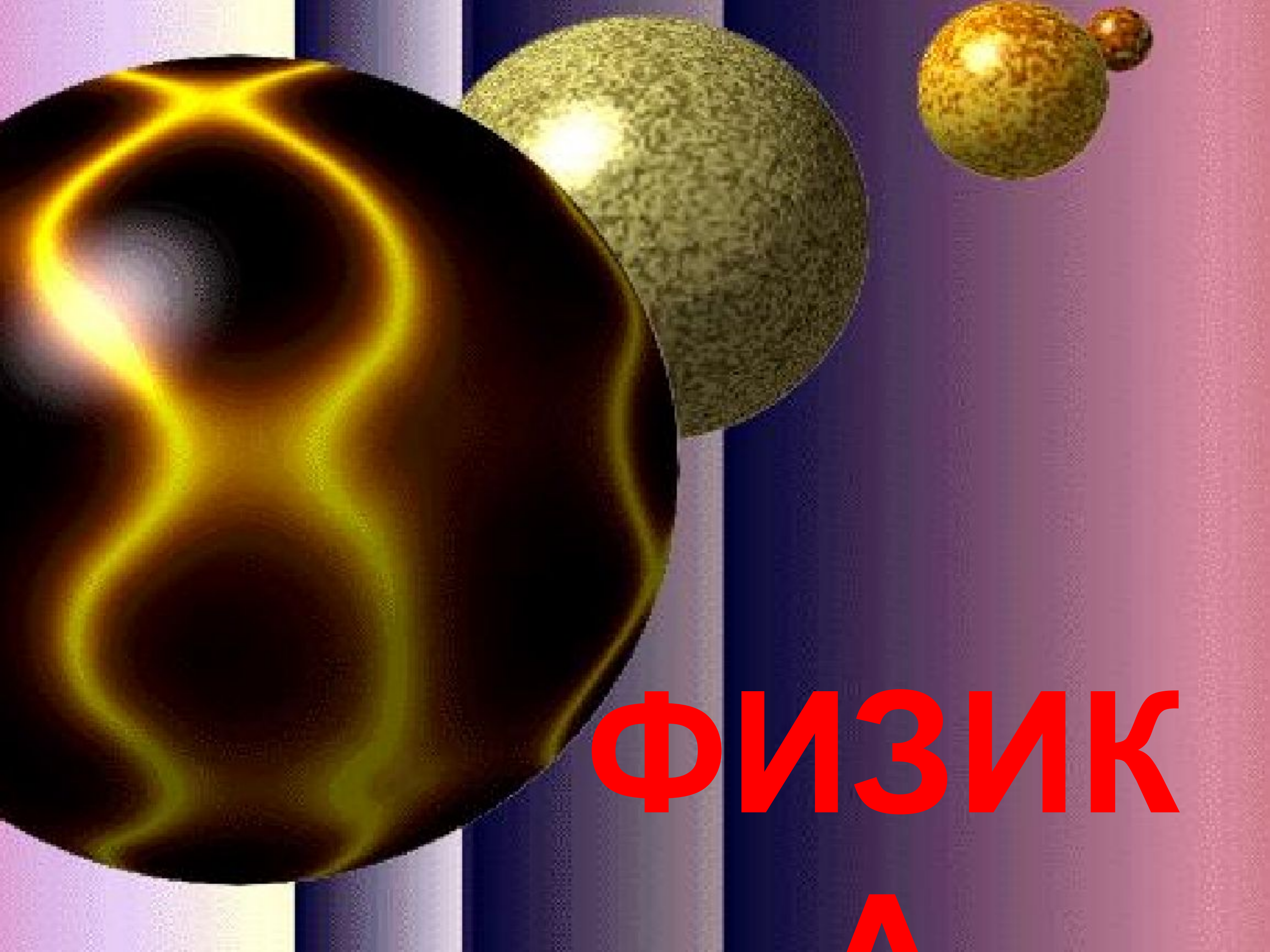

ФИЗИК
А

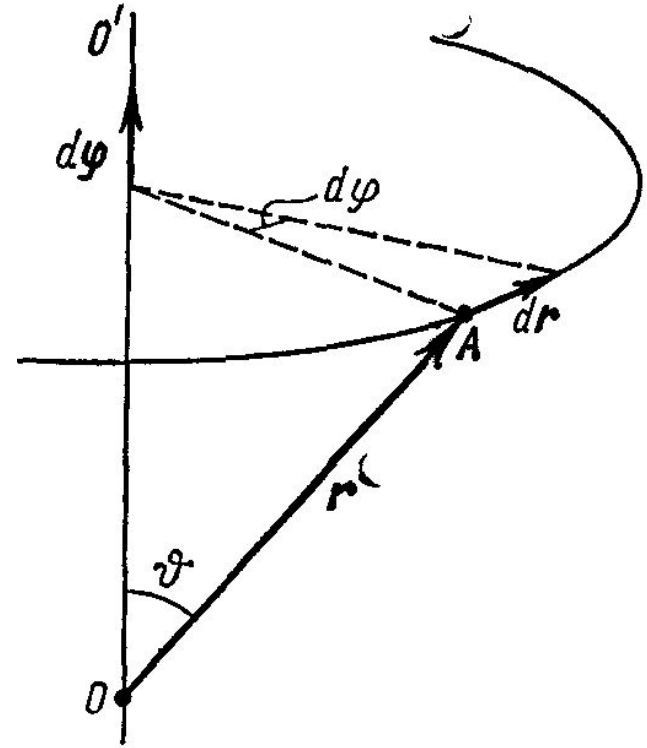
Лекция 2

- 1. Кинематика вращательного движения
- 2. Поступательное движение твердого тела. Теорема о движении центра масс
- 3. Вращение твердого тела. Основное уравнение динамики вращательного движения.
- 4. Работа и энергия. Законы сохранения механической энергии, импульса, момента импульса.

1.Кинематика вращательного движения

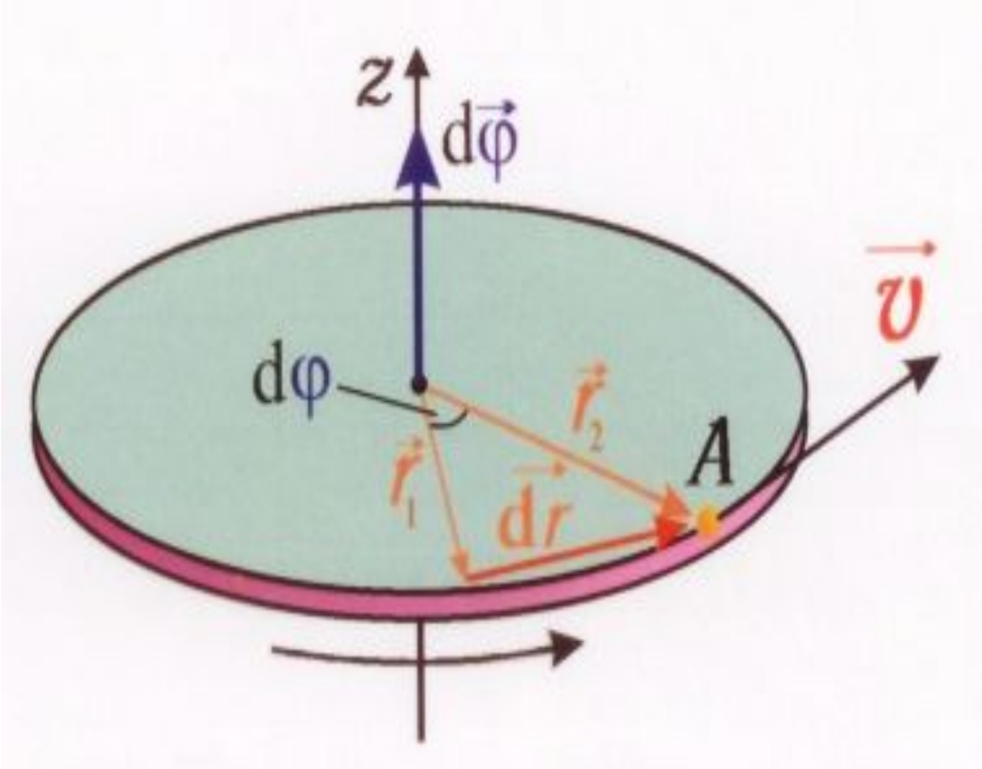
Поворот тела на некоторый угол **ф** можно описать с помощью вектора ***углового перемещением***, модуль которого равен ф, а направление совпадает с осью, вокруг которой производится поворот, и определяется ***правилом правого винта***.

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$$



Мгновенная угловая скорость вращения

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{\varphi}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{\varphi}}}{dt}$$

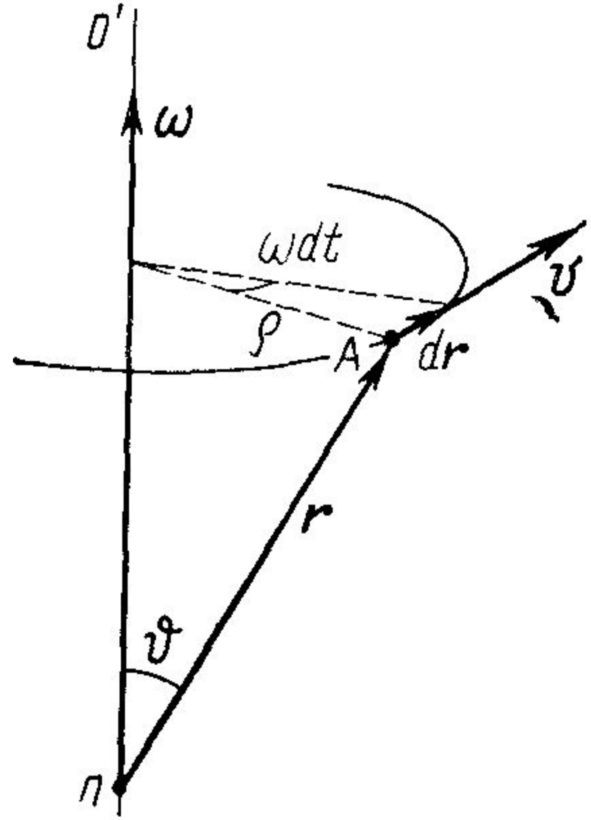


Вектор **ω** направлен вдоль оси, вокруг которой движется материальная точка, в сторону, определяемую правилом правого винта.

Связь между линейной и угловой скоростью

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$$

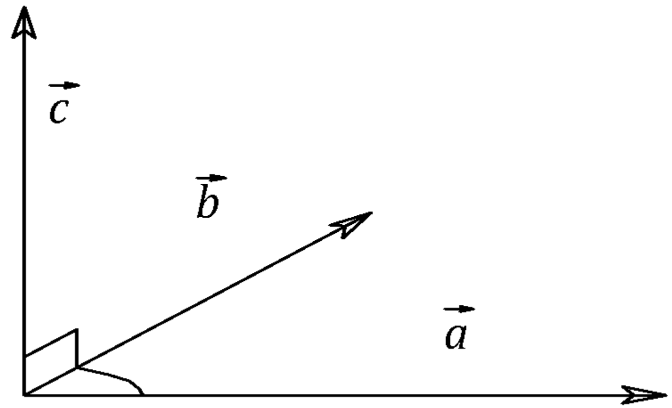


Угловые величины одинаковы для ВСЕХ точек вращающегося тела. Линейные величины зависят от r

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

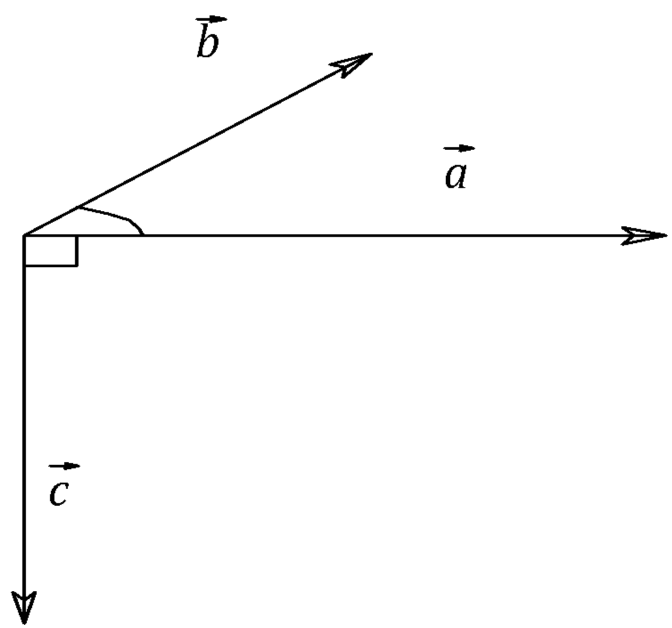
Векторное произведение 2-х векторов

- $$\left[\bar{a} \times \bar{b}\right] = \bar{c}$$



Результирующий вектор перпендикулярен плоскости в которой лежат перемножаемые вектора.

$$\left[\bar{b} \times \bar{a}\right] = -\bar{c}$$



Равномерное вращение

При равномерном вращении ω показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени.

Период обращения Т - время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол 2π. Поскольку промежутку времени Т соответствует угол поворота 2π, то

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

откуда период Т равен:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Число оборотов в единицу времени ν, равно:

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Мгновенное угловое ускорение

Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуют величиной, называемой мгновенным угловым ускорением:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

Направление вектора **ε** совпадает с направлением d**ω** – приращения вектора **ω**.

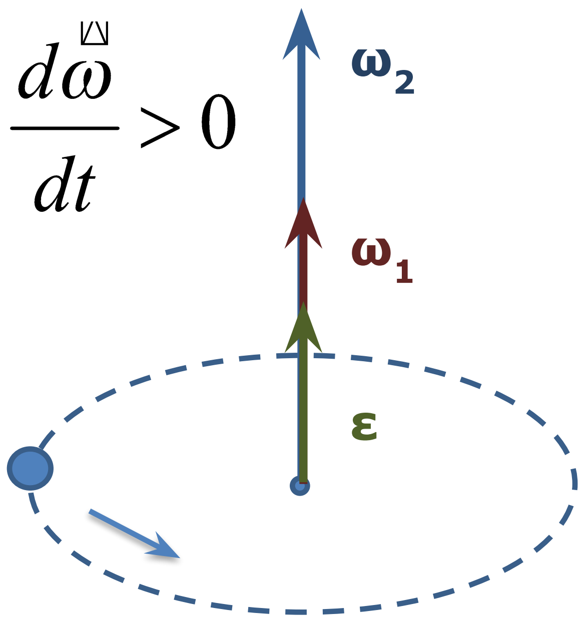
[ε] = рад/с^2

Движение по окружности с ускорением

СРЕДНЕЕ угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

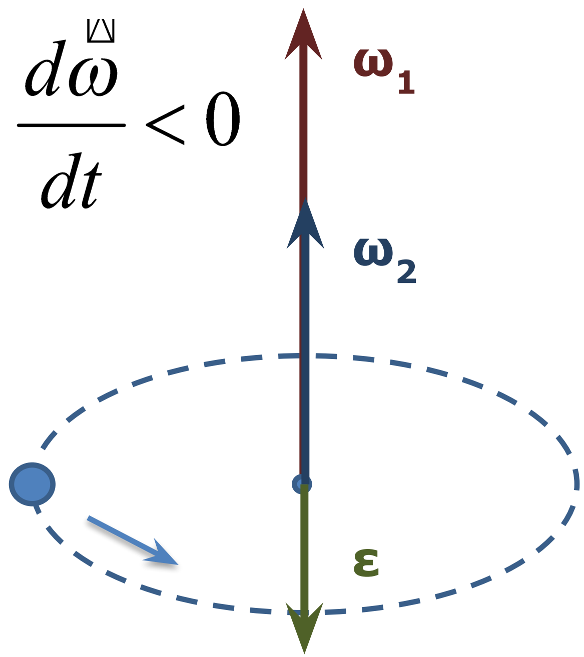
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$$



$$\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$$

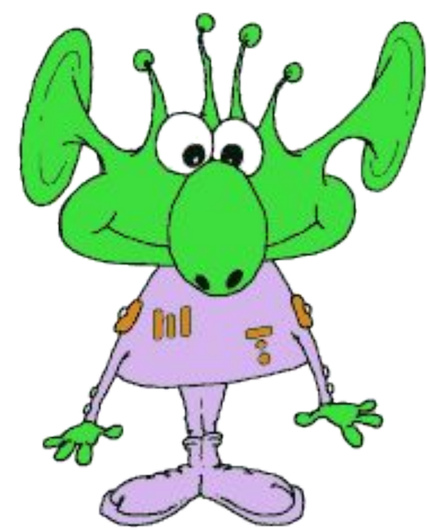
Скорость точки увеличивается

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$$



$$\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$$

Скорость точки уменьшается



Связь между линейным и угловым ускорениями

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

$$a_\tau = \dot{v} = R \cdot \dot{\omega} = \varepsilon \cdot R$$

Полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Аналогии между линейными и угловыми характеристиками движения

Физическая величина	Поступательное движение	Движение по окружности	Связь между характеристиками
Перемещение	**Линейное** Δx	**Угловое** $\Delta\varphi$	$x = \varphi R$
Скорость	**Линейная** $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$	**Угловая** $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$	$\upsilon = \omega R$
Ускорение	**Линейное** $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ $a_\tau = \dfrac{\Delta\upsilon}{t}$ $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$	**Угловое** $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$	$a_\tau = \varepsilon R$ $a_n = \omega^2 R$

Аналогии между законами прямолинейного движения и движения по окружности

Прямолинейное движение	Движение по окружности

Равномерное

$\upsilon = const$ $x = x_0 + \upsilon t$	$\omega = const$ $\varphi = \varphi_0 + \omega t$

Равнопеременное (равноускоренное)

$a = const$ $\upsilon = \upsilon_0 + at$ $x = x_0 + \upsilon_0 t + \dfrac{at^2}{2}$	$\varepsilon = const$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$

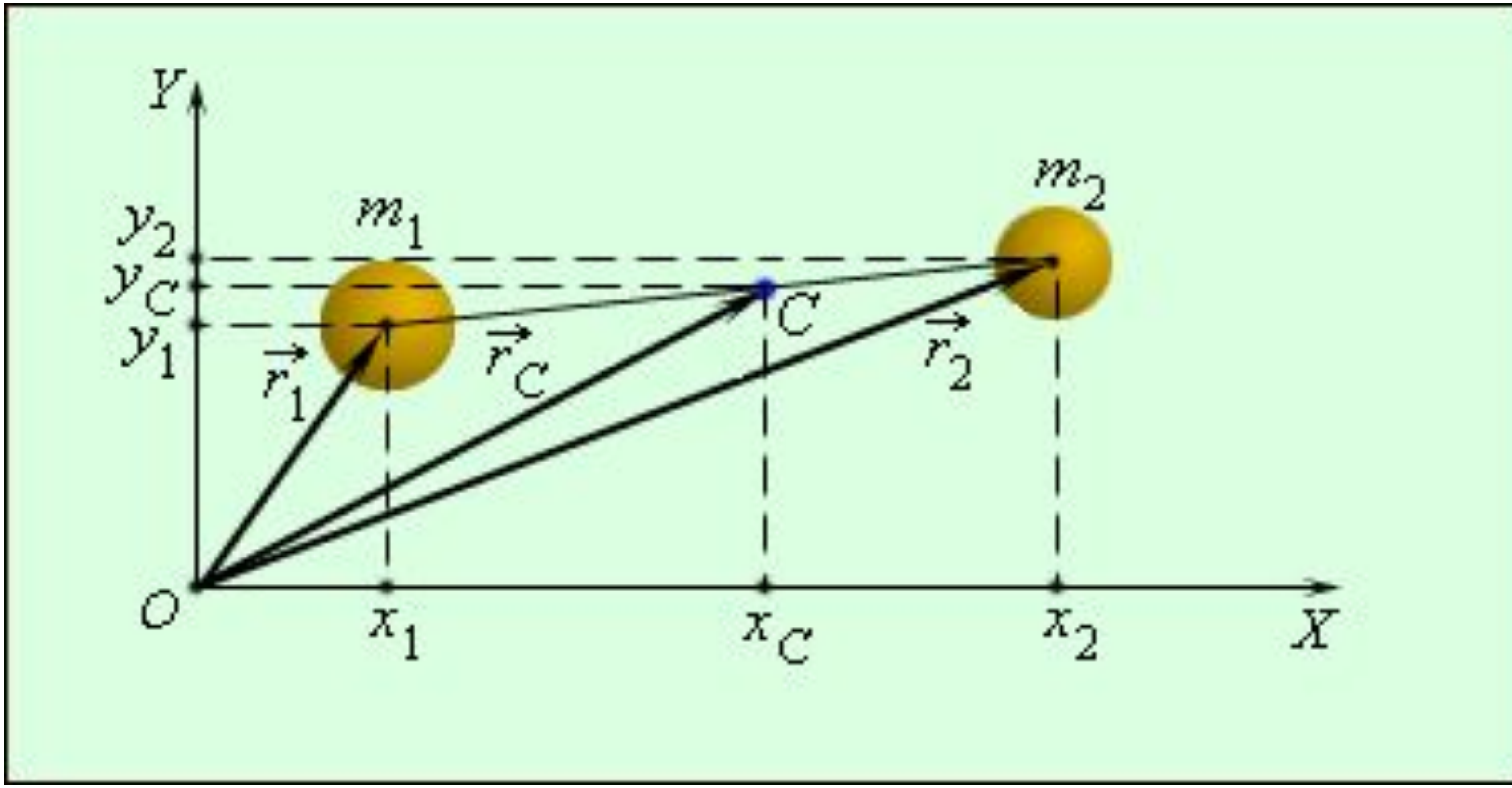
2.Поступательное движение твердого тела

Система N материальных точек.

- ***Центром инерции (или центом масс)*** системы материальных точек называется точка **С**, положение которой задается радиус-вектором $\mathbf{r}_C$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

Центр масс двух материальных точек

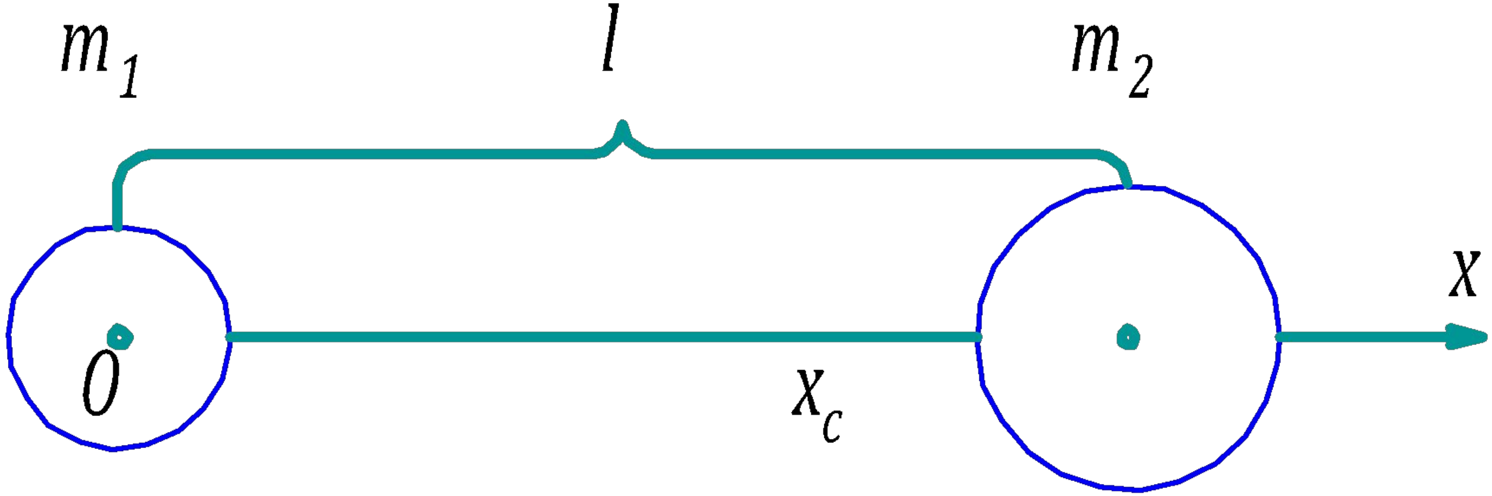


$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2};\ y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

- Пример:

Два однородных шара массой 2кг и 4кг скреплены невесомым стержнем. Расстояние между их центрами 0,6м. На каком расстоянии от центра более легкого шара находится центр масс системы?



$$x_c = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2) = (m_1 0 + m_2 l)/(m_1 + m_2)$$

Импульс МТ, системы МТ и АбТвТ

1) $$\vec{P}_i = m_i \vec{V}_i$$

2) $$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{V}_i$$

3) $$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_c m) = m \frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

$$\boxed{\vec{P} = m \vec{V}_c}$$

Суммарный импульс системы МТ или твердого тела равен произведению массы системы на скорость центра масс.

Теорема о движении центра масс твердого тела

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{i\,внешн} + \vec{F}_{i\,внутр}$$

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i\,внешн} + \sum_i \vec{F}_{i\,внутр}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{внешн}; \quad \sum_i \vec{F}_{i\,внутр} = 0 \quad по\,3 \quad закону \quad Ньютона$$

$$\boxed{M\vec{A}_C = \vec{F}_{внешн}}$$

Центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех внешних сил, приложенных к телу.

Если $\vec{F}_{внешн} = 0$, то центр масс движется прямолинейно и равномерно, либо покоится.

3. Вращение твердого тела

- **Моментом силы** относительно т. О называется вектор, равный векторному произведению

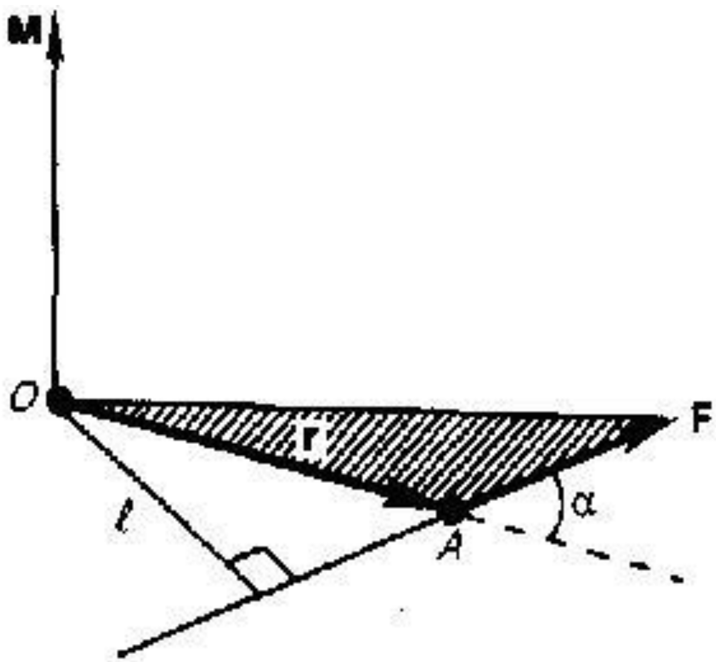
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot l$$

$$l = r \cdot \sin\alpha$$

$$Если \quad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, то$$

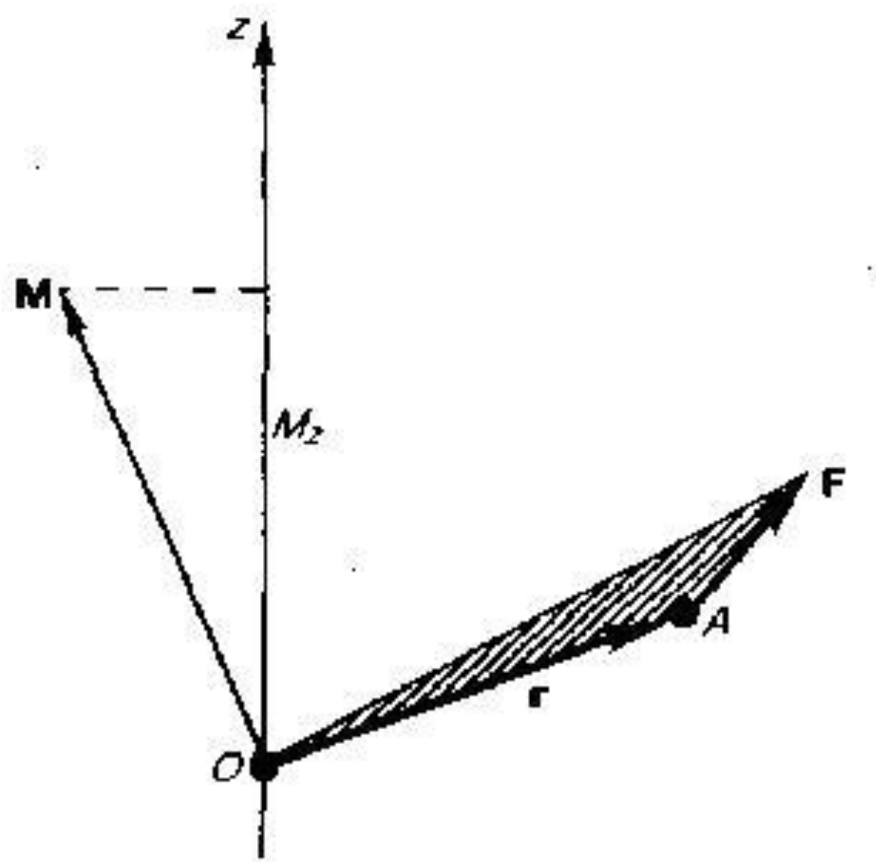
$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$$



Момент силы относительно неподвижной оси

Проекция вектора $\vec{\mathbf{M}}$ на некоторую ось z, проходящую через точку **O** , относительно которой определен момент силы,
называется ***моментом силы относительно этой оси***

$$\mathbf{M_z} = [\vec{r},\vec{F}]_z$$



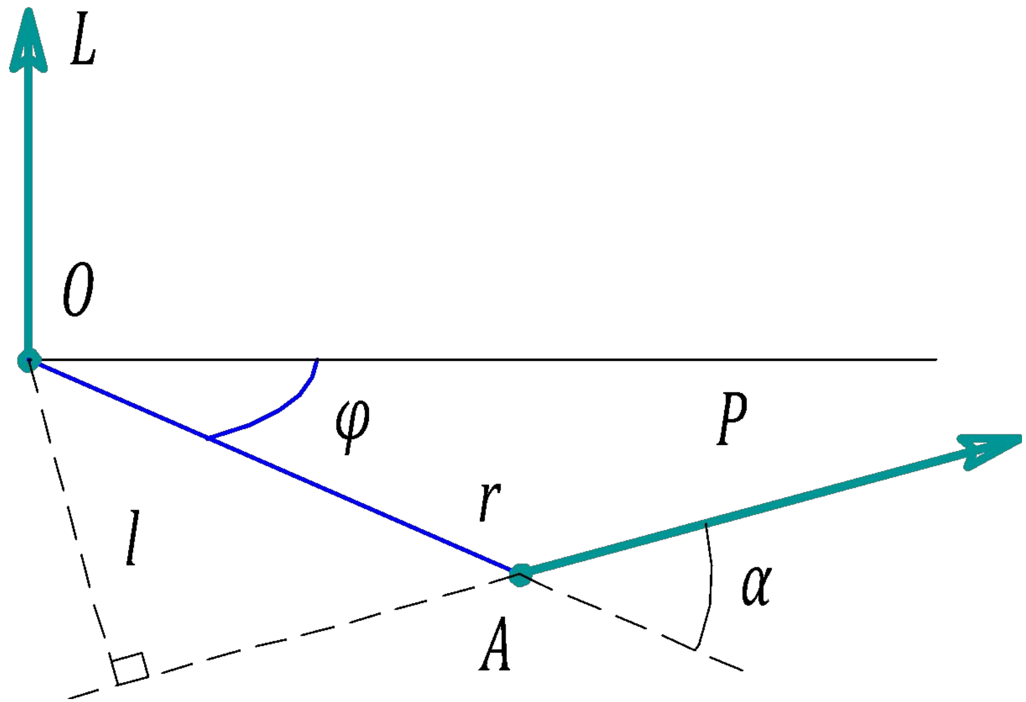
Момент импульса

- **Момент импульса** м.т. относительно неподвижной т.О

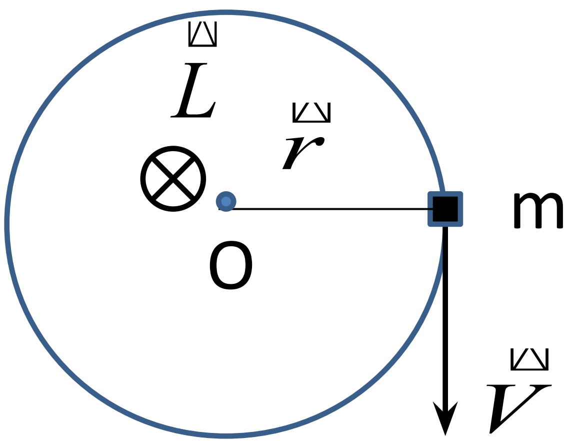
$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$L = mVr\sin\alpha =$$

$$= p \cdot l$$



- Вектор $\vec{L}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и точка О, так что вращение, обусловленное силой, и направление вектора $\vec{L}$ образуют правовинтовую систему.



$$L = mVr\sin\alpha =$$

$$= mVr\sin 90^0 = mVr$$

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Для тела, вращающегося относительно оси Z момент импульса равен

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i \omega r_i^2 =$$

$$= \omega \sum_i m_i r_i^2 = I_z \omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = M_z$$

$$\boxed{I_z \varepsilon = \sum_i M_{zi\ внешн}}$$

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Момент импульса системы м.т. относительно центра т.О

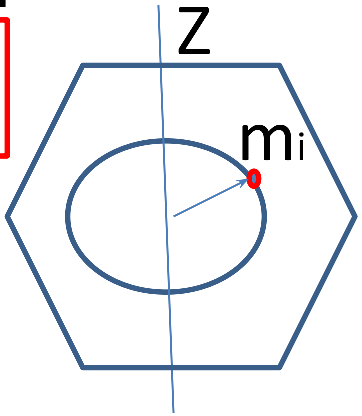
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M};$$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_{i\,внешн}$$

Момент инерции м.т., системы м.т., твердого тела

- Момент инерции – динамический параметр при вращательном движении
- Момент инерции м.т. $\boxed{I_i = m_i r_i^2}$
- Момент инерции системы м.т.

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$



- Момент инерции

твердого тела

$$\boxed{I = \int_{(m)} r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV},$$

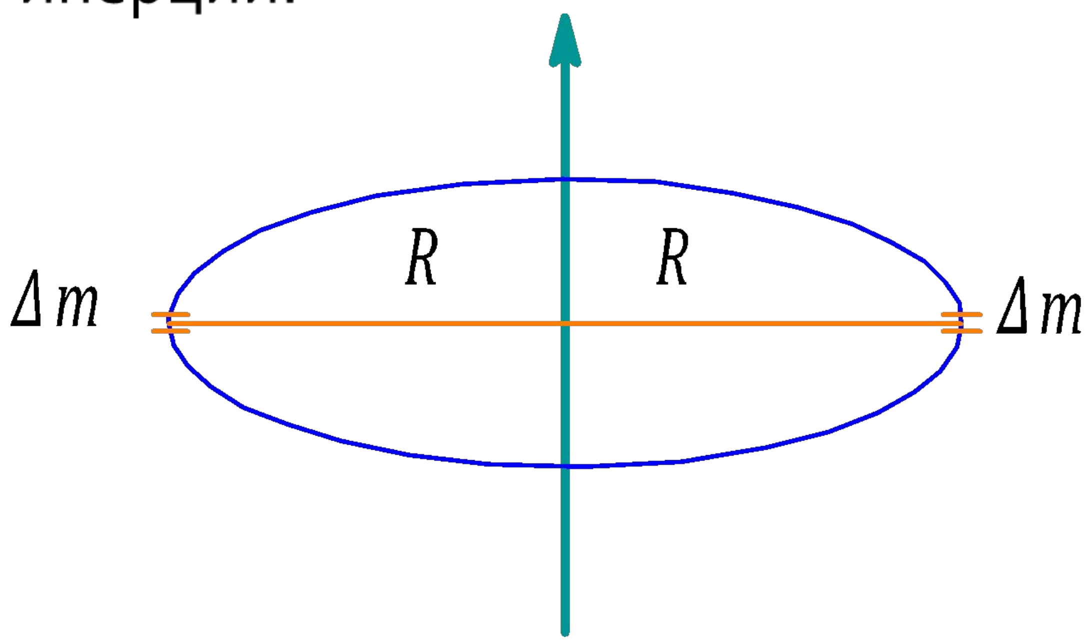
$$dm = \rho dV$$

Свойства момента инерции

- **Момент инерции** в динамике вращательного движения играет ту же роль, что и **масса тела** в динамике поступательного движения.
- Масса – внутреннее свойство данного тела, не зависящее от его движения.
- **Момент инерции тела зависит от того, вокруг какой оси оно вращается.**
- Для разных осей вращения моменты инерции одного и того же тела различны.

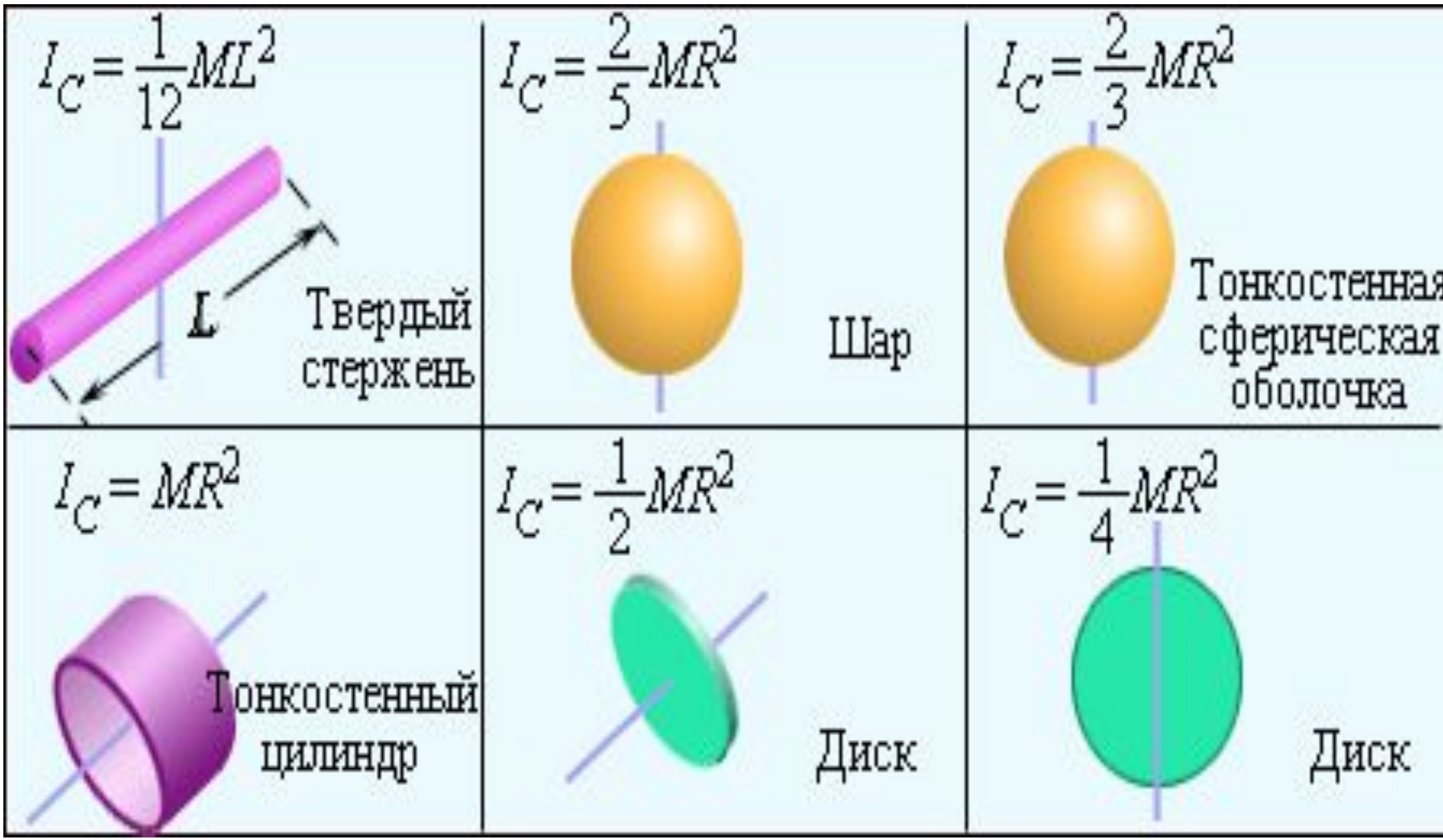
Момент инерции обруча

- Момент инерции зависит от того, как масса тела распределена относительно оси вращения. Чем дальше от оси находится частица, тем больше ее момент инерции.



$$I = \sum \Delta m_i R^2 = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 M$$

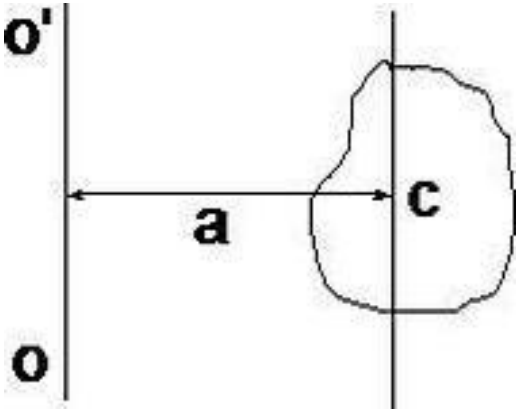
Моменты инерции симметричных однородных тел относительно оси, проходящей через центр масс



Теорема Штейнера

- Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$I = I_c + ma^2$$



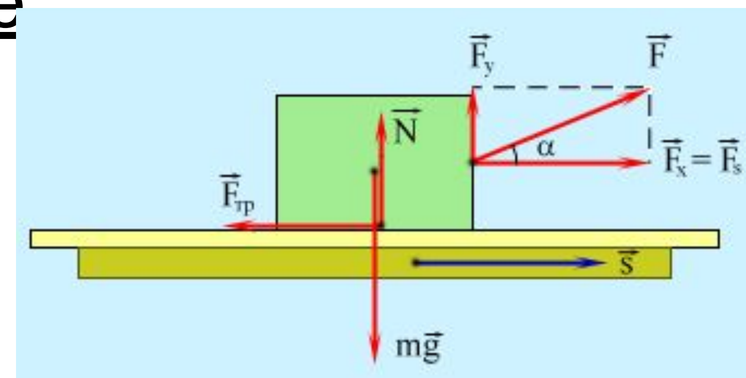
4.Работа и энергия

- ***Энергия***- количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи. Соответственно различают механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную и пр. энергию.
- ***Механическая энергия*** складывается из ***кинетической и потенциальной.***
- ***Кинетическая энергия***- энергия движения, определяется скоростями и массами движущихся тел.
- ***Потенциальная энергия –*** энергия положения, определяется взаимным расположением взаимодействующих тел.

Работа

- <u>Прямолинейное движение</u>

$$A = \vec{F}\vec{S}$$



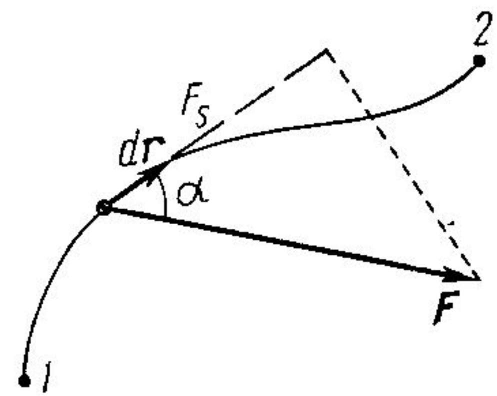
$$A = F_S S = FS\cos\alpha$$

- <u>Криволинейное движение</u>

  Работа - скалярная величина, численно равная

$$dA = Fdr = FdS\cos\alpha$$

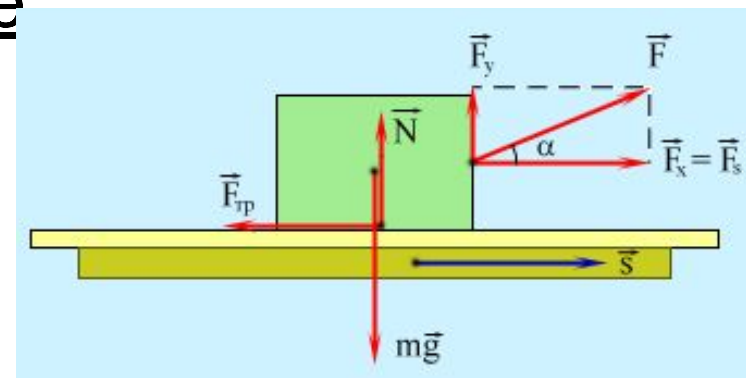
$$A = \int_1^2 FdS\cos\alpha = \int_1^2 F_S dS$$



Работа

- <u>Прямолинейное движение</u>

$$A = \vec{F}\vec{S}$$



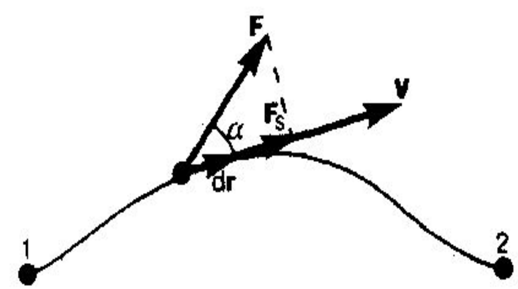
$$A = F_S S = FS\cos\alpha$$

- <u>Криволинейное движение</u>

  Работа - скалярная величина, численно равная

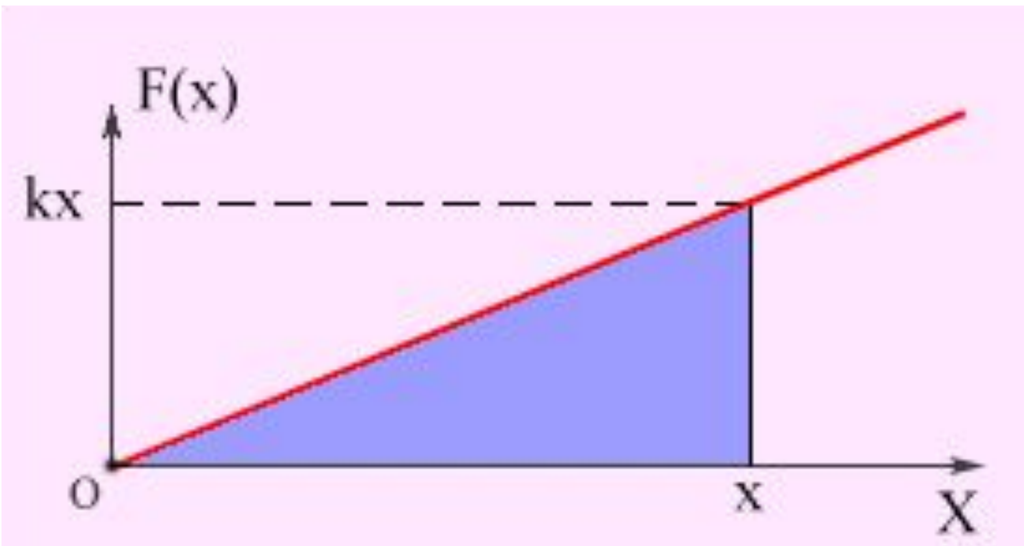
$$dA = Fdr = FdS\cos\alpha$$

$$A = \int_1^2 FdS\cos\alpha = \int_1^2 F_S dS$$



Работа

- Графически работа определяется по **площади** криволинейной фигуры **под графиком F_s(x)**
- Работа упругой силы



$$A = \frac{kx^2}{2}$$

- **Если** к телу приложено **несколько сил, общая работа** всех сил **равна алгебраической сумме работ,** совершаемых силами

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Мощность

- Работа, совершаемая в единицу времени, называется ***мощностью.***

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{d(\vec{F}\vec{S})}{dt};$$

$$\text{если} \quad \vec{F} = const, \quad N = \vec{F}\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

- <u>Единицы измерения</u>: [A] – Джоуль
  [P] – Ватт ,

внесистемные ед.: [л.с] – 736 Вт

Теорема об изменении кинетической энергии

- Если действующая на частицу сила **F** отлична от нуля , то $E_к$ изменяется, и ее приращение определяется **работой** силы **F.**

$$\boxed{E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}}$$

- **Кинетическая энергия системы**

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2}$$

Изменение кинетической энергии системы тел равно работе всех сил, действующих на систему.

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} \Rightarrow \boxed{E_{k2} - E_{k1} = A_{12}}$$

Кинетическая энергия твердого тела

1. **Кинетическая энергия твердого тела**, движущегося поступательно

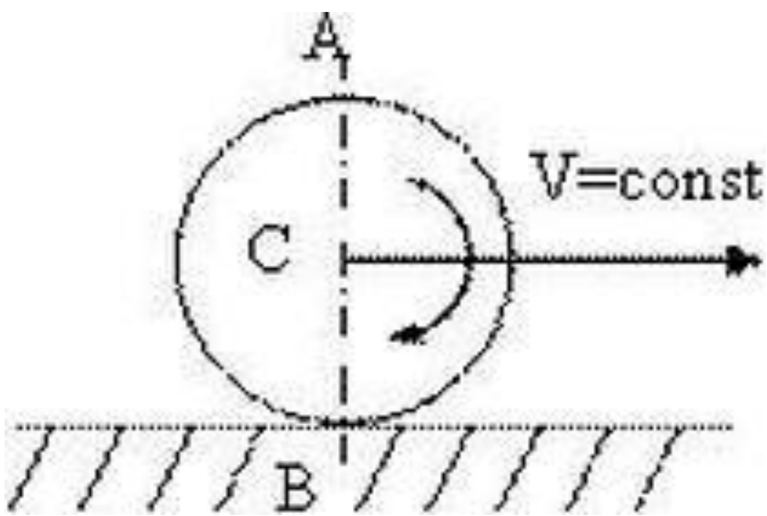
$$E^{поступ}{}_{k} = \frac{1}{2}mV^{2}$$

2. **Кинетическая энергия простого вращательного движения** (вокруг неподвижной оси с угловой скоростью *w)*

$$E^{вращат}{}_{k} = \frac{mV^2}{2} = \frac{m(wr)^2}{2} = \frac{mr^2w^2}{2} = \frac{Iw^2}{2}$$

Кинетическая энергия при плоском движении

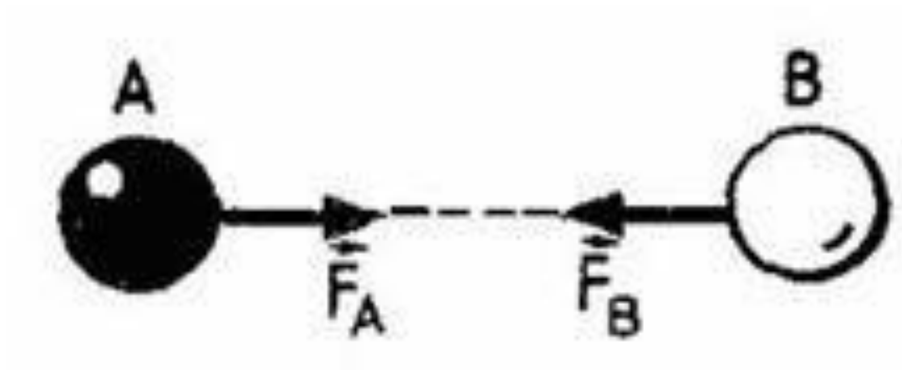
- В общем случае **кинетическая энергия твердого тела складывается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости движения центра масс, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела.**



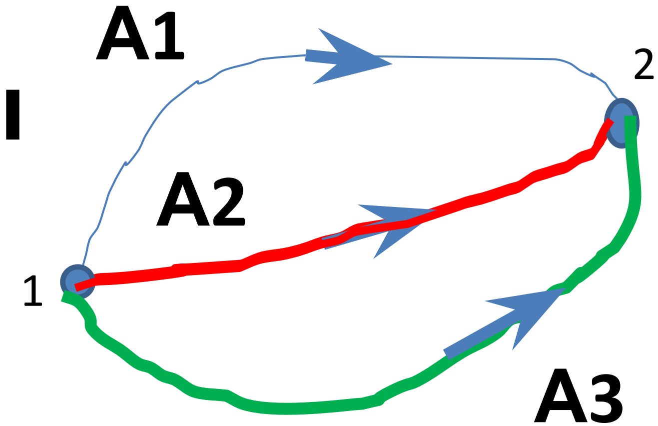
$$E_k = \frac{mV_c^{\ 2}}{2} + \frac{I_c w^2}{2}$$

Потенциальная энергия

- Если частица в каждой точке пространства испытывает взаимодействие с другими телами, то говорят, что эта частица находится в поле сил. Неконтактные взаимодействия осуществляются посредством ***физических полей***.
- Каждое тело в пространстве создает вокруг себя ***силовое поле***, которое проявляет себя в действии сил на другие тела.

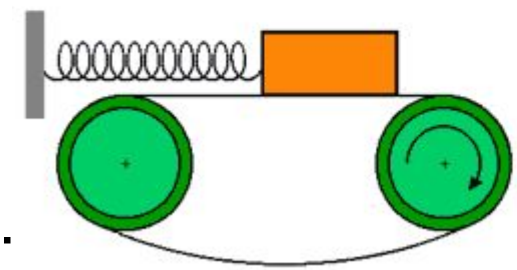


Консервативные силы



<u>**Консервативными (потенциальными)**</u> называются силы, **работа которых не зависит от траектории движения тела**, а определяется только начальным и конечным его положением.

сила упругости



$$A_1=A_2=A_3$$

<u>Пример:</u> сила тяжести и сила упругости.

Работа консервативных сил по любому замкнутому контуру равна нулю.

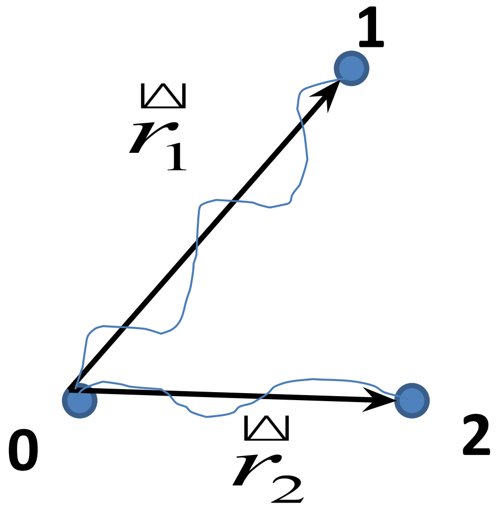
Неконсервативные силы

<u>**Неконсервативными (диссипативными)**</u> называются силы, работа которых зависит от формы траектории и пройденного пути.

<u>Пример</u>: сила трения скольжения, силы сопротивления воздуха или жидкости.

Потенциальная энергия

- Каждой точке поля консервативных сил можно сопоставить некоторую функцию координат $E_п(\mathbf{r})$, которая определяет **потенциальную энергию** частицы в этом поле.



$$E_{п1}(\vec{r}_1) = A_{10} + const$$

$$E_{п2}(\vec{r}_2) = A_{20} + const$$

Потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной .

Потенциальная энергия

- **Работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии тела**

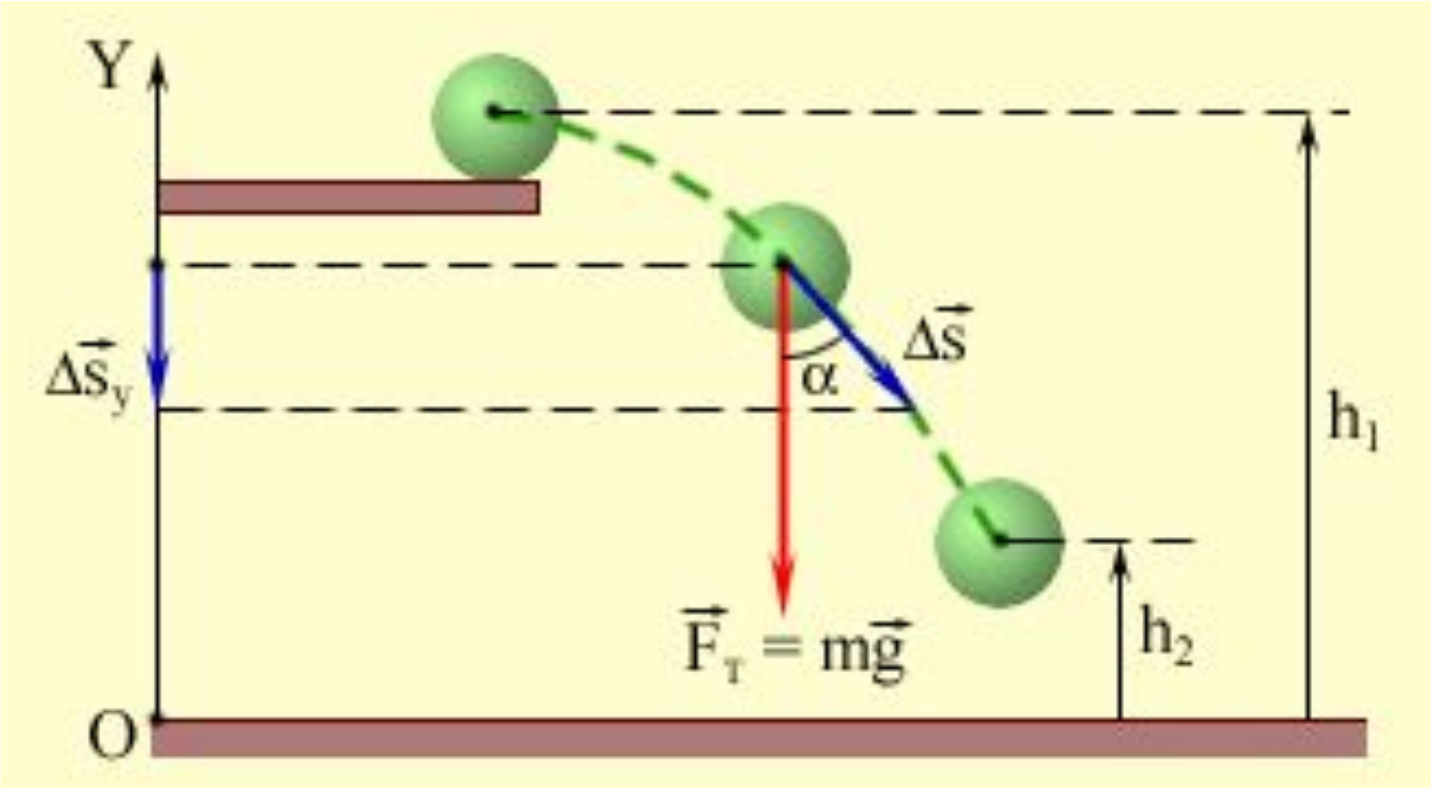
$$E_{n1} - E_{n2} = A_{10} - A_{20} = A_{12}$$

Потенциальная энергия в поле тяжести Земли

Работа силы тяжести при падении тела с высоты *h* на поверхность Земли

$$E_П = A_{mg}$$

$$\boxed{E_П = mgh}$$



h отсчитывается от нулевого уровня, для которого $\boldsymbol{E_p}$=0

Изменение полной механической энергии

$$(1)\ A_{12} = A^{консерв}{}_{12} + A^{диссип}{}_{12}$$

$$(2)\ A_{12} = E_{к2} - E_{к1}$$

$$(3)\ A^{консерв}{}_{12} = E_{п1} - E_{п2}$$

Из (1-3) получим:

$$E_{к2} - E_{к1} = E_{п1} - E_{п2} + A^{диссип}{}_{12}$$

$$(E_{к2} + E_{п2}) - (E_{к1} + E_{п1}) = A^{диссип}{}_{12}$$

Величину Е, равную сумме потенциальной и кинетической энергии, называют *полной механической энергией*

$$E_{п1} + E_{к1} = E_{п2} + E_{к2}$$

Закон сохранения механической энергии

Изменение полной механической энергии системы частиц равно работе диссипативных сил, действующих на систему

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{дисс}$$

Если на систему частиц действует только консервативные силы, то полная механическая энергия системы частиц сохраняется:

$$E = const$$

$$E_{мех} = E_к + E_п = const$$

Законы сохранения

- Система, для которой внешние силы отсутствуют, называют **замкнутой** (изолированной).
- **Для замкнутых систем выполняются законы сохранения:**

1. **Энергии**
2. **Импульса**
3. **Момента импульса**

Эти законы тесно связаны со свойствами пространства и времени.

Законы сохранения являются **фундаментальными** законами природы

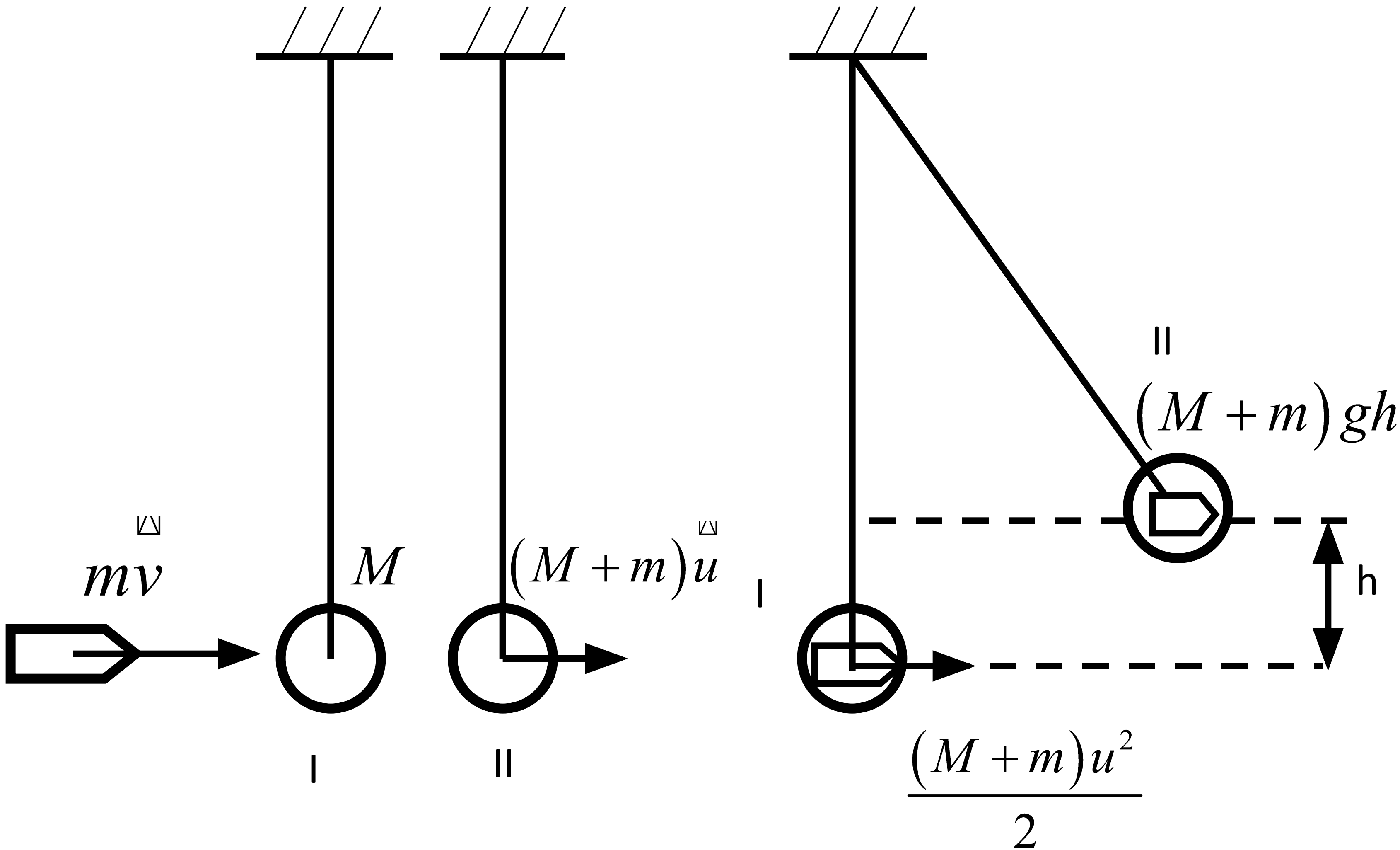
Пример использования законов сохранения импульса и механической энергии

- Пуля массой m, летевшая горизонтально со скоростью v, попадает в шар массой M, подвешенный на нити, и застревает в нем. Определить высоту h, на которую поднимется шар вместе с пулей.

Столкновение пули с шаром – абсолютно неупругое, но применим закон сохранения импульса:

$$mv = (m + M)u$$

Где u– скорость шара и пули после столкновения.



а б

- После столкновения с пулей шар начинает движение. Система (шар + пуля) является замкнутой, следовательно, применим закон сохранения энергии:

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M+m)gh$$

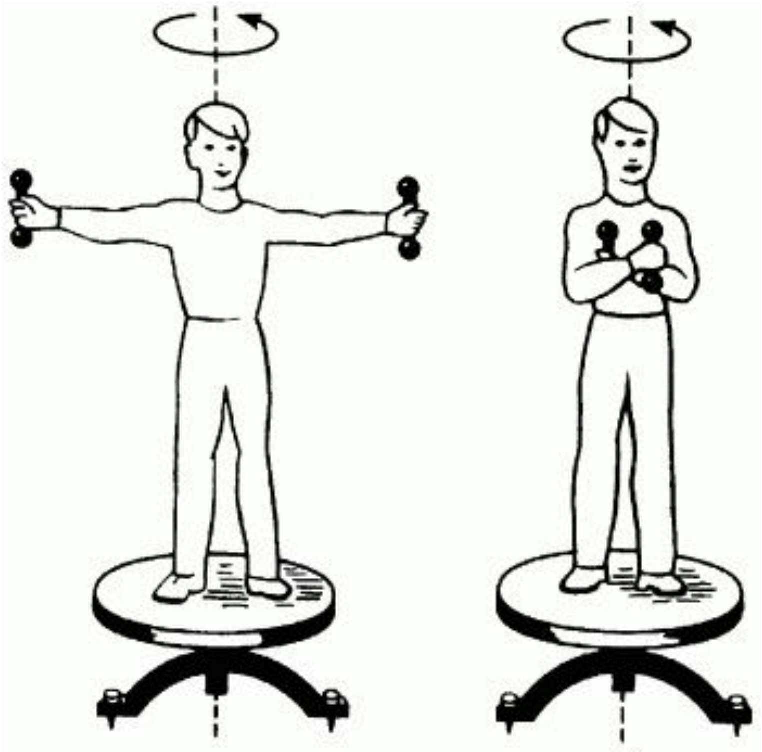
Отсюда высота:

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mv)^2}{(M+m)^2 2g}$$

Закон сохранения момента импульса

Момент импульса замкнутой системы остается постоянным

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = const}$$



а

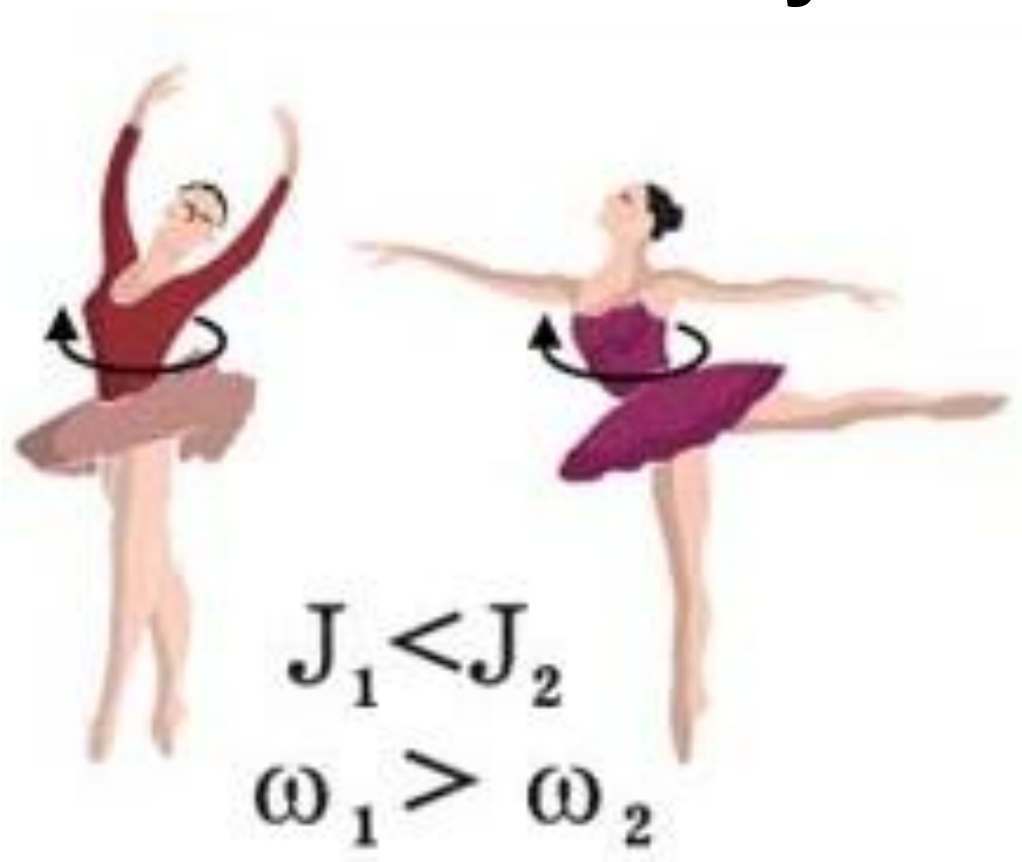
б

$$\frac{d}{dt}(I\vec{w}) = 0 \Rightarrow$$

$$I\vec{w} = const$$

$$I_1 w_1 = I_2 w_2$$

Закон сохранения момента импульса



Условия выполнения законов сохранения импульса, энергии и момента импульса

1. В замкнутой системе материальных точек сохраняются импульс, момент импульса и энергия (для упругого соударения – механическая энергия, для неупругого соударения – полная энергия)

2. В незамкнутой системе:

если проекция суммы внешних сил на некоторую ось равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось будет оставаться постоянной;

если проекция моментов внешних сил на некоторую ось равна нулю, то проекция момента импульса системы на эту ось будет оставаться постоянной;

если работа внешних сил равна нулю, то полная энергия системы будет оставаться постоянной.

$$[\bar{a} \times \bar{b}] = \bar{c}$$

$$[\bar{b} \times \bar{a}] = -\bar{c}$$

Теорема Эмми Нётер утверждает, что каждой непрерывной симметрии физической системы соответствует некоторый закон сохранения.

Закон сохранения импульса – с однородностью пространства *(однородность означает отсутствие предпочтений при выборе точки пространства: все точки равноправны)*;

Закон сохранения момента импульса – с изотропностью пространства (***изотропность означает отсутствие предпочтения в выборе направления в пространстве: все направления одинаковы***);

Закон сохранения энергии – с однородностью времени (***все явления природы проходят одинаково, несмотря на выбор периода времени, когда это явление происходит или рассматривается***).

Постулаты специальной теории относительности Эйнштейна (1905 г.).

Постулат 1. Принцип относительности

«Движение системы отсчёта по инерции не может быть обнаружено никакими физическими опытами внутри закрытой лаборатории, связанной с этой системой отсчёта»

Постулат 2. Принцип постоянства скорости света

*«Свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью **c**, не зависящей от движения излучающего тела»*

Основные выводы из специальной теории относительности Эйнштейна (1905 г.)

1. **Сокращение продольных размеров**
   (при движении с околосветовой скоростью)
2. **Замедление времени**
   (при движении с околосветовой скоростью)
3. **Запрет скоростей, больших скорости света**
4. **Увеличение массы**
   (при движении с околосветовой скоростью)

Принцип эквивалентности (сильный): никакой эксперимент – ни механический, ни какой-либо другой – не дает возможности отличить инертную массу от гравитационной