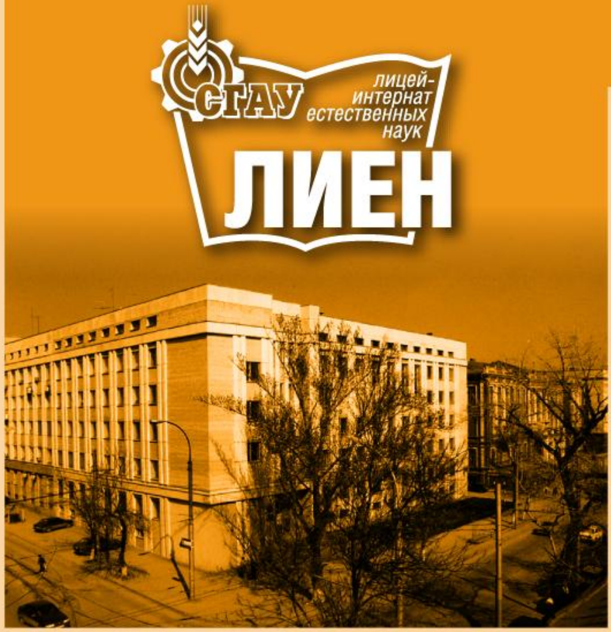
МАТЕМАТИКА



ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ естественных наук

при Саратовском государственном аграрном университете им. Н.И. Вавилова

Уравнения, содержащие знак модуля

Лекцию подготовили: Спицына Татьяна, Суворова Ольга

Руководитель: Калугина Екатерина Евгеньевна

ЛЕКЦИЯ № 3

Литература В помощь учащимся лицея – интерната при СГАУ им. Н. И. Вавилова « Сборник задач по математике Часть *I*»

Уравнения, содержащие знак модуля.

План

- Проверка домашнего задания
- Алгоритмы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля:

$$|f(x)| = |g(x)|$$

$$|f(x)| = g(x)$$

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + ... + |f_n(x)| = g(x)$$

Вопрос № 1. Какие выражения называются уравнениями?

Вопрос № 2. Что называется корнем уравнения? Что значит

Вопрос № 3. Из предложенных уравнений выберите:

а) пару равносильных уравнений;

б) уравнение и уравнение следствие.

$-2x^2-3=0$

$|2x+5|=-7$

$x^2+4x+4=0$

$3x+4=10$

$x^2-5x+6=0$

Равносильные уравнения	$-2x^2-3=0$	$\|2x+5\|=-7$
Уравнение и уравнение следствие	$3x+4=10$	$x^2-5x+6=0$

Алгоритм решения уравнения $|f(x)| = a, a \in R$

Если $a < 0$	$\lvert f(x)\rvert = a$	Уравнение корней не имеет	
Если $a = 0$	$\lvert f(x)\rvert = 0$	$f(x) = 0$	
		I способ	*II* способ
Если $a > 0$	$\lvert f(x)\rvert = a$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0; \\ f(x) = a; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0; \\ f(x) = \text{-}a. \end{cases} \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

Решите уравнение

$\lvert x+5\rvert = -2$	$\lvert x\rvert = x$	$\lvert x^2-2x-3\rvert = -1$	$\lvert x\rvert = -x$
Уравнение корней не имеет	$x \geq 0$	Уравнение корней не имеет	$x \leq 0$
$\lvert x\rvert = -(x-2)^2$	$\lvert x+2\rvert + (x+2)^2 = 0$	$\lvert x\rvert = -\lvert x-1\rvert$	$\frac{\lvert x\rvert}{x} = 1$
Уравнение корней не имеет	$x = -2$	Уравнение корней не имеет	$x > 0$

Решите уравнение

$\lvert x\rvert = a$	$a < 0$, то уравнение корней не имеет	$\lvert x\rvert = -a$	$a < 0, \left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = -a. \end{array}\right.$
	$a = 0 \quad x = 0$		$a = 0 \quad x = 0$
	$a > 0, \left[\begin{array}{l} x = a, \\ x = -a. \end{array}\right.$		$a > 0$, то уравнение корней не имеет
$\lvert x\rvert = -a^2$	$a \neq 0$, то уравнение корней не имеет	$\lvert x\rvert + \lvert a\rvert = 0$	$a \neq 0$, то уравнение корней не имеет
	$a = 0 \quad x = 0$		$a = 0 \quad x = 0$

Алгоритм решения $|f(x)| = |g(x)|$

По определению модуля уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \\ f(x) = -g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) \geq 0, \\ -f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

$$|f(x)| = |g(x)|$$

$$f^2(x) = g^2(x),$$

$$f^2(x) - g^2(x) = 0,$$

$$\big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) - g(x) = 0, \\ f(x) + g(x) = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Пример 1

$|5x - 4| = |3x + 2|$. **(ЦТ 2002 г)**

Решение

$f(x) = |5x - 4|$

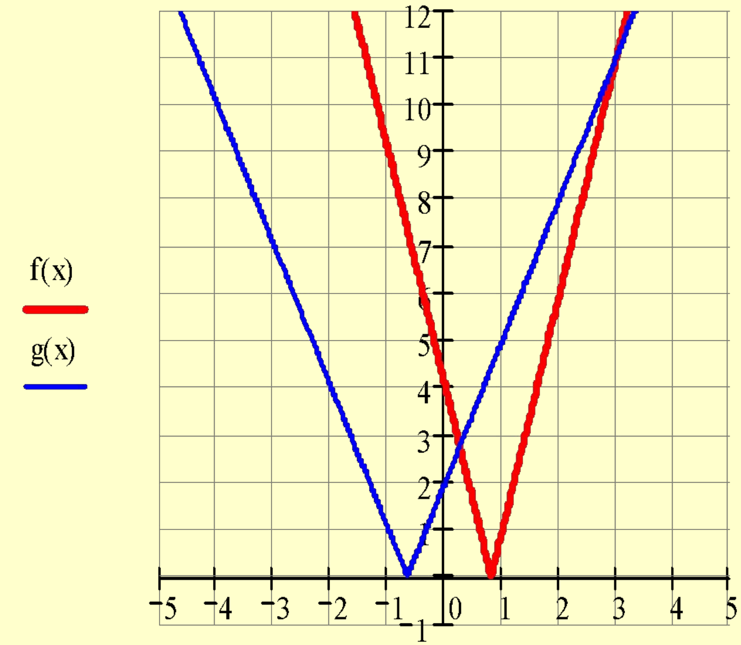
$g(x) = |3x + 2|$

$$|5x - 4| = |3x + 2|,$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x - 4 = 3x + 2, \\ 5x - 4 = -3x - 2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = 6, \\ 8x = 2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 0{,}25. \end{array}\right.$$



Ответ: $3; 0,25.$

Пример 2

$$|x^2 - 3x| = |x - 3|.$$

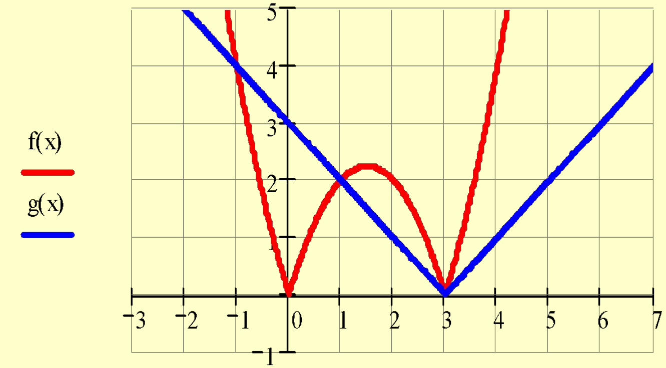
Решение

$$f(x) = |x^2 - 3x| \qquad g(x) = |x - 3|$$

$$|x^2 - 3x| = |x - 3|,$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x = x - 3, \\ x^2 - 3x = -x + 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0. \\ x^2 - 2x - 3 = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3, \\ x = -1, \\ x = 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$



Ответ: $\pm 1; 3.$

Алгоритм решения уравнений $|f(x)| = g(x).$

По определению модуля уравнение

$$|f(x)| = g(x)$$

равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнение

$$|f(x)| = g(x)$$

равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Пример 1

$$|x+2|=2(3-x).$$

Ответ: $x=1\frac{1}{3}.$

Решение

$$|x+2|=2(3-x),$$

$$\begin{cases}3-x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}x+2=2(3-x),\\ x+2=-2(3-x);\end{array}\right.\end{cases}\quad \begin{cases}x\le 3,\\ \left[\begin{array}{l}x+2=6-2x,\\ x+2=-6+2x;\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le 3,\\ \left[\begin{array}{l}3x=4,\\ x=8;\end{array}\right.\end{cases}\quad \begin{cases}x\le 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=1\frac{1}{3},\\ x=8;\end{array}\right.\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 3,\\ x=1\frac{1}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 3,\\ x=8;\end{cases}\end{array}\right.\quad x=1\frac{1}{3}.$$

Пример 2

$|x^2 + x - 3| = x.$ (ЦТ 2004 г)

Решение

$$|x^2 + x - 3| = x, \quad \begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 3 = x, \\ x^2 + x - 3 = -x; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3}, \\ x = -3, \\ x = 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $1; \sqrt{3}.$

Пример 3

$$|x+3| = x^2 + x - 6.$$

Решение

$$|x+3| = x^2 + x - 6,$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 \ge 0, \\ x+3 = x^2 + x - 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 < 0, \\ x+3 = -x^2 - x + 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -3, \\ x^2 - 9 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ x^2 + 2x - 3 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -3, \\ x = \pm 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ x = -3, x = 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad x = \pm 3.$$

Ответ: ± 3

Пример 4

$x^2 - 4|x+1| + 5x + 4 = 0.$ **(ЦТ 2004 г)**

Решение

$$x^2 - 4|x+1| + 5x + 4 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x^2 - 4(x+1) + 5x + 4 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 < 0, \\ x^2 + 4(x+1) + 5x + 4 = 0; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge -1, \\ x^2 - 4x - 4 + 5x + 4 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x^2 + 4x + 4 + 5x + 4 = 0; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge -1, \\ x^2 + x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x^2 + 9x + 8 = 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge -1, \\ x = 0, x = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x = -8, x = -1; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 0, \\ x = -8. \end{array}\right.$$

Ответ: - 8;-1;0.

Алгоритм решения уравнений

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| = g(x)$$

1. Найти нули всех подмодульных выражений, расположить их по возрастанию на числовой оси и выбрать крайний левый из

2. .На полученных интервалах определить знак всех подмодульных выражений и раскрыть модули по определению.

3. Составить и решить совокупность смешанных систем.

Пример 1

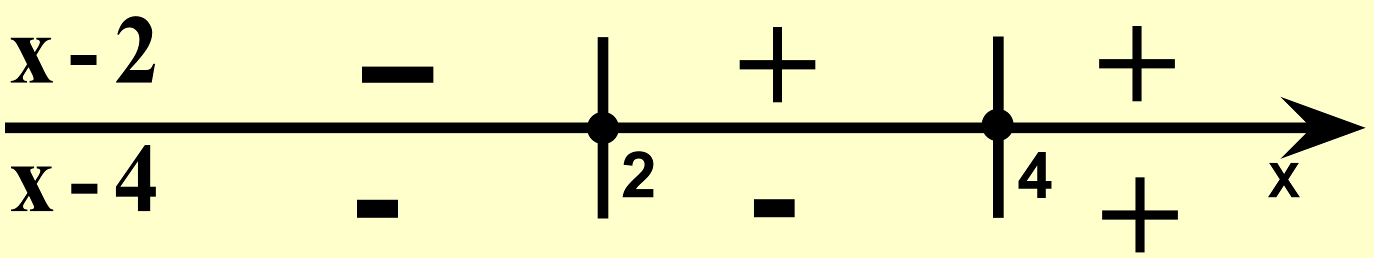
$$|x-2|+|x-4|=3.$$

Решение

Найдём нули под-модульных выражений

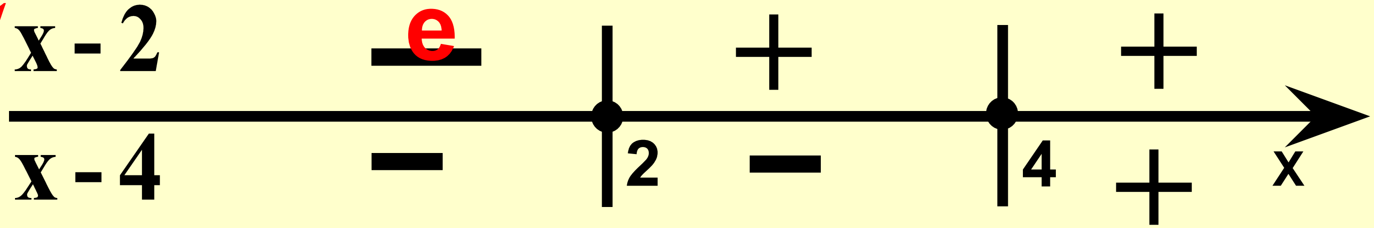
$x-2=0,\quad x=2.$

$x-4=0,\quad x=4.$



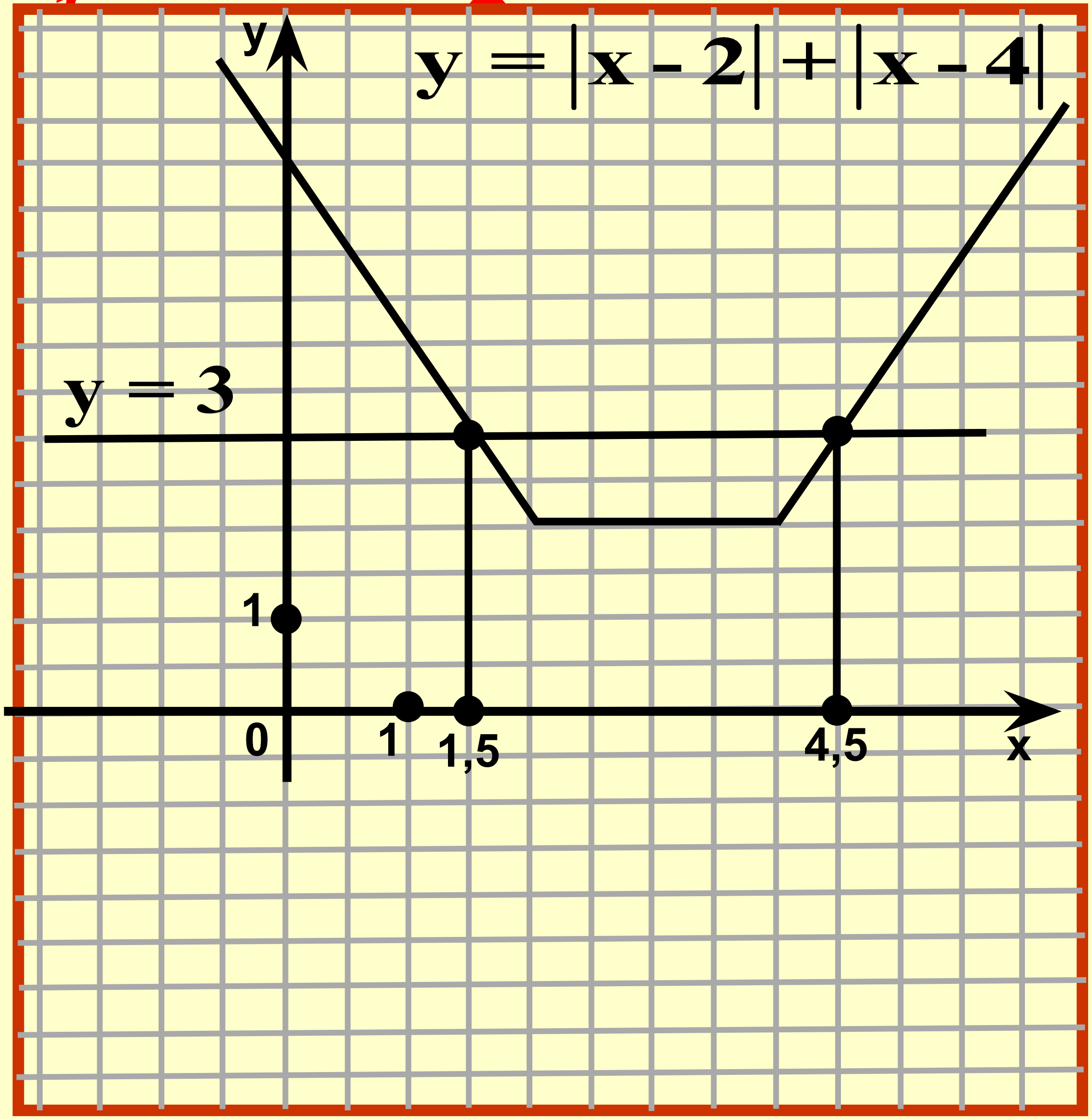
Пример 1 **Решение**

$$|x-2|+|x-4|=3.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ -x+2-x+4=3;\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x<4,\\ x-2-x+4=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\ x-2+x-4=3;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ -2x+6=3;\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x<4,\\ 2=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\ 2x-6=3;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ x=1,5;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\ x=4,5;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=1,5,\\ x=4,5.\end{array}\right.$$

Пример 1 **Решение 2** $|x-2|+|x-4|=3.$



Ответ: $1,5; 4,5.$

Пример 2

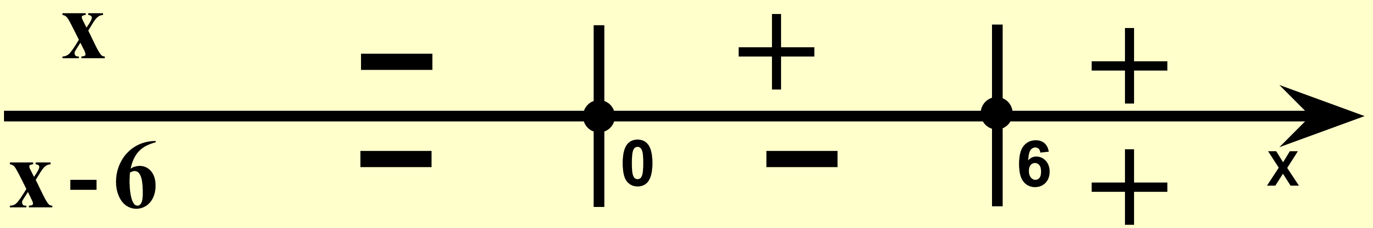
$$|x| + |x - 6| = 6.$$

Решение

Найдём нули под-модульных выражений

$x = 0 \qquad x - 6 = 0,$

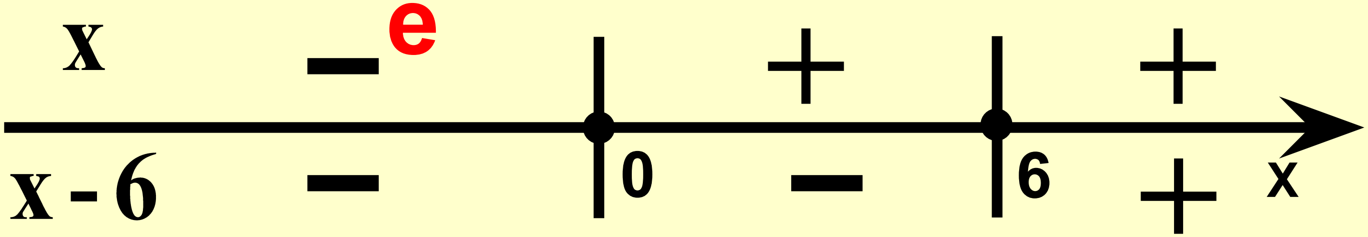
$x = 6.$



Пример 2

Решение

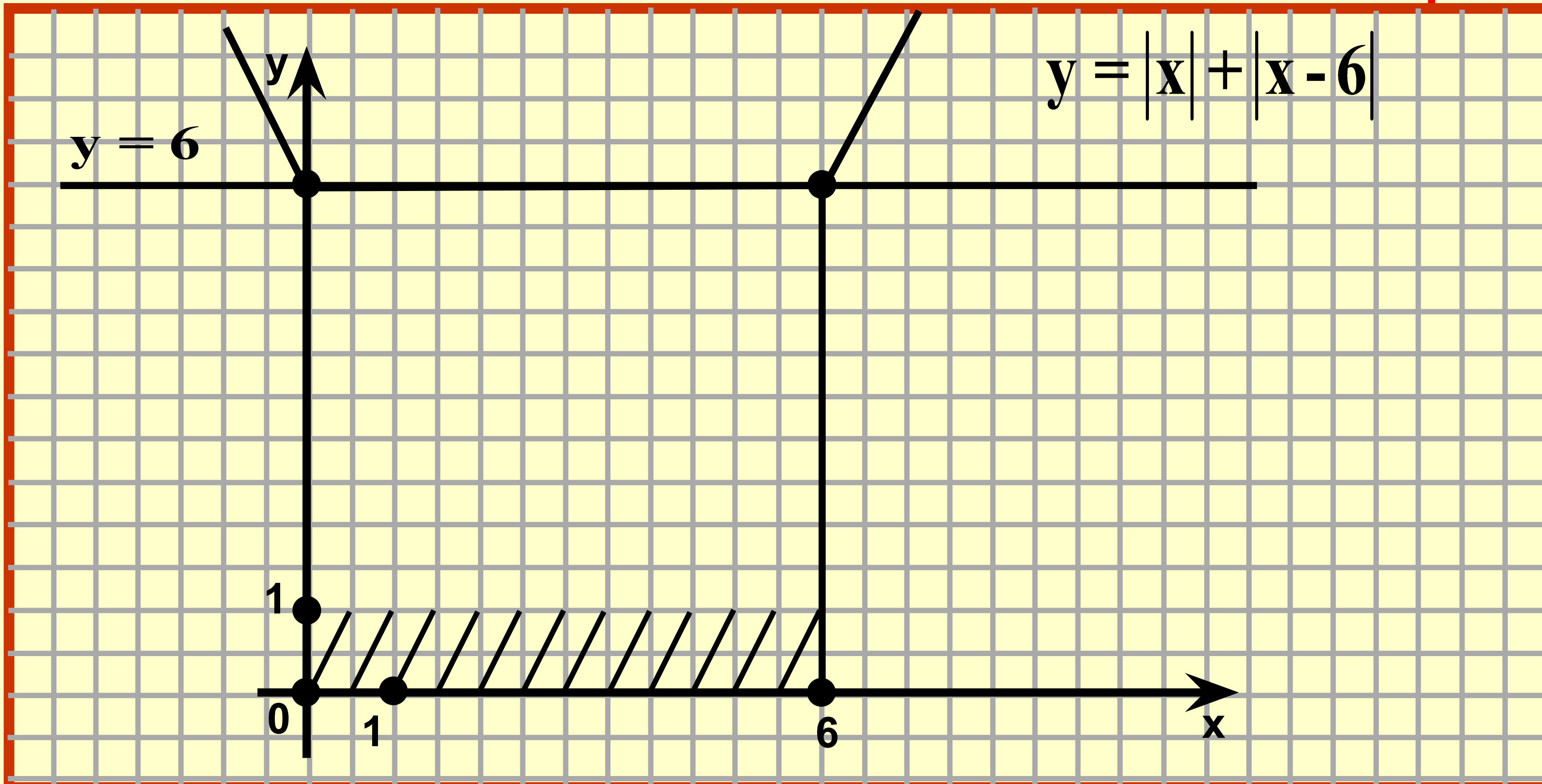
$$|x| + |x-6| = 6.$$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ -x - x + 6 = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 6, \\ x - x + 6 = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 6, \\ x + x - 6 = 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ 2x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 6, \\ 6 = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 6, \\ 2x = 12; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 6, \\ 6 = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 6, \\ x = 6; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le x < 6, \\ x = 6; \end{array}\right. \qquad 0 \le x \le 6.$$

Пример 2 **Решение** $|x| + |x - 6| = 6.$



Ответ: $[0; 6].$

Пример 3

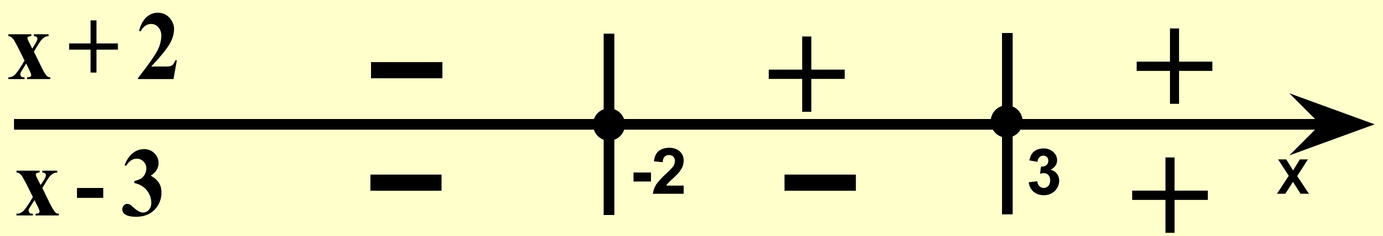
$$|x+2| - |x-3| = 5.$$

Решение

Найдём нули под-модульных выражений

$x + 2 = 0,$ $x = -2.$

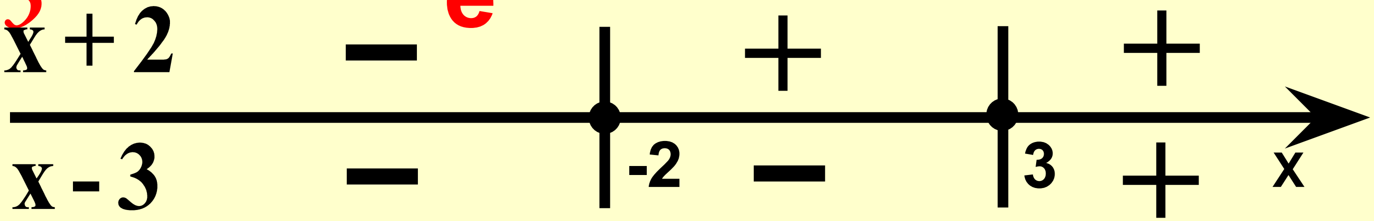
$x - 3 = 0,$ $x = 3.$



Пример 3

Решение

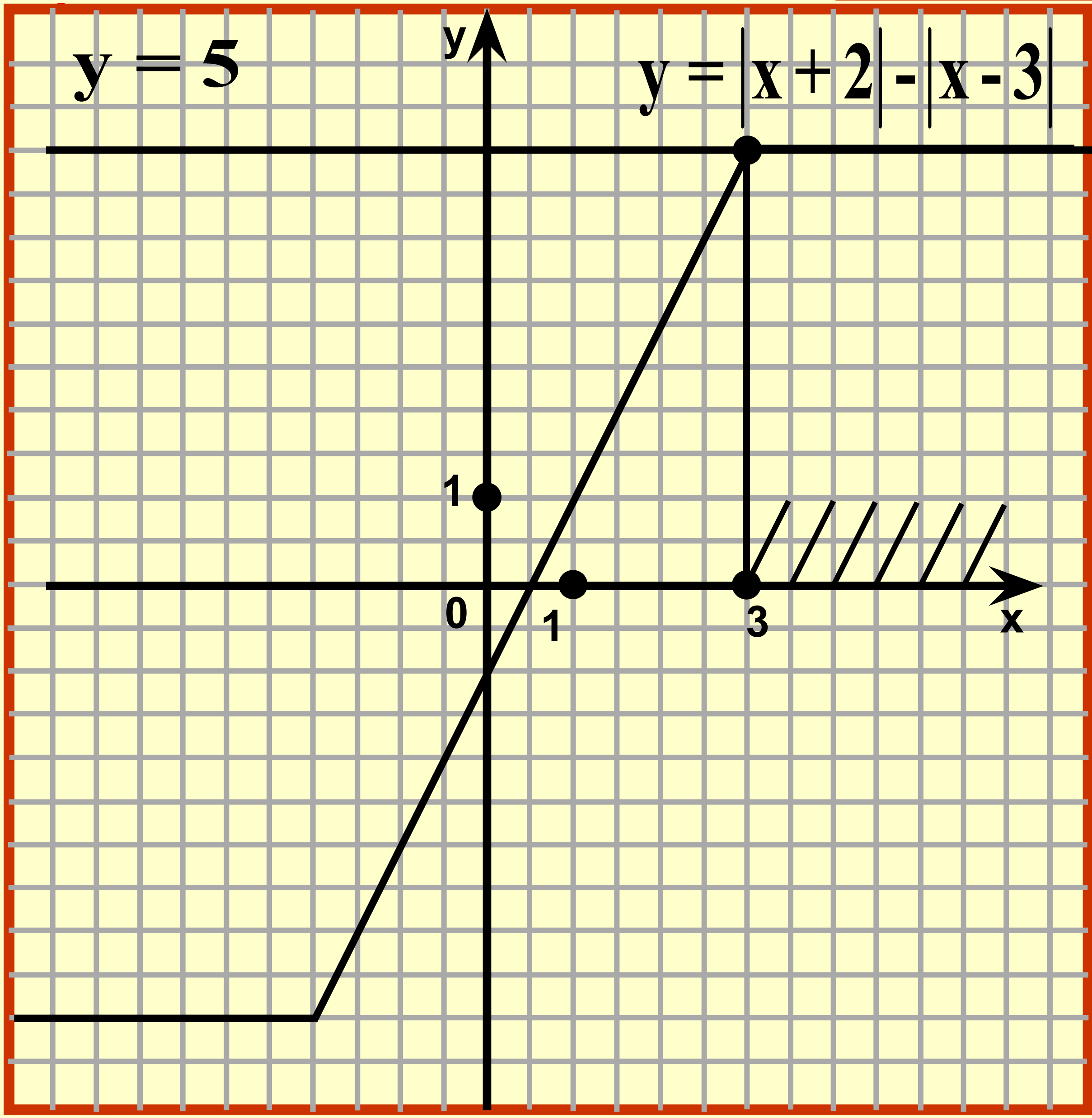
$$|x+2|-|x-3|=5.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-2, \\ -x-2+x-3=5; \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x<3, \\ x+2+x-3=5; \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3, \\ x+2-x+3=5; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-2, \\ -5=5; \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x<3, \\ 2x=6; \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3, \\ 5=5; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} -2\le x<3, \\ x=3; \end{cases} \\ x\ge 3; \end{array}\right. \quad x\ge 3.$$

Пример **Решени**

$|x + 2| - |x - 3| = 5.$



Ответ: $x \geq 3.$

Домашнее задание

1) Материал лекции.

2) М.Л.Галицкий «Сборник задач по алгебре для 8-9 классов» §1п.6.

В помощь учащимся лицея-интерната при СГАУ им. Н.И. Вавилова «Сборник задач по математике. Часть I.» §5 стр. 74 ; 84.

3) М.Л.Галицкий «Сборник задач по алгебре для 8-9 классов» §5 №5.44в);5.44 г); 5.52 ; 5.53.

В помощь учащимся лицея-интерната при СГАУ им. Н.И.