Дискретная математика

к.ф.-м.н. Дрегля Алена Ивановна

adreglea@gmail.com

Основная учебная литература

1. Дискретная математика для программистов : учеб. пособие для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов "Информатика и вычисл. техника"/ Ф. А. Новиков . - СПб.и др.: Питер, 2004. - 301 с.

2. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов по специальности "Прикл. математика"/ С. В. Яблонский. - Изд. 4-е, стер . - М.: Высш. шк., 2006. - 384 с.

3. Дискретная математика. Математика для инженера в примерах и упражнениях : учеб. пособие для вузов по экон. и управлен. специальностям и направлениям / Г. И.Москинова . - М.: Логос, 2007. - 238 с.

4. Дискретная математика : учеб. пособие для вузов по направлению и специальности "Прикладная математика и информатика"/ Ю. П. Шевелев . - СПб.: Лань, 2008. - 591 с.

Глава 1. Теория множеств

1.1. Множество и его мощность

Георг Кантор в конце 19 века создал современную теорию множеств.

- Множество состоит из элементов.
- «Множество есть многое, мыслимое как единое».
- Множество может быть конечным или бесконечным.
- Множества можно сравнивать по «мощности».

Способы задания множеств.

- Конечное множество можно задать перечислением его элементов.
  `{5, 2, 3}` – множество из трех элементов
  `{}` – пустое множество
- Множество можно задать предикатом (характеристической функцией)
  `{x | x - четно}` – множество четных чисел
  `{f | f : N → N}` – множество функций из N в N, где N – мн-во натуральных чисел
- Конечное или счетное множество можно задать алгоритмом порождения.
  $\{f_1 = f_2 = 1;\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1}\}$ – множество чисел Фибоначчи

Способ задания множеств с помощью предикатов – самый общий, но и самый ненадежный (может приводить к парадоксам).

Обозначения и понятия «наивной» теории множеств.

$a \in A$	a есть элемент A, принадлежит A
$a \notin A$	a не принадлежит A
$A \subset B$	A есть подмножество B: $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$
$\varnothing$	пустое множество

Парадоксы «наивной» теории множеств.

«Парадокс брадобрея»

Брадобрей бреет тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами. Бреет ли брадобрей себя самого?

«Парадокс самопринадлежности»

Назовем множество «правильным», если оно не содержит самого себя в качестве элемента. Правильно ли множество всех правильных множеств?

Пусть $M = \{ X \mid X \notin X \}$

Тогда: $M \notin M \Rightarrow M \in M$; $M \in M \Rightarrow M \notin M$

Способы преодоления парадоксов.

- Ограничиться только «конструктивно порождаемыми» множествами.
- Ограничиться только подмножествами хорошо известных «универсальных» множеств.

Операции над множествами.

Операции можно выполнять над множествами, если они принадлежат одному и тому же универсуму

$A \cup B$

Объединение множеств

$A \cap B$

Пересечение множеств

$A \setminus B$

Разность множеств

$\overline{A} = U \setminus A$

Дополнение до универсума

Мощность множеств. Сравнение мощностей.

Два множества называются равномощными, если существует взаимнооднозначное соответствие между элементами первого и второго множеств.

$|M|$, $\mathrm{card}\ M$ - обозначения для мощности множества
$|A| = |B|$ - множества A и B – равномощны.

Определение: Конечные множества A и B равномощны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число элементов. Это число называется *мощностью конечного множества*.

$\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел и нуля
$\mathbb{E}$ - множество всех четных неотрицательных чисел

$\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$, $|\mathbb{E}| = |\mathbb{N}|$, соответствие: $x \in \mathbb{N} \leftrightarrow 2x \in \mathbb{E}$

Множество M бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно своему собственному подмножеству: $\exists\ A \subset M, A \neq M, |A| = |M|$. Можно считать это *определением бесконечности*.

Определение: Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.

Размещение постояльцев в межзвездной гостинице Ийона Тихого.

Определение: $|A| < |B|$, если $|A| \neq |B|$, но существует $C \subset B$ такое, что $|A| = |C|$.

Сравнение мощностей.

Часто можно определить, что два множества равномощны, пользуясь определением равномощности непосредственно.

Пусть M - счетное множество. Рассмотрим множество M × 2 = M2

Утверждение: множества M и M2 – равномощны.

Доказательство: счетное множество можно «пересчитать», то есть построить соответствие его элементов элементам множества $\mathbb{N}$. «Пересчитаем» элементы множества M2.

$$M = \{ m_1, m_2, m_3, \dots \}$$

$$\begin{aligned} M2 &= \{ m_{11}, m_{21}, m_{31}, \dots \\ &\qquad m_{12}, m_{22}, m_{32}, \dots \} \\ &= \{ m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, m_{31}, m_{32}, \dots \} \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что для любого k множество M × k будет также счетным.

Утверждение: множество M × M – счетно.

$$\begin{array}{l} m_{11}, m_{21}, m_{31}, \dots, m_{n1}, \dots \\ m_{12}, m_{22}, m_{32}, \dots, m_{n2}, \\ m_{13}, m_{23}, m_{33}, \dots, m_{n3}, \\ \dots \quad \dots \\ m_{1k}, m_{2k}, m_{3k}, \dots, m_{nk}, \\ \dots \quad \dots \end{array}$$

Нумерация «в столбик» не получается. Применим «диагональную нумерацию».

$$m_{11}, m_{21}, m_{12}, \quad m_{31}, m_{32}, m_{13},$$

Сравнение мощностей (продолжение).

Определение: Мощность множества всех вещественных чисел называется мощностью *континуума*.

Мощностью континнума обладает любой отрезок или интервал на вещественной оси, например, (0, 1). Как это доказать?

Эквивалентные преобразования интервалов:
сдвиг ($x \to x+\alpha$); растяжение ($x \to \alpha x$); инверсия ($x \to 1/x$).

$(0,\ 1) \xrightarrow{\text{(сдвиг)}} (-0.5,\ 0.5) \xrightarrow{\text{(разбиение)}} (-0.5,\ 0) \cup [0] \cup (0,\ 0.5)$

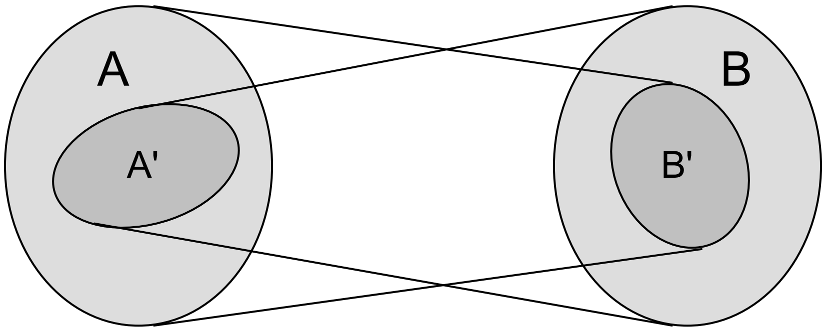
$\xrightarrow{\text{(инверсия)}} (-\infty,\ -2) \cup [0] \cup (2,\ \infty) \xrightarrow{\text{(сдвиг, слияние)}} (-\infty,\ \infty)$

Пользоваться определением для сравнения мощностей не всегда удобно.

Пример: попробуйте доказать, опираясь только на определение, что мощность множества чисел отрезка [0, 1] равна мощности континуума.

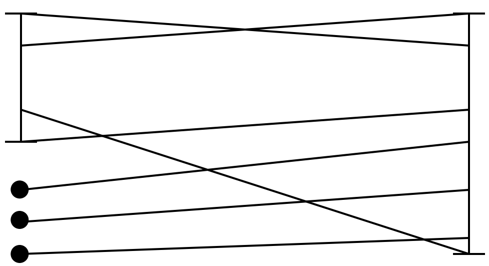
Сравнение мощностей (продолжение).

Теорема (без доказательства): пусть $A' \subset A$ и $B' \subset B$ таковы, что $|A'| = |B|$ и
$|B'| = |A|$. Тогда множества A и B равномощны, то есть $|A| = |B|$.



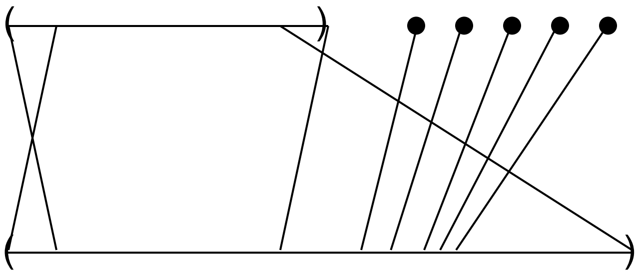
С помощью этой теоремы легко доказать, что множество мощности континнума объединенное с конечным числом элементов имеет мощность континнума
(будем коротко говорить (*континуум*) + (*конечное*) = (*континуум*)),

поскольку интервал плюс конечное число точек легко погрузить в другой интервал



Сравнение мощностей (продолжение).

Аналогично, (*континуум*) + (*счетное*) = (*континуум*),
поскольку счетное число точек, например, вида $1/i$, все лежат на отрезке $[0,\ 1]$.



Упражнение: доказать, что (*континуум*) × (*континуум*) = (*континуум*),

Вопрос: верно ли, что (*счетное*) = (*континуум*) ?

Теорема Кантора.

Для каждого множества A можно рассмотреть множество всех его подмножеств.
Такое множество называется *булеаном* исходного множества и обозначается 2^A.

Теорема: если множество A – конечно, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

Доказательство: индукцией по количеству элементов множества.

1. $|A| = 0 \Rightarrow 2^A = \{\varnothing\} \Rightarrow |2^A| = 1 = 2^{|A|}$.
2. $|A| = k+1$ выберем первый элемент и составим всевозможные подмножества из остальных элементов, по индукционному предположению их будет 2^k. Кроме этих подмножеств, можно получить еще столько же, добавив в уже имеющиеся множества первый элемент. Всего получится $2 * 2^k = 2^{k+1}$.

С точки зрения теории множеств целое число **k** – это класс всех множеств элементов мощности k.

Тогда $2^{\mathbf{k}}$ – множество мощности 2^k.
Только что доказанная теорема является обоснованием обозначения 2^A для конечных множеств.

Существуют ли бесконечные множества неодинаковой мощности?

Доказательство теоремы Кантора

Теорема (Г.Кантор): если множество A – счетно, то $|2^A| > |A|$.

Занумеруем элементы счетного множества A: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Тогда любое подмножество множества A – выборка номеров элементов – может быть представлена последовательностью из нулей и единиц, например:

$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2k+1},$ будет представлена последовательностью 1, 0, 1, 0, 1, 0,…

Пустое множество будет представлено последовательностью 0, 0, 0, 0, 0, 0,…

Очевидно, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц – бесконечно.

Допустим, что это множество – счетно. Построим «диагональную» последовательность

$$
\begin{array}{llllllll}
b_{11}, b_{21}, b_{31}, \ldots, b_{n1}, \ldots & b_{11} & 1-b_{11}, & & & & \\
b_{12}, b_{22}, b_{32}, \ldots, b_{n2}, & b_{22} & & 1-b_{22}, & & & \\
b_{13}, b_{23}, b_{33}, \ldots, b_{n3}, & b_{33} & & & 1-b_{33}, & & \\
\ldots \quad \ldots & & & & & \ldots & \\
b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}, \ldots, b_{nk}, & b_{kk} & & & & & 1-b_{kk}, \\
\ldots \quad \ldots & & & & & & \quad \ldots
\end{array}
$$

Очевидно, что она отличается от любой из занумерованных последовательностей, например, от последовательности с номером k: $b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}, \ldots, b_{nk}, \ldots$
она заведомо отличается в k-м элементе: $b_{kk} \neq 1-b_{kk}$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы Кантора (продолжение)

Теорема (Г.Кантор): для любого множества А мощность его булеана больше мощности самого множества: $|2^A| > |A|$.

Доказательство проводится по той же схеме от противного:
пусть некоторое множество А равномощно своему булеану
$|A| = |2^A|$

Тогда существует взаимнооднозначная функция ϕ такая, что $\forall a \in A \quad \phi(a) \subset A$

Построим множество $D \subset A \quad D = \{ b \mid b \notin \phi(b) \}$

Тогда очевидно, что не существует такого d, что $\phi(d) = D$,
так как невозможно ответить на вопрос «верно ли, что $d \in D$?»

Если $d \in D$, то $d \notin \phi(d) = D$
Если $d \notin D = \phi(d)$, то $d \in D$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что каждой последовательности из нулей и единиц соответствует вещественное число из диапазона [0, 1]

1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0… $\leftrightarrow$ 0,110001001100…

При этом существует лишь счетное число *пар* последовательностей, которым соответствует *одно и то же* рациональное число.

1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0… $\leftrightarrow$ 0,110001
1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1… $\leftrightarrow$

$\mathbf{2^N = C}$

Некоторые следствия теоремы Кантора

1. Поскольку $2^N = C$, то $C > N$. (N – мощность счетного множества, C – мощность континуума)

2. Существует бесконечно много бесконечных множеств с различными мощностями. Например, построим следующую цепочку мощностей множеств:
   $\aleph_0 = N$, $2 = \aleph_1^N = C$, $2 = \aleph_2^C$, …
   В этой цепочке каждая следующая мощность больше предыдущей (последовательность трансфинитных кардинальных чисел).

Гипотеза континуума: не существует бесконечного несчетного множества, имеющего мощность, меньшую мощности континуума.

Обозначение: для любых двух множеств A и B обозначим через A^B множество всех всюду определенных функций из B в A. $A^B = \{ f \mid f : B \to A \}$

Согласуются ли два определения для обозначения 2^A ?

1. 2^A – множество всех подмножеств множества A.

2. 2^A – множество всех функций из A в $2 = \{0, 1\}$.

Очевидно, да, поскольку каждой такой функции соответствует подмножество всех элементов множества A, имеющих образ 1, и наоборот, каждому подмножеству A можно сопоставить функцию, отображающую элементы этого подмножества в 1, а остальные – в 0.

Декартово произведение множеств

Декартово произведение множеств:

$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$

Степень множеств:

$A \times A = A^2$

$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}$

A^n – это множество всех кортежей вида $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, где все a_i принадлежат A.
Согласуется ли это обозначение с введенным ранее обозначением $\mathbf{M}^{\mathbf{N}}$ для множества всех всюду определенных функций из **N** в **M**?

Согласно этому определению $A^n = \{ f \mid f : \{1,2,\ldots,n\} \to A \}$
Всякая такая функция `f` ставит в соответствие каждому числу из интервала `[1, n]` элемент множества A, то есть $i \to a_i$. Таким образом, функция `f` может быть представлена набором из n элементов множества A. Так что множество всех таких функций – это множество всех кортежей вида $(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Предположим, что вы делаете выбор между a, l, а я буду выбирать одну букву из f, t, x. Если обе буквы образуют какое-либо слово, я вам отдаю 1 шоколадку, кроме того дополнительное вознаграждение в размере 3 шоколадок, если это слово существительное или местоимение. В тех редких случаях, когда буквы не образуют слова, вы мне даете 2 шоколадки.

	f	t	x
a	-2	1	4
l	1	4	-2