

Платоновы тела, 10 класс

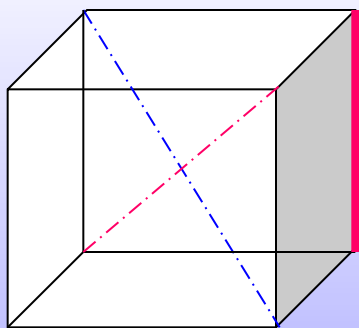
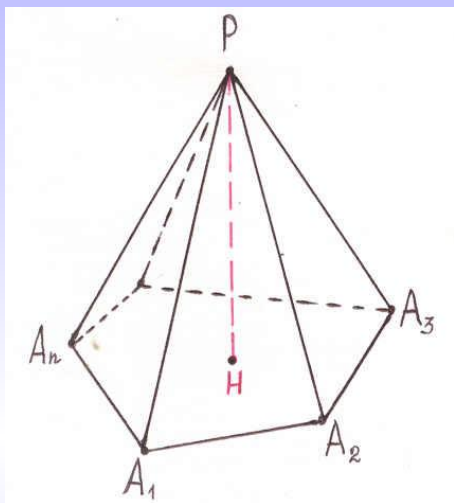
**Правильные
выпуклые
многогранники**

- *«Математика владеет не только истиной, но и высокой красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства».*

- Бертран Рассел



Первые упоминания о многогранниках известны еще за три тысячи лет до нашей эры в Египте и Вавилоне. Но теория многогранников является и современным разделом математики. Она тесно связана с топологией, теорией графов, имеет большое значение как для теоретических исследований по геометрии, так и для практических приложений в других разделах математики, например, в алгебре, теории чисел, прикладной математики - линейном программировании, теории оптимального управления.



Многогранником называется тело, граница которого является объединением конечного числа многоугольников.

Многоугольники из которых составлен многогранник называются его **гранями**.

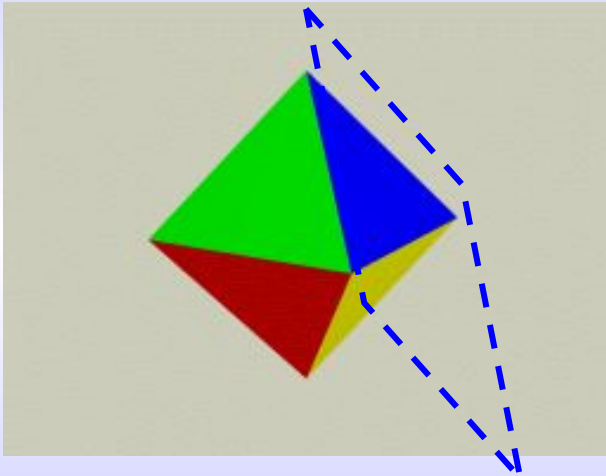
Стороны граней – **ребрами**.

Концы ребер – **вершинами** многогранника.

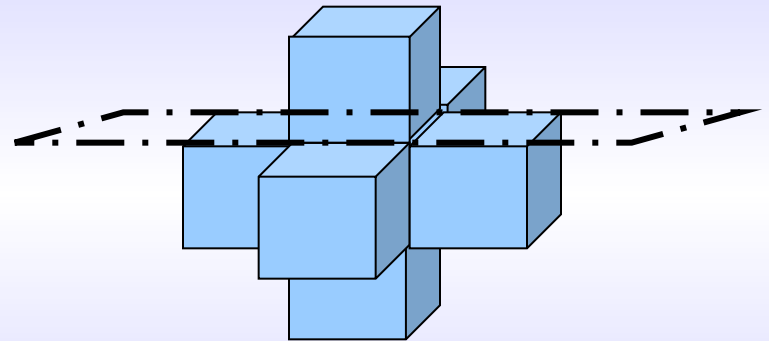
Отрезок соединяющий две вершины не принадлежащий одной грани называется **диагональю**

Виды многогранников

Выпуклые

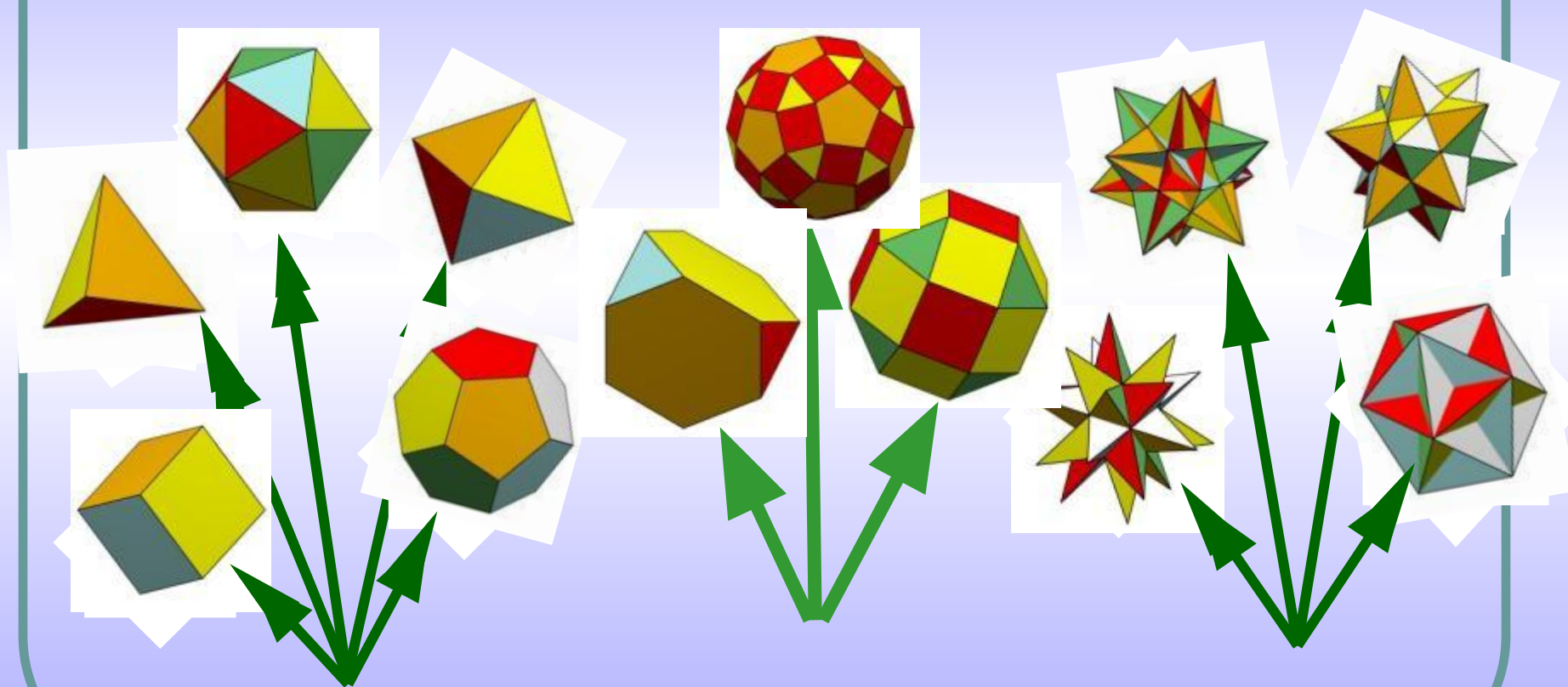


Невыпуклые



Выпуклый многогранник характеризуется тем, что он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани, а не выпуклый – по разные стороны от этой плоскости

Многогранники имеют красивые формы, например, правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. Они обладают богатой историей, которая связана с именами таких ученых, как Пифагор, Евклид, Архимед



◆ Букет Платона

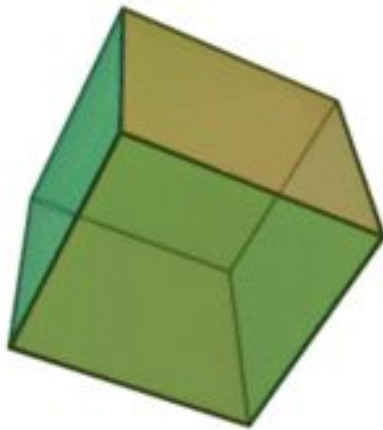
◆ Букет Архимеда

◆ Букет Пуансо

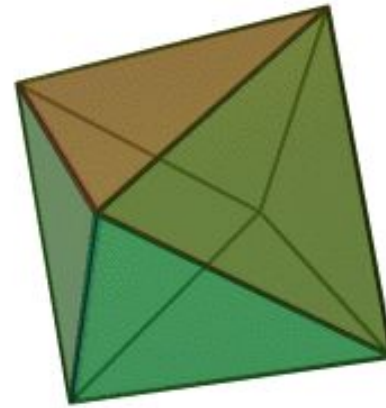
**Правильных
многогранников
вызывающе мало, но
этот весьма скромный
по численности отряд
сумел пробраться в
самые глубины
различных наук.**



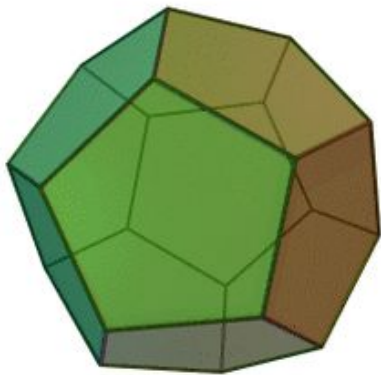
Тетраэдр



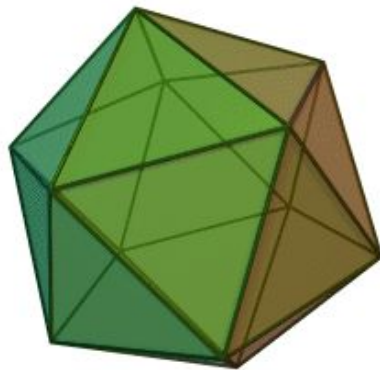
Куб



Октаэдр



Додеаэдр



Икосаэдр

***Правильные
многогранники***



Правильный тетраэдр

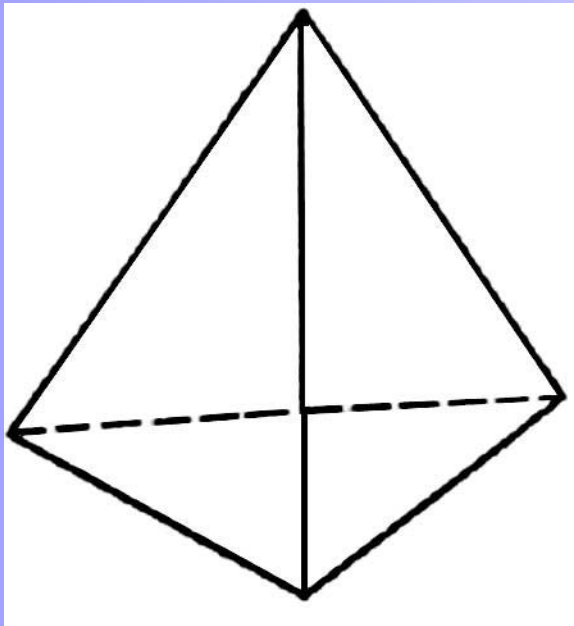


Рис.

1

Составлен из
четырёх
равносторонних
треугольников.
Каждая его вершина
является вершиной
трёх треугольников.
Следовательно,
сумма плоских углов
при каждой вершине
равна 180° .

Правильный октаэдр

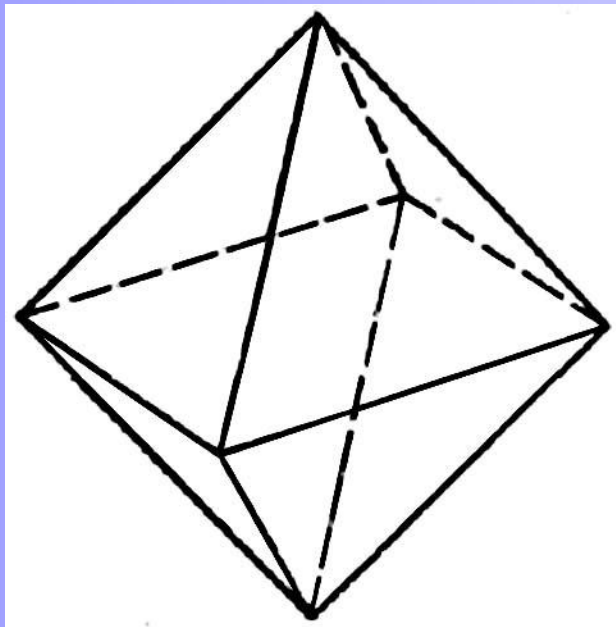


Рис.

2

Составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине 240° .

Правильный икосаэдр

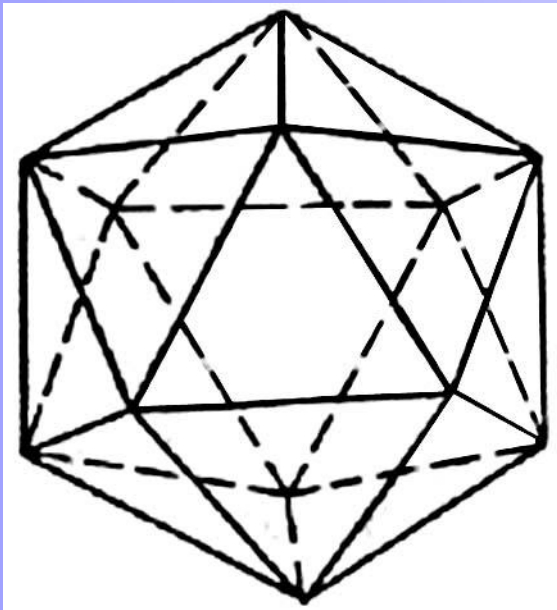


Рис.

3

Составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 300° .

Куб (гексаэдр)

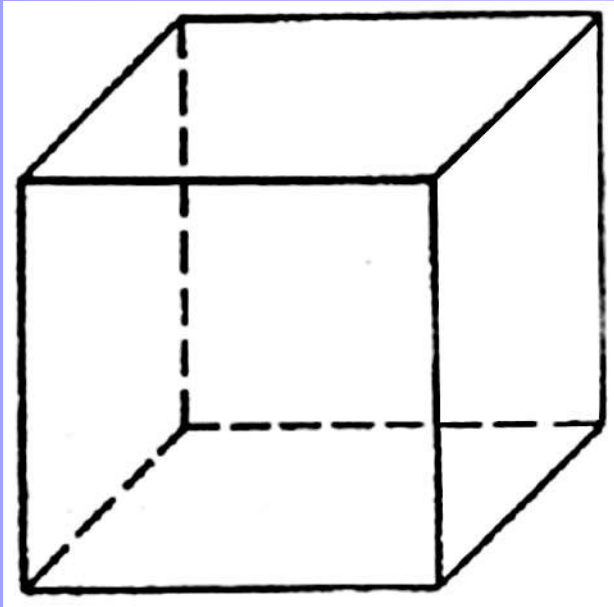


Рис.

4

Составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трёх квадратов.

Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 270° .

Правильный додекаэдр

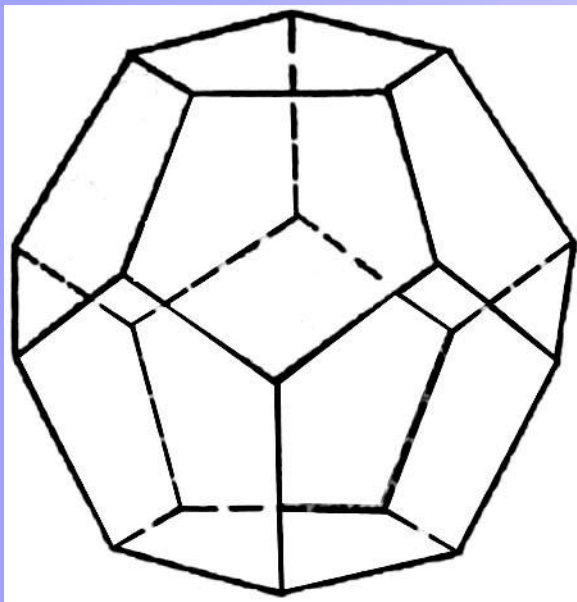


Рис.

5

Составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна

324°

Названия

МНОГОГРАННИКОВ

пришли из Древней Греции,
в них указывается число граней:

«Эдра» – грань;

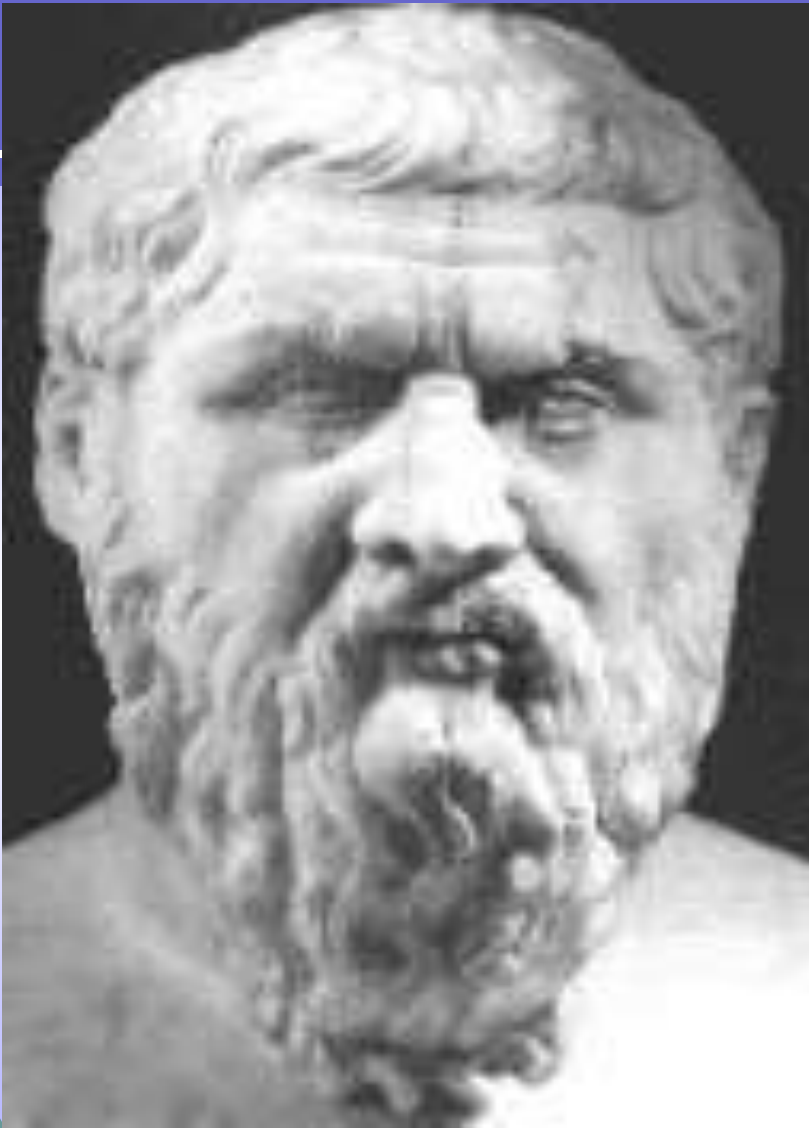
«тетра» – 4;

«гекса» – 6;

«окта» – 8;

«икоса» – 20;

«додека» – 12.



Платон
(427-347 годы до н.э.)

Платон
(427-347 годы до н.э.)

Правильные многогранники в философской картине мира Платона

Правильные многогранники иногда называют Платоновыми телами, поскольку они занимают видное место в философской картине мира, разработанной великим мыслителем Древней Греции Платоном (ок. 428 – ок. 348 до н.э.).

Платон считал, что мир строится из четырёх «стихий» – огня, земли, воздуха и воды, а атомы этих «стихий» имеют форму четырёх правильных многогранников.

Тетраэдр олицетворял огонь, поскольку его вершина устремлена вверх, как у разгоревшегося пламени.

Икосаэдр – как самый обтекаемый – **воду**.

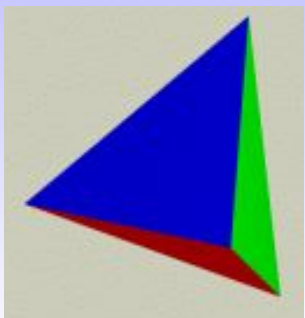
Куб – самая устойчивая из фигур – **землю**.

Октаэдр – **воздух**.

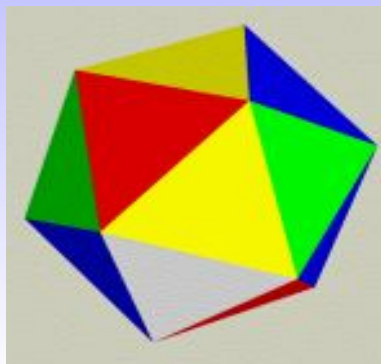
В наше время эту систему можно сравнить с четырьмя состояниями вещества – твёрдым, жидким, газообразным и пламенным.

Пятый многогранник – **додекаэдр** символизировал **весь мир** и почитался главнейшим.

Это была одна из первых попыток ввести в науку идею систематизации.



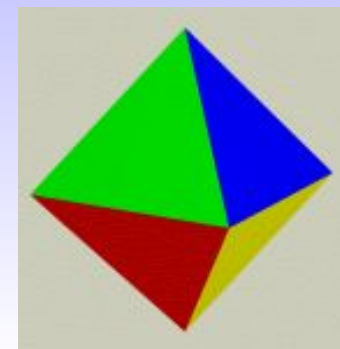
ОГОНЬ



ВОДА

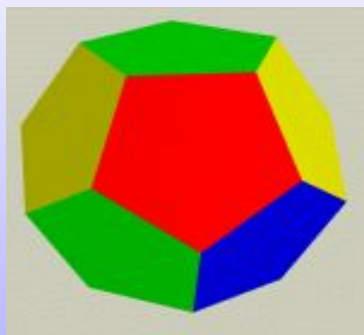


ЗЕМЛЯ



ВОЗДУХ

мир



весь мир

«Космический кубок»

Кеплера

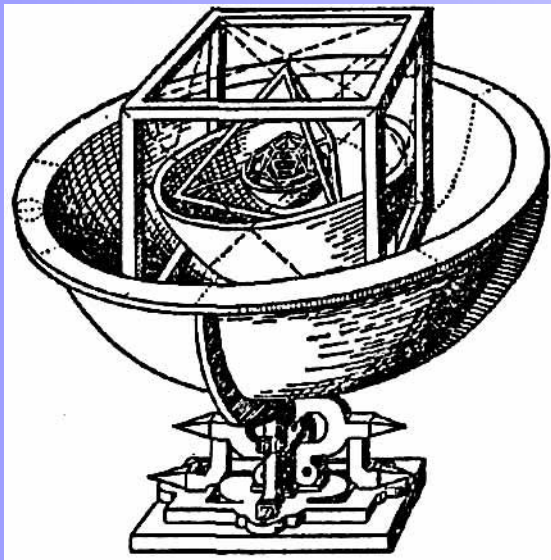


Рис.

⁶
Модель
Солнечной
системы И.
Кеплера

Кеплер предположил, что существует связь между пятью правильными многогранниками и шестью открытыми к тому времени планетами Солнечной системы.

Согласно этому предположению, в сферу орбиты Сатурна можно вписать куб, в который вписывается сфера орбиты Юпитера. В неё, в свою очередь, вписывается тетраэдр, описанный около сферы орбиты Марса. В сферу орбиты Марса вписывается додекаэдр, к которому вписывается сфера орбиты Земли. А она описана около икосаэдра, в который вписана сфера орбиты Венеры. Сфера этой планеты описана около октаэдра, в который вписывается сфера Меркурия.

Такая модель Солнечной системы (рис. 6) получила название «Космического кубка» Кеплера. Результаты своих вычислений учёный опубликовал в книге «Тайна мироздания». Он считал, что тайна Вселенной раскрыта.

Год за годом учёный уточнял свои наблюдения, перепроверял данные коллег, но, наконец, нашёл в себе силы отказаться от заманчивой гипотезы. Однако её следы просматриваются в третьем законе Кеплера, где говорится о кубах средних расстояний от Солнца.

Таблица № 1

Правильный многогранни к	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Таблица № 2

Правильный многогранник	Число	
	граней и вершин (Г + В)	рёбер (Р)
Тетраэдр	$4 + 4 = 8$	6
Куб	$6 + 8 = 14$	12
Октаэдр	$8 + 6 = 14$	12
Додекаэдр	$12 + 20 = 32$	30
Икосаэдр	$20 + 12 = 32$	30

Формула Эйлера

Сумма числа граней и вершин любого многогранника
равна числу рёбер, увеличенному на 2.

$$\Gamma + В = Р + 2$$

Число граней плюс число вершин минус
число рёбер
в любом многограннике равно 2.

$$\Gamma + В - Р = 2$$

Задача

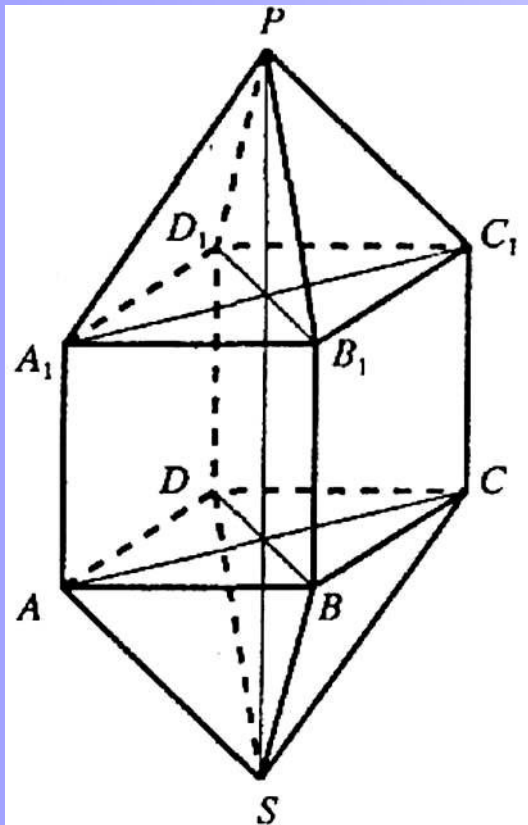


Рис.

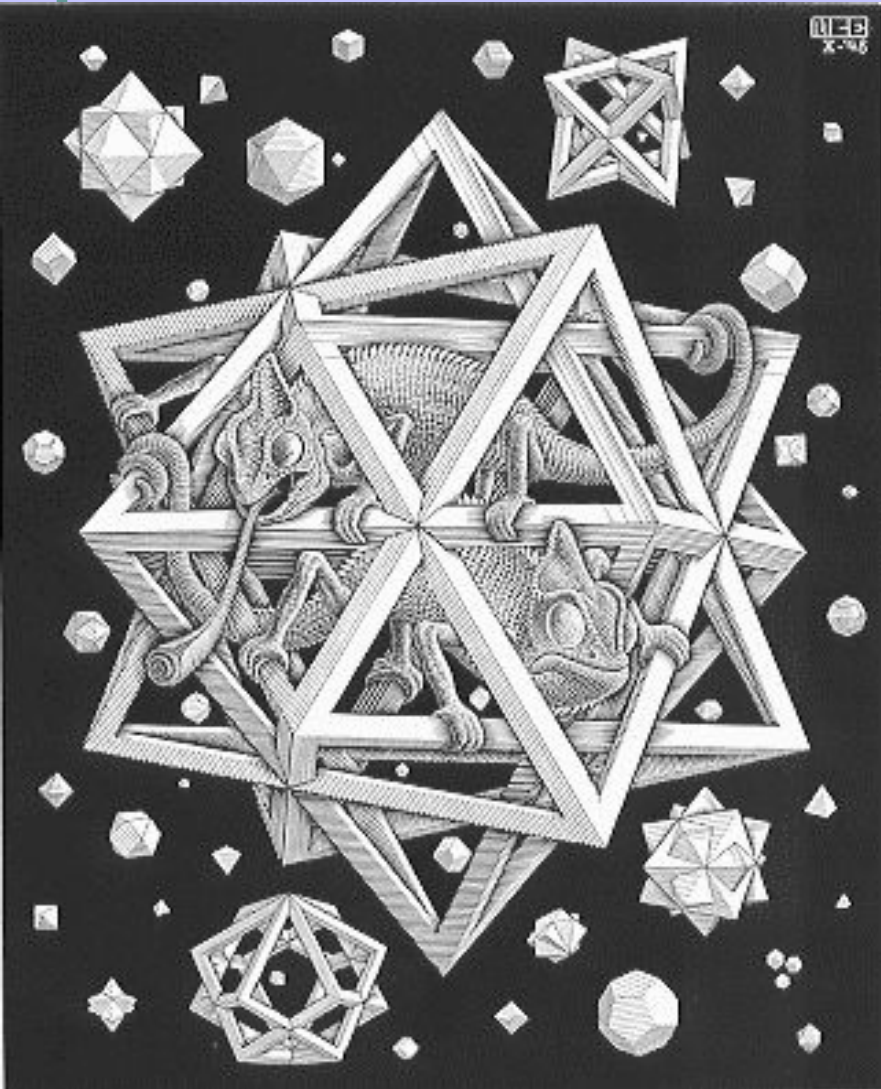
9

Определите количество граней, вершин и рёбер многогранника, изображённого на рисунке 9. Проверьте выполнимость формулы Эйлера для данного многогранника.

«Тайная вечеря»



Сальвадор Дали



Фигуры, полученные объединением правильных многогранников, можно встретить во многих работах Эшера. Наиболее интересной среди них является гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров. Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутри центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры.

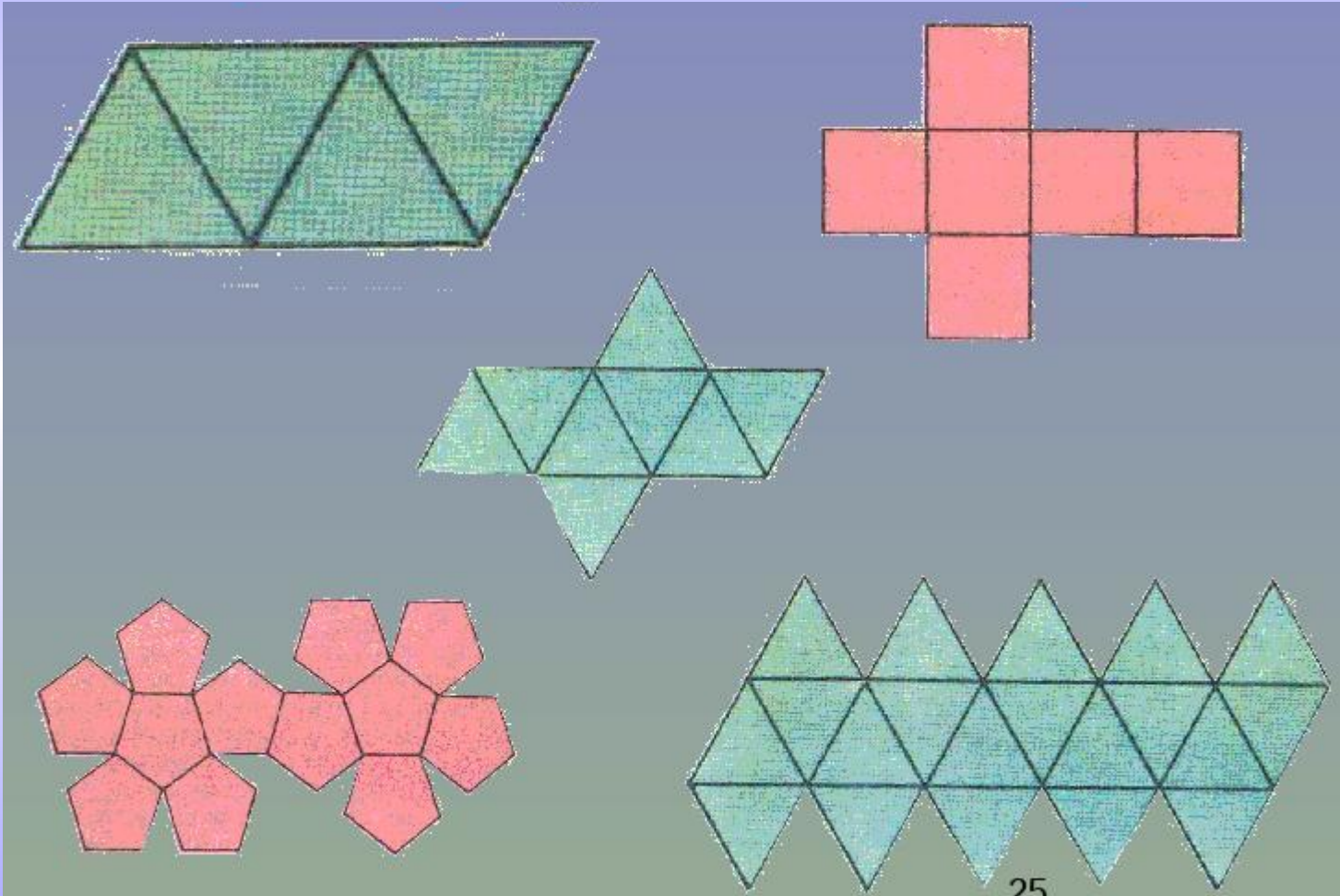
Икосаэдро- додекаэдровая структура Земли



...Ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обуславливают икосаэдро-додекаэдровую структуру Земли. Она проявляется в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра. Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдро-додекаэдровой сетки...

В. Макаров, В. Морозов.

Развертки правильных многогранников



- ❖ Французский математик Пуансо в 1810 году построил четыре правильных звездчатых многогранника: малый звездчатый додекаэдр, большой звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр и большой икосаэдр.
- ❖ Два из них знал И. Кеплер (1571 – 1630 г.).
- ❖ В 1812 году французский математик О. Коши доказал, что кроме пяти «платоновых тел» и четырех «тел Пуансо» больше нет правильных многогранников.

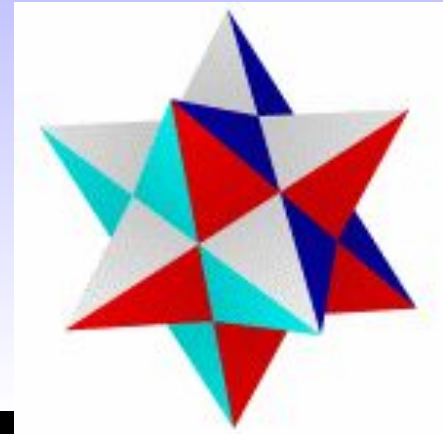
БОЛЬШОЙ ИКОСАЭДР

- Грани большого икосаэдра - пересекающиеся треугольники.
- Вершины большого икосаэдра совпадают с вершинами описанного икосаэдра.
- Большой икосаэдр был впервые описан Луи Пуансо в 1809 г.



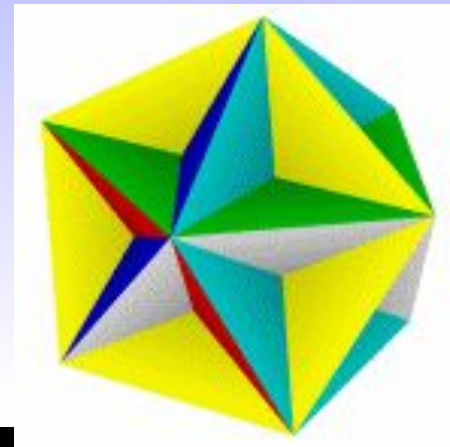
МАЛЫЙ ЗВЕЗДЧАТЫЙ ДОДЕКАЭДР

- Грани малого звездчатого додекаэдра - пентаграммы, как и у большого звездчатого додекаэдра. У каждой вершины соединяются пять граней. Вершины малого звездчатого додекаэдра совпадают с вершинами описанного икосаэдра.
- Малый звездчатый додекаэдр был впервые описан Кеплером в 1619 г.



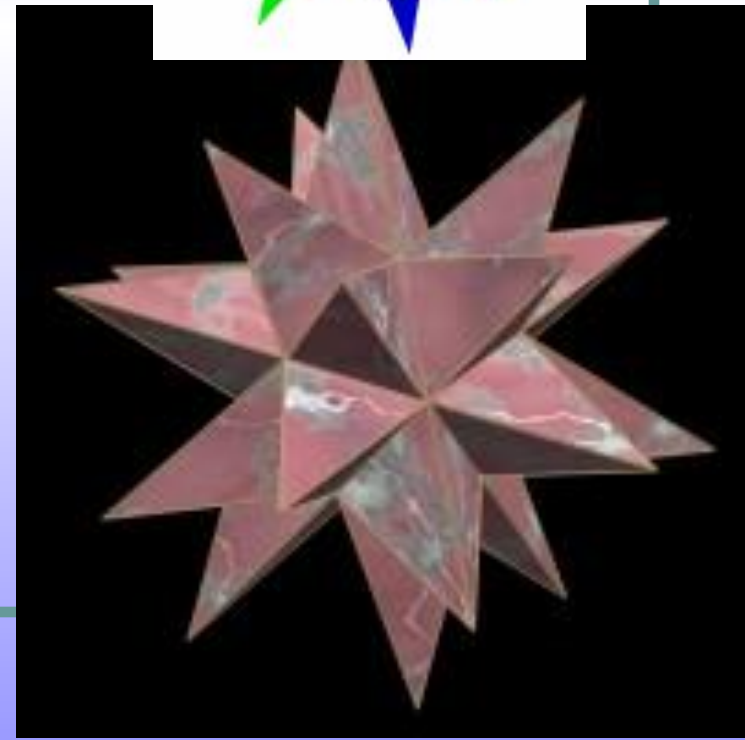
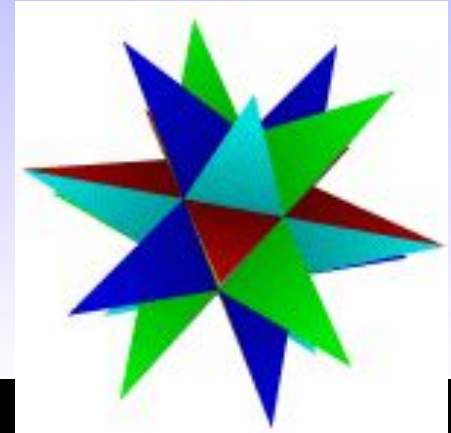
БОЛЬШОЙ ДОДЕКАЭДР

- Грани большого додекаэдра - пересекающиеся пятиугольники.
- Вершины большого додекаэдра совпадают с вершинами описанного икосаэдра.
- Большой додекаэдр был впервые описан Луи Пуансо в 1809 г.



БОЛЬШОЙ ЗВЕЗДЧАТЫЙ ДОДЕКАЭДР

- Грани большого звездчатого додекаэдра - пентаграммы, как и у малого звездчатого додекаэдра. У каждой вершины соединяются три грани.
- Вершины большого звездчатого додекаэдра совпадают с вершинами описанного додекаэдра.
- Большой звездчатый додекаэдр был впервые описан Кеплером в 1619 г.



Кроме правильных, существует *тринадцать* многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед – это тела Архимеда.

- Все многогранные углы у них равны, а грани – правильные многоугольники **разных видов**. (этим они отличаются от платоновых тел). Причем в каждой вершине сходится одно и тоже количество граней.

Архимед около 287 – 212 гг. до нашей эры



- Древнегреческий ученый, математик, физик, механик и инженер из Сиракуз. Сделал множество открытий в геометрии. Заложил основы механики, гидростатики, автор ряда практически важных изобретений
- Открытие тринадцати полуправильных выпуклых многогранников приписывается Архимеду, впервые перечислившего их в недошедшей до нас работе. Ссылки на эту работу имеются в трудах математика Паппа.

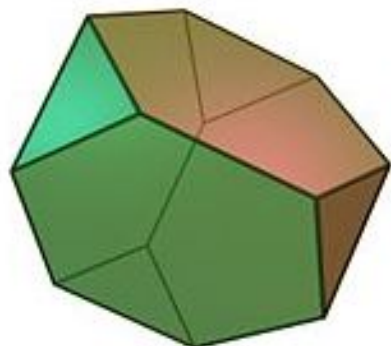


Рис.1

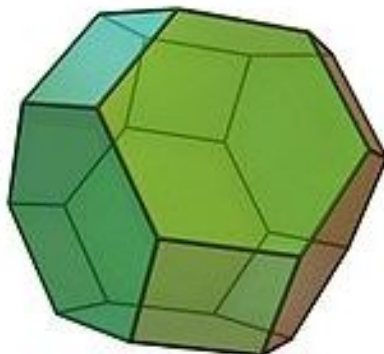


Рис.2



Рис.3

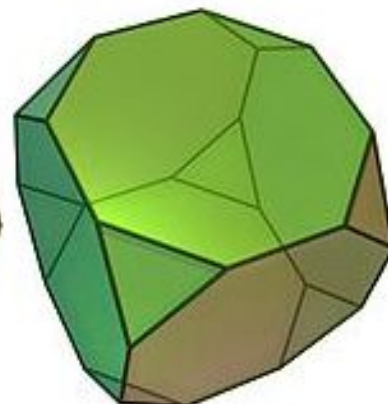


Рис.4

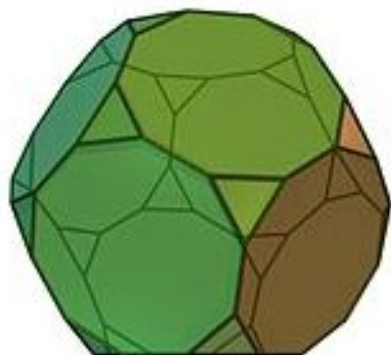


Рис.5

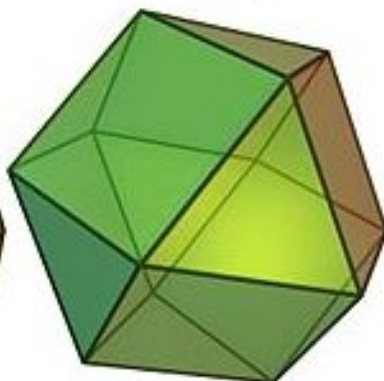


Рис.6



Рис.7



Рис.8

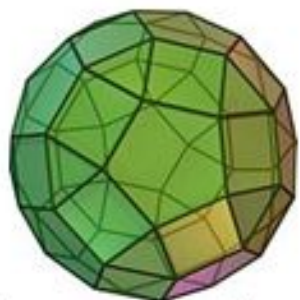


Рис.9

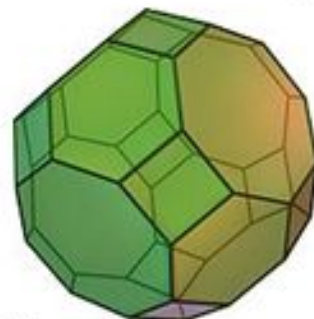


Рис.10

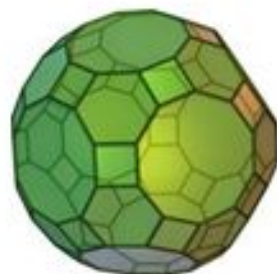


Рис.11



Рис.12



Рис.13

Множество архимедовых тел можно разбить на пять групп

Первую группу составляют пять многогранников, которые получаются из пяти платоновых тел в результате их усечения:

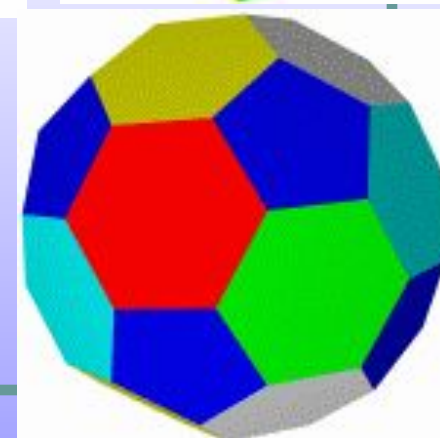
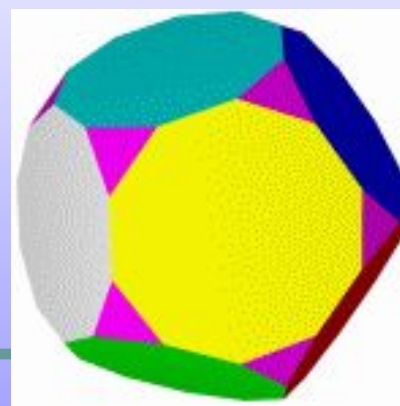
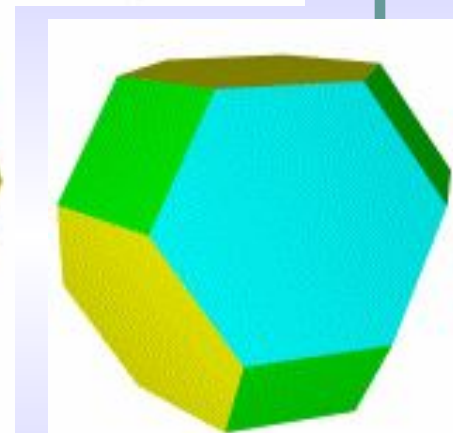
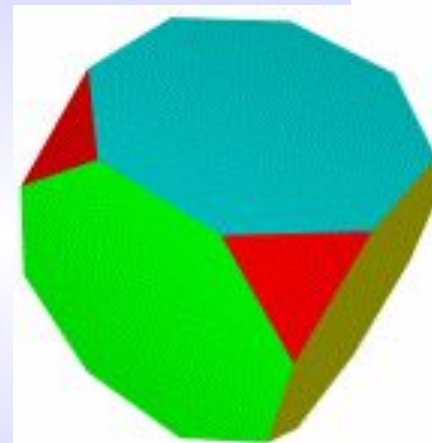
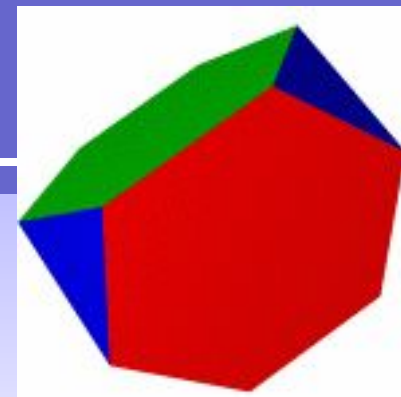
усеченный тетраэдр,

усеченный куб,

усеченный октаэдр,

усеченный додекаэдр,

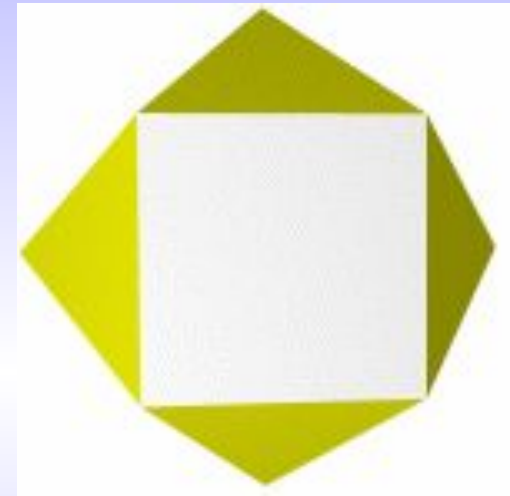
усеченный икосаэдр.



Вторую группу составляют два тела, называемых *квазиправильными* многогранниками. Это название означает, что гранями этого многогранника являются правильные многоугольники всего двух типов, причем каждая грань одного типа окружена гранями другого типа. Эти два тела называются

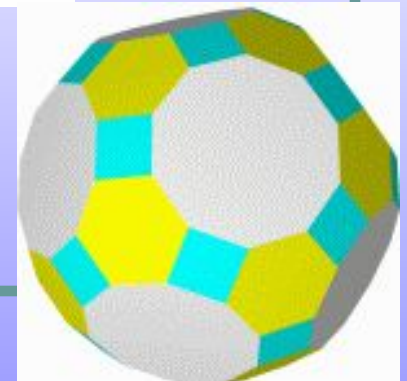
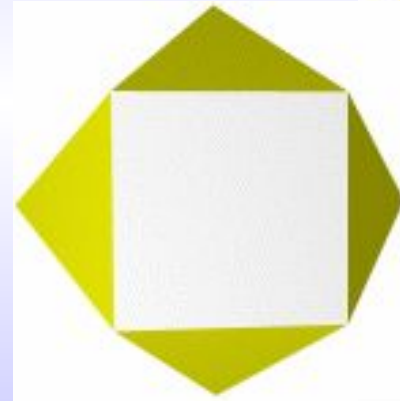
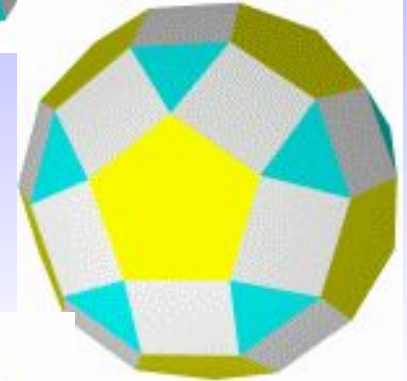
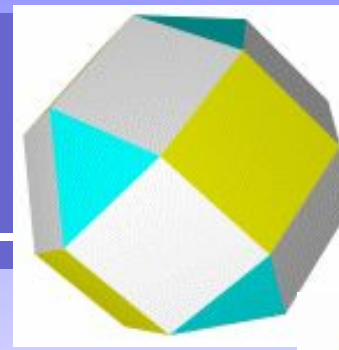
кубоктаэдр

икосододекаэдр.

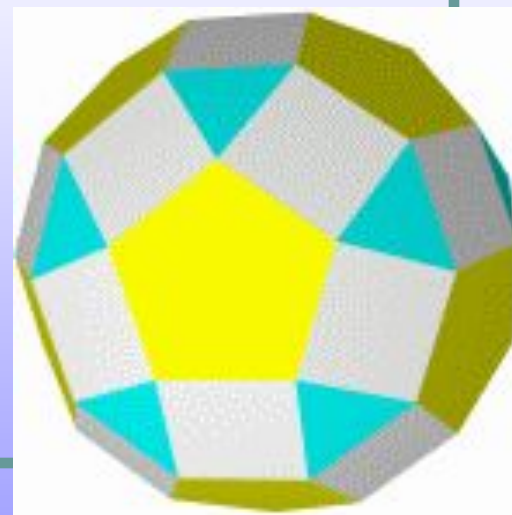
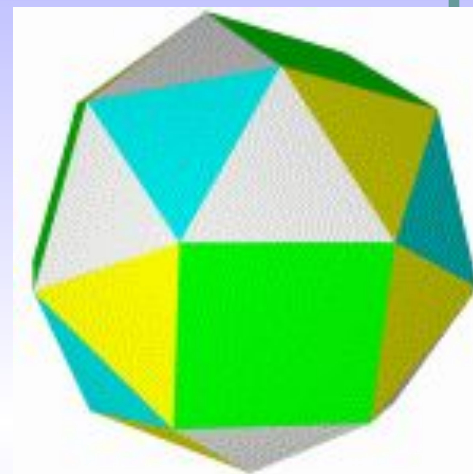


В третью группу входят ромбокубктаэдр, который иногда называют малым ромбокубктаэдром и ромбоикосододекаэдр, называемый также малым ромбоикосододекаэдром.

В эту же группу входят ромбоусеченный кубктаэдр, иногда называемый большим ромбокубктаэдром и ромбоусеченный икосододекаэдр, называемый также большим ромбоикосододекаэдром, которые получаются из кубктаэдра и икосододекаэдра при другом варианте усечения.



В четвертую группу входят две **курносые** модификации - **курносый куб** и **курносый додекаэдр**. Для них характерно несколько повернутое положение граней. В результате эти многогранники, в отличие от предыдущих, не имеют плоскостей симметрии, но имеют оси симметрии. Так как плоскостей симметрии нет, то зеркальное отражение такого тела не совпадает с исходным телом, и поэтому существуют по две формы каждого из них - "правая" и "левая", отличающиеся так же, как правая и левая руки.

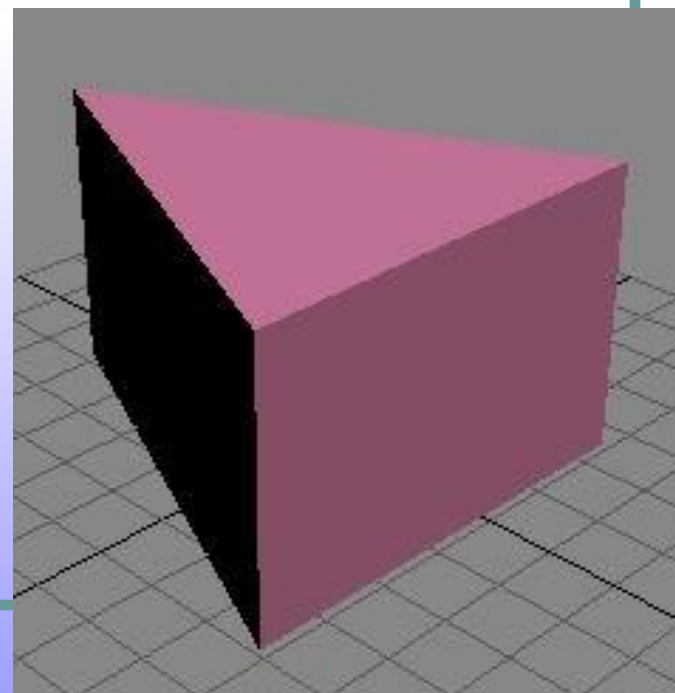
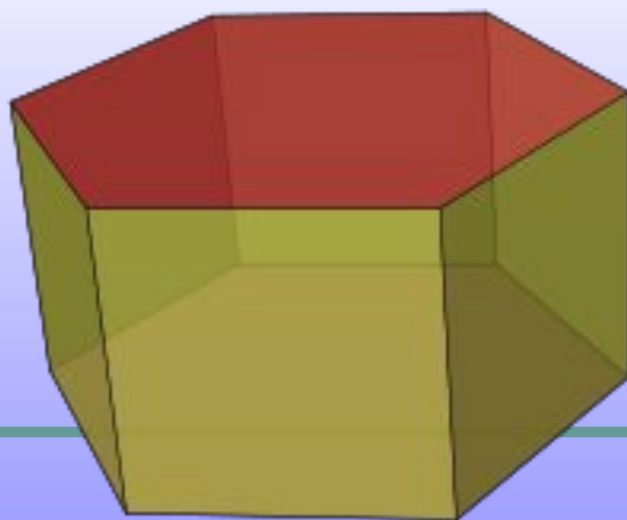
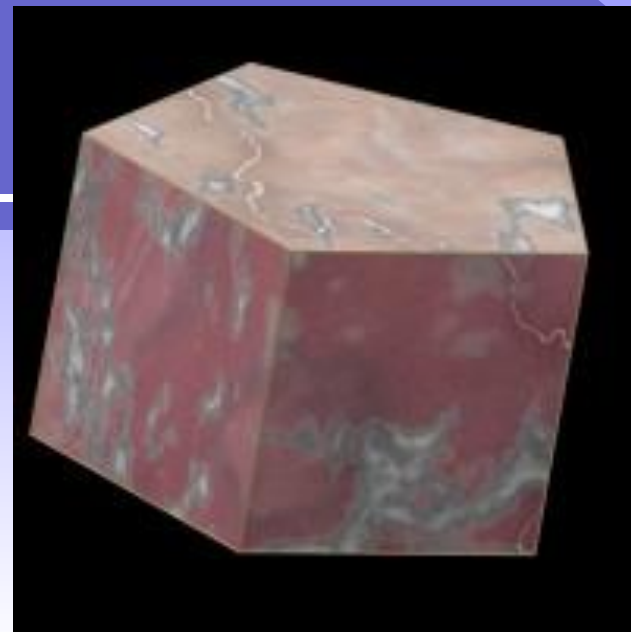


Архимедовы тела

Многогранник	Кол-во вершин	Кол-во ребер	Кол-во граней	Грани	Кол-во
Усеченный куб	24	36	14	восьмиугольная треугольная	6 8
Ус. тетраэдр	12	18	8	шестиугольная треугольная	4 4
Ус. октаэдр	24	36	14	шестиугольная квадратная	8 6
Ус. икосаэдр	60	90	32	шестиугольная пятиугольная	20 12
Кубооктаэдр	12	24	14	квадратные треугольные	6 8
Икосододекаэдр	30	60	32	пятиугольная треугольная	12 20
Ромбокубо октаэдр	24	48	26	квадратная треугольная	18 8
Ромбоикосо додэкаэдр	60	120	62	пятиугольные квадратные треугольные	12 30 20

Многогранник	Кол-во вершин	Кол-во ребер	Кол-во граней	Грани	Кол- во
Ромбоусеченный кубооктаэдр	48	72	26	восьмиугольная шестиугольная	6 8
Курносый куб	24	60	38	квадратная треугольная	6 32
Курносый додекаэдр	60	150	92	пятиугольная треугольная	12 80

- Кроме «архимедовых тел» к полуправильным многогранникам относятся все правильные n -угольные призмы, все ребра которых равны.



Антипризмы

К полуправильным многогранникам относятся также все так называемые антипризмы

