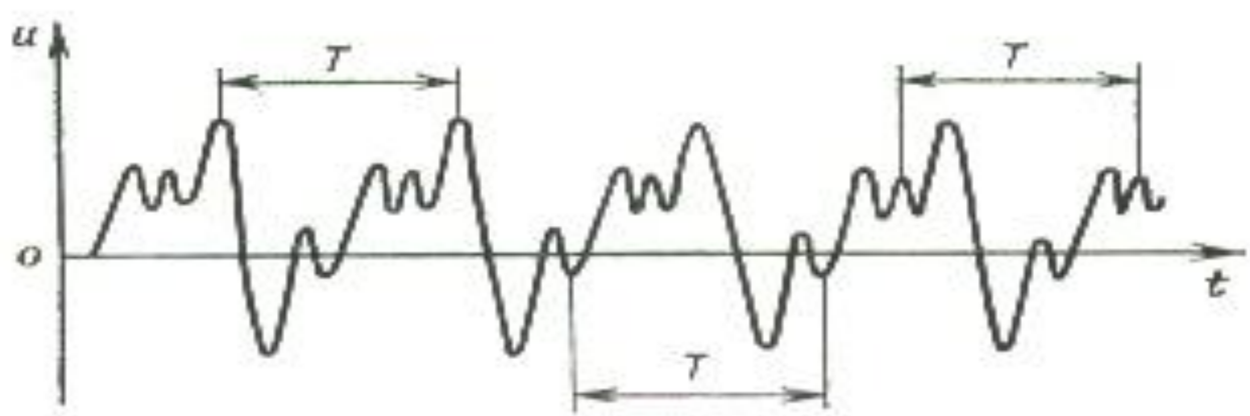
## *1.4. Кинематические характеристики периодических колебательных процессов*

Пусть процесс характеризуется одной скалярной переменной $\boldsymbol{u(t)}$.

Пусть эта переменная — ***перемещение***; тогда ее первая производная по времени — ***скорость*** и вторая производная — ***ускорение***.

***1.4.1. Периодические колебания.*** Колебания называются периодическими, если любые значения колеблющейся величины повторяются через равные отрезки времени. .

Более точно, колебания называются периодическими, если существует такое число $\boldsymbol{T}$, что для любого $\boldsymbol{t}$ выполняется условие (рис. 2) $\boldsymbol{u(t + T) = u(t)}$. Наименьшее из этих значений называется ***периодом колебаний***.



Обозначим его через $T$. Величина, обратная периоду колебаний, называется ***частотой колебаний***: $f = 1/T$.

В технике период колебаний обычно измеряется ***в секундах***; частота $f$, следовательно, имеет размерность ***1/с*** ***(с⁻¹)***

В теоретические формулы входит величина, называемая ***угловой (циклической) частотой***

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (3)$$

Она также измеряется в $c^{-1}$. Эта частота равна числу периодов колебаний, которые укладываются на отрезке времени продолжительностью $2\pi$ с.

Необходимо остерегаться смешения частот $f$ и $\omega$

Частоту $f$ обычно измеряют в герцах (Гц).

Для угловой частоты наряду с размерностью $c^{-1}$ часто используют размерность ***рад/с***.

**1.4.2.** ***Гармонические колебания.*** Простейшим (и наиболее важным) видом периодических колебаний являются ***гармонические (синусоидальные)*** колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется во времени по закону

$$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

$A, \omega, \varphi$ – постоянные параметры.

Параметр $\boldsymbol{A}$ равен наибольшему значению колеблющейся величины и называется ***амплитудой***.

$\varphi$ называется ***начальной фазой колебаний***.

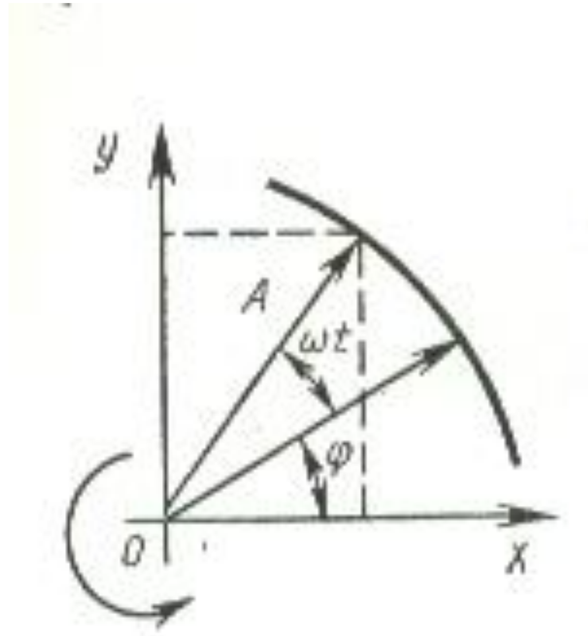
$\omega t + \varphi$ называется фазой колебаний в момент времени $\boldsymbol{t}$.

$\omega$ является угловой частотой.

Период гармонических колебаний выражается через угловую частоту:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5)$$

Для наглядного представления гармонических колебаний можно использовать круговую диаграмму (рис. 3).




Для этого на плоскости вводится вектор длиной $\boldsymbol{A}$, который вращается с постоянной угловой скоростью, равной $\omega$

Начальное положение вектора задается углом $\varphi$.

Проектируя конец вектора на вертикальную ось, получим закон движения в форме (4).

Скорость при гармонических колебаниях

$$v = \frac{du}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

а ускорение

$$w = \frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

Скорость ***v(t)*** и ускорение ***w(t)*** при гармонических колебаниях также изменяются во времени по синусоидальному закону с той же частотой, что и перемещение ***u(t)***.

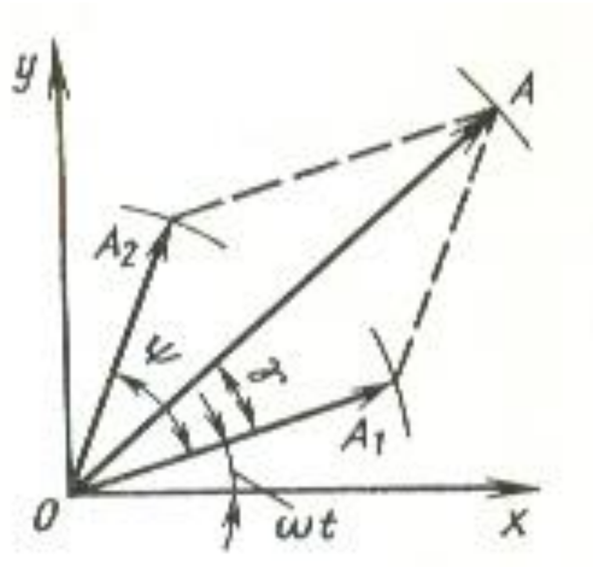
Амплитуды скорости и ускорения равны соответственно $\omega A$ и $\omega^2 A$

В технической литературе перемещение, скорость и ускорение при колебательном движении называют соответственно ***виброперемещением, виброскоростью и виброускорением***.

Сумма двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами будет гармоническим колебанием с той же частотой:

$$A_1 \cos\omega t + A_2 \cos(\omega t + \psi) = A\cos(\omega t + \gamma) \quad (8)$$

Амплитуда и фаза результирующих колебаний могут быть найдены, например, из круговой диаграммы (рис. 4):




$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\psi}\ ;$$

$$tg\gamma = \frac{A_2 \sin\psi}{A_1 + A_2\cos\psi} \qquad (9)$$

**1.4.3.** ***Полигармонические колебания. Полигармоническими*** называют колебания, которые могут быть представлены в виде суммы двух или более гармонических колебаний с частотами (периодами), находящимися между собой в рациональном соотношении.

***Пример:*** колебательный процесс, являющийся суммой двух гармонических процессов

$$u(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \qquad (10)$$

Существенно, чтобы отношение частот было рациональным числом.

Пусть $\omega_1 = m\omega$ , $\omega_2 = n\omega$ выражаются через некоторую частоту $\omega$ , где ***m*** и ***n*** - целые числа, причем ***m/ n*** **-** несократимая дробь.

Тогда сумма (10) будет периодической функцией с периодом $2\pi / \omega$