Тема 2. Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений

ИСП-219
ИСП-229

Для тех, кто хочет кодить на Питоне: Численные методы. Вычислительный практикум – П.Н. Вабищевич

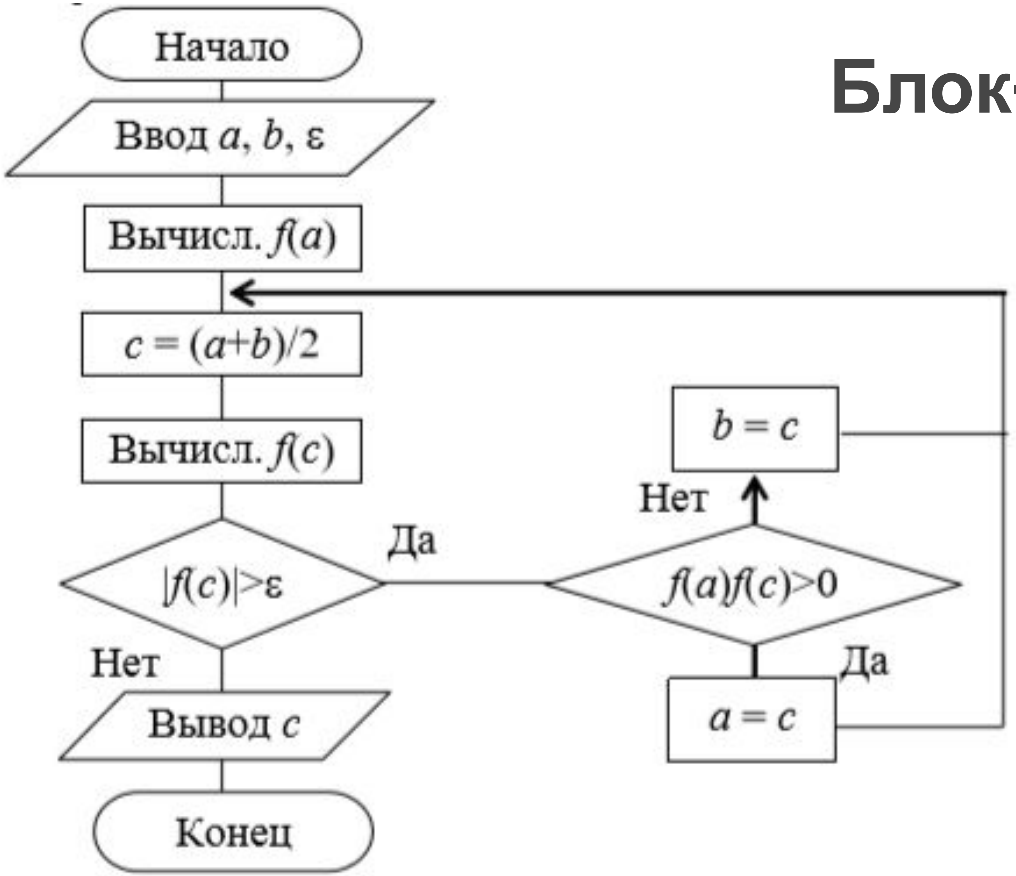
Для тех, кто хочет кодить в Матлабе:

Численные методы. Использование Matlab – Куртис Финк, Джон Мэтьюс

Для тех, кто хочет кодить в Мэпл: Лабораторный практикум по курсу «Численные методы» в Maple – Р.М. Асадуллин, И.Р. Шакуров

Учебники выложены: vk.com/lunamath

Блок-схема метода половинного деления



Пример 2.11. Методом половинного деления уточнить наибольший корень уравнения $x^2 - e^{-x} = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение.

Выделим наибольший корень: $a = 0{,}5$; $b = 1{,}0$. $\xi \in (0{,}5;\ 1{,}0)$.

1) $a_0 \equiv a = 0{,}5$; $b_0 \equiv b = 1{,}0$; $x_1 = (a_0 + b_0)/2 = 0{,}75$; $f(x_1) = 0{,}0901 > 0$; $f(a_0)\,f(x_1) = -0{,}3565 \cdot 0{,}0901 < 0$; $\xi \in (a_0, x_1)$; тогда $a_1 = a_0 = 0{,}5$; $b_1 = x_1 = 0{,}75$; $|b_1 - a_1| = 0{,}25 > \varepsilon$.

Продолжая этот процесс, получаем на 6-й итерации: $a_6 = 0{,}7032$; $b_6 = 0{,}711$; $|b_6 - a_6| = 0{,}0078 < \varepsilon$; $\xi = (b_6 + a_6)/2 = 0{,}7071$.

Свойства дихотомии следующие:

а) идейная простота метода;

б) непритязательность к свойствам функции $f(x)$ — она должна быть лишь непрерывной, а дифференцируемость не предполагается.

К сожалению, отрицательные свойства перевешивают:

в) очень медленная сходимость. Пусть, например, первичный отрезок изоляции имеет единичную длину. После первого шага дихотомии длина уменьшится до $1/2$, после второго — до $(1/2)^2$, и т. д. Поскольку $(1/2)^{10} = 1/1024 < 0,001$, после десяти шагов дихотомии обеспечиваются лишь три верных десятичных знака искомого корня[9];

г) неприменимость к вычислению корней четной кратности (рис. 10);

д) неприменимость к решению систем уравнений.

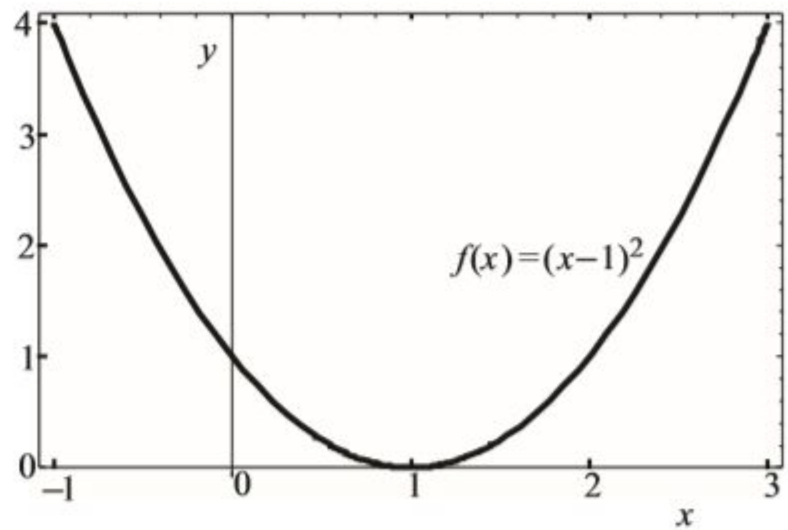


Рис. 10. Отделение корней: случай кратного корня[10]

Пример 2.12. Методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ уточнить наибольший корень уравнения $f(x) = x^2 - e^{-x} = 0$, $x \in (0,5;\ 1,0)$.

Решение.

Начальное приближение $x_0 = 1,0$, так как $f(1,0) > 0$; $f''(1,0) > 0$. Таким образом $x_0 = 1,0$; $x_1 = 1 - f(1)/f'(1) = 0,733$; $x_2 = 0,733 - f(0,733)/f'(0,733) = 0,7038$; $|x_2 - x_1| = 0,092 > \varepsilon$; $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 0,7034$; $|x_3 - x_2| = 0,3414 \cdot 10^{-3} < \varepsilon$, т. е. $\xi \approx 0,7034$.

Имеем уравнение $\operatorname{tg}(0{,}55x+0{,}1)-x^2=0$. Уточнить корень с погрешностью $\varepsilon < 0{,}001$. Запишем $f(x)=\operatorname{tg}(0{,}55x+0{,}1)-x^2$.

Проведя процедуру отделения корней, получим, что корень находится в промежутке [0,6, 0,8], т.е. $a=0{,}6$, $b=0{,}8$.

Так как $f(0{,}6)>0$, $f(0{,}8)<0$ и $f''(x)<0$, то за начальное приближение примем $x_0=0{,}8$, а вычисления будем проводить по формуле

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_0)}.$$

Предварительно найдем $f'(x_0)=\dfrac{0{,}55}{\cos^2(0{,}44+0{,}1)}-2\cdot 0{,}8=$

$$=\frac{0{,}55}{0{,}85772^2}-1{,}6=\frac{0{,}55}{0{,}7356}-1{,}6=0{,}7477-1{,}6=-0{,}8523.$$

Составим таблицу (табл. 3):

Таблица 3

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,8	–0,0406
1	0,7524	–0,0018
2	0,7503	–0,0000

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (35)$$

Свойства метода Ньютона таковы:

а) функции, участвующие в расчетах, должны быть дифференцируемыми;

б) вычислительный процесс (35) самоисправляющийся;

в) нахождение всех корней, сколько бы их не было, обслуживается одним и тем же вычислительным процессом (35) — в противоположность методу итераций, в котором, как правило, для каждого корня приходится индивидуально строить итерационный процесс;

г) скорость сходимости итерационного процесса высока;

д) на каждом шаге вычислений требуется вычислять производную $f'(x_n)$, что может иногда представлять проблему при сложно заданной функции.

На частичное устранение этого единственного возможного недостатка метода Ньютона направлено введение двух методов, являющихся его следствиями, — метода секущих и метода хорд.

Метод секущих

Поскольку математически производная вводится как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

то, убирая предельный переход, получим приближенное значение производной

$$f'(x) \approx \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \tag{37}$$

В соответствии с этим в методе секущих производная приближенно вычисляется по формуле

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \tag{38}$$

Подставляя в формулу (35) это выражение для производной, приходим к следующему итерационному процессу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{39}$$

для которого надо указать д в а начальных приближения x_0 и x_1 (в отличие от метода Ньютона, в котором требовалось указать только x_0). С геометрической точки зрения в методе секущих (39) к а с а т е л ь н а я заменяется с е к у щ е й, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_n и x_{n-1} (рис. 14).

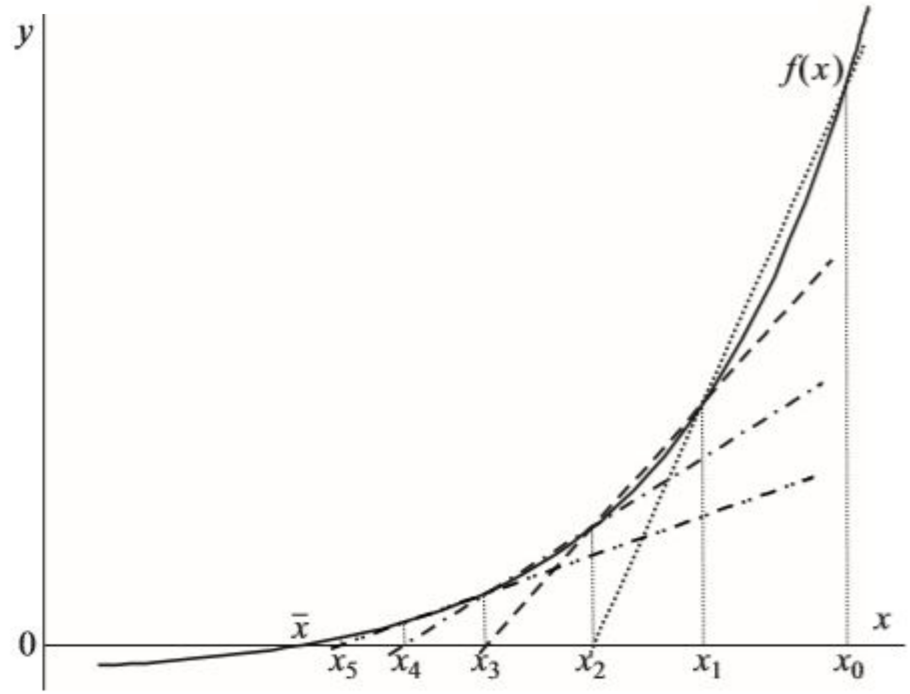


Рис. 14. Геометрическая иллюстрация метода секущих

Свойства метода секущих заключаются в следующем:

а) поскольку метод секущих является модификацией метода Ньютона (метода касательных), он наследует все свойства последнего;

б) скорость сходимости итерационного процесса ниже, чем в методе касательных (вследствие огрубления, заложенного приближением (38), но остается высокой;

Метод хорд

Применим в формуле (35) еще более грубое приближение для производной

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$

(в самом деле, точки x_n и x_0 дальше друг от друга, чем x_n и x_{n-1} в выражении (38)). Подставляя в формулу (35) это выражение для производной, получим итерационный процесс м е т о д а х о р д:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n)-f(x_0)} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

для которого, как и в методе секущих, надо указать д в а начальных приближения x_0 и x_1. Геометрически в методе хорд к а с а т е л ь н а я заменяется х о р д о й, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_n и x_0, (рис. 15).

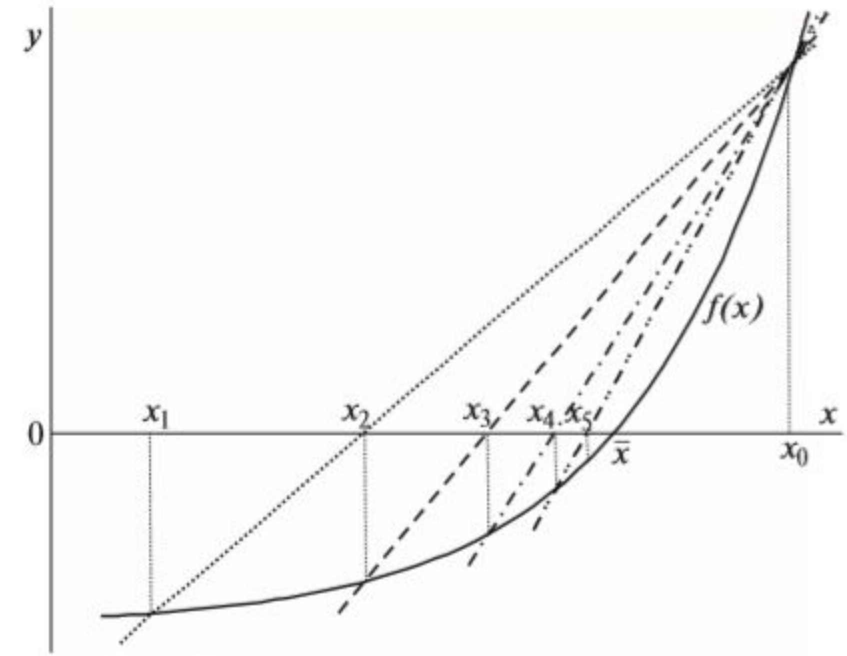


Рис. 15. Геометрическая иллюстрация метода хорд

Имеем уравнение $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$. Уточнить корень с погрешностью $\varepsilon < 0,001$.

Запишем $f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5$.

Проведя процедуру отделения корней, получим, что корень находится в промежутке $[-1, 0]$, т.е. $a = -1$, $b = 0$.

Находим вторую производную $f''(x) = 6x - 0,4$; в промежутке $[-1, 0]$ выполняется неравенство $f''(x) < 0$, поэтому для вычислений применяем формулу

$$x_{i+1} = a + \frac{f(a)}{f(a) - f(x_i)}(x_i - a),$$

где $x_0 = b = 0$; $f(a) = f(-1) = -1 - 0,2 - 0,5 + 1,5 = -0,2$. Все вычисления сведены в табл. 2.

Таблица 2

i	x_i	$f(x_i)$	$x_i - a$
0	0	1,5	1
1	–0,882	0,2173	0,118
2	–0,943	0,0121	0,057
3	–0,946	0,0014	0,054
4	–0,946		

Метод хорд

Этот метод при тех же предположениях обеспечивает более быстрое нахождение корня, чем метод половинного деления. Для этого отрезок $[a,b]$ делится не пополам, а в отношении $|f(a)|:|f(b)|$.

Геометрически метод хорд эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (рис. 3.6).

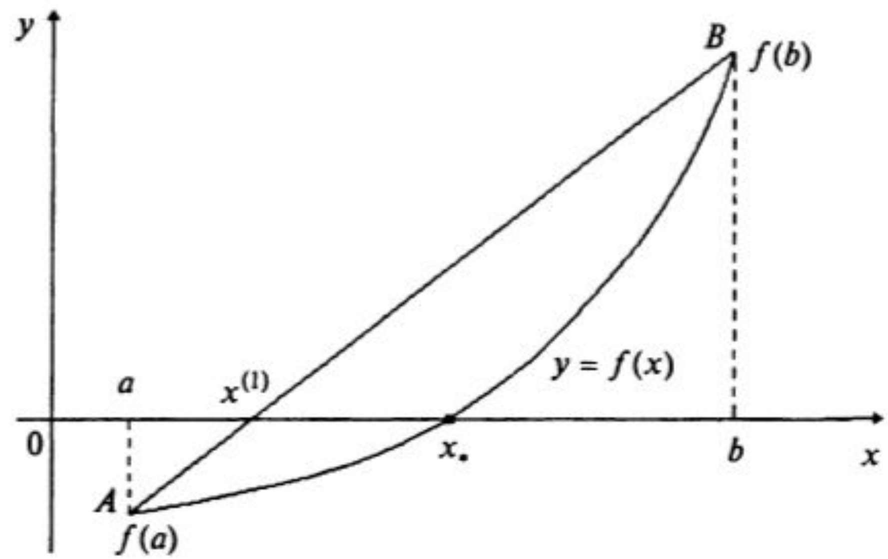


Рис. 3.6

Уравнение хорды AB имеет вид

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Полагая $x = x^{(1)}$ и $y = 0$, получаем

$$x^{(1)} = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Предположим, что вторая производная $f''(x)$ сохраняет постоянный знак, и рассмотрим два случая: $f(a) > 0$, $f''(x) > 0$ (рис. 3.7,*а*) и $f(a) < 0$, $f''(x) > 0$ (рис. 3.7,*б*). Случай $f''(x) < 0$ сводится к рассматриваемому, если уравнение записать в форме: $-f(x) = 0$.

Первому случаю (см. рис. 3.7,*а*) соответствует формула

$$x^{(0)} = b,$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f\left(x^{(k)}\right) - f(a)}\left(x^{(k)} - a\right), \quad k = 0,1,\ldots, \tag{3.7}$$

а второму случаю (см. рис. 3.7,*б*) -

$$x^{(0)} = a,$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f(b) - f\left(x^{(k)}\right)} \cdot \left(b - x^{(k)}\right), \quad k = 0,1,\ldots \tag{3.8}$$

В первом случае остается неподвижным конец a, а во втором случае - конец b.

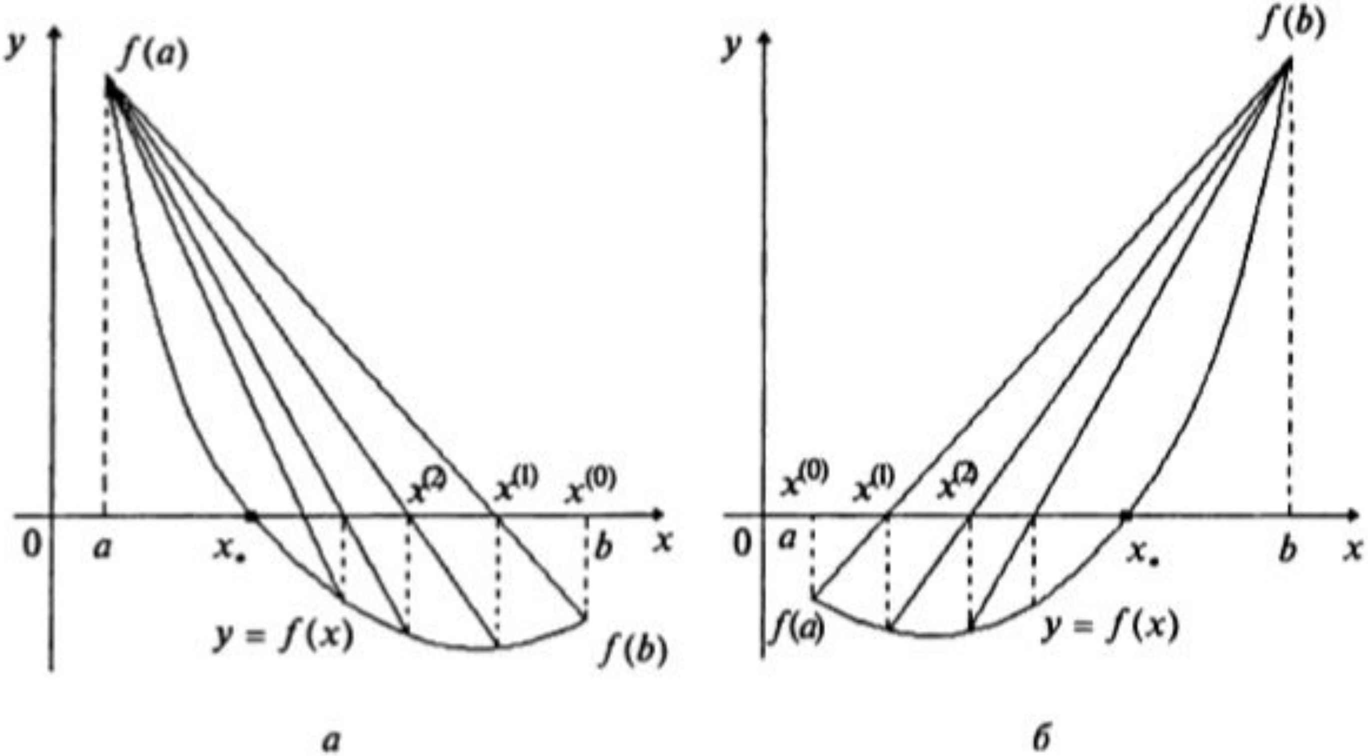


Рис. 3.7

Пример 3.7. Найти корень уравнения $x^3 - x + 1 = 0$ методом хорд с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

□ Рассмотрим задачу нахождения корня на отрезке $[-2;-1]$ (см. пример 3.2). Так как $f(a) = f(-2) = -5$, $f(b) = f(-1) = 1$, а $f''(x) = 3x^2 - 1 > 0$ на отрезке $[-2;-1]$, то $f''(x) \cdot f(b) > 0$ и, следовательно, имеем второй случай (см.рис. 3.7,*б*).

Положим $x^{(0)} = a = -2$, $k = 0$. Тогда по формуле (3.8) получаем

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f\left(x^{(0)}\right)}{f(b) - f\left(x^{(0)}\right)} \cdot \left(b - x^{(0)}\right) = -2 - \frac{-5}{1-(-5)} \cdot (-1-(-2)) = -1{,}1666.$$

Так как $\Delta_1 = \left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| = 0{,}8334 > \varepsilon$, то положим $k = 1$ и продолжим процесс:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f\left(x^{(1)}\right)}{f(b) - f\left(x^{(1)}\right)} \cdot \left(b - x^{(1)}\right) = -1{,}1666 - \frac{-0{,}5786}{1 - 0{,}5786} \cdot (-1-(-1{,}1666)) = -1{,}3953.$$

Так как $\Delta_2 = \left|x^{(2)} - x^{(1)}\right| = 0{,}2287 > \varepsilon$, то положим $k = 2$ и продолжим процесс:

$$x^{(3)}=x^{(2)}-\frac{f\left(x^{(2)}\right)}{f(b)-f\left(x^{(2)}\right)}\cdot\left(b-x^{(2)}\right)=-1{,}3953-\frac{-0{,}3214}{1+0{,}3214}\cdot(-1-(-1{,}3953))=$$

$$=-1{,}2991.$$

Поскольку $\Delta_3=\left|x^{(3)}-x^{(2)}\right|=0{,}0962>\varepsilon$, положим $k=3$:

$$x^{(4)}=x^{(3)}-\frac{f\left(x^{(3)}\right)}{f(b)-f\left(x^{(3)}\right)}\cdot\left(b-x^{(3)}\right)=-1{,}2991-\frac{-0{,}1064}{1-0{,}1064}\cdot(-1-(-1{,}2991))=$$

$$=-1{,}3347.$$

Так как $\Delta_4=\left|x^{(4)}-x^{(3)}\right|=0{,}0356>\varepsilon$, положим $k=4$:

$$x^{(5)}=-1{,}3347-\frac{-0{,}043}{1+0{,}043}\cdot(-1-(-1{,}3347))=-1{,}3209.$$

Поскольку $\Delta_5=\left|x^{(5)}-x^{(4)}\right|=0{,}0138>\varepsilon$, положим $k=5$:

$$x^{(6)}=-1{,}3209-\frac{0{,}0162}{1-0{,}0162}\cdot(-1-(-1{,}3209))=-1{,}3261.$$

Так как $\Delta_6 = \left|x^{(6)} - x^{(5)}\right| = 0{,}0052 > \varepsilon$, положим $k = 6$:

$$x^{(7)} = -1{,}3261 - \frac{-0{,}0059}{1 + 0{,}0059} \cdot (-1 - (-1{,}3261)) = -1{,}3241.$$

Поскольку $\Delta_7 = \left|x^{(7)} - x^{(6)}\right| = 0{,}0020 > \varepsilon$, положим $k = 7$:

$$x^{(8)} = -1{,}3241 - \frac{0{,}00217}{1 - 0{,}00217} \cdot (-1 - (-1{,}3241)) = -1{,}3248.$$

Так как $\Delta_8 = \left|x^{(8)} - x^{(7)}\right| = 0{,}0007 < \varepsilon = 0{,}001$, то корень уравнения $x_* \cong -1{,}3248$. Из анализа поведения Δ_k следует, что сходимость метода хорд линейная, однако более быстрая, чем сходимость метода половинного деления. ■

Метод простых итераций

Пусть известно, что корень x_* уравнения $f(x)=0$ лежит на отрезке $G=\{a \le x \le b\}$.

Методика решения задачи

1. Уравнение $f(x)=0$ равносильным преобразованием привести к виду $x=\varphi(x)$. Это преобразование может быть осуществлено различными путями, но для сходимости нужно обеспечить выполнение условия $|\varphi'(x)| \le \chi < 1$ (χ − некоторая константа). При этом задача сводится к нахождению абсциссы точки пересечения прямой $y=x$ и кривой $y=\varphi(x)$ (рис. 3.8).

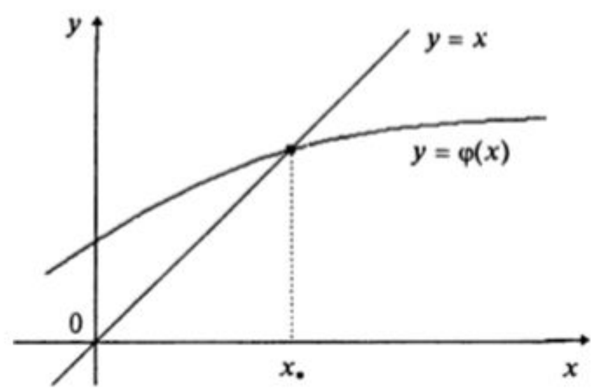


Рис. 3.8

2. Задать начальное приближение $x^{(0)} \in [a,b]$ и малое положительное число ε. Положить $k=0$.
3. Вычислить следующее приближение:

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}). \tag{3.9}$$

4. Если $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \le \varepsilon$, итерации завершаются и $x_* \cong x^{(k+1)}$. Если $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| > \varepsilon$, положить $k = k+1$ и перейти к п.3.

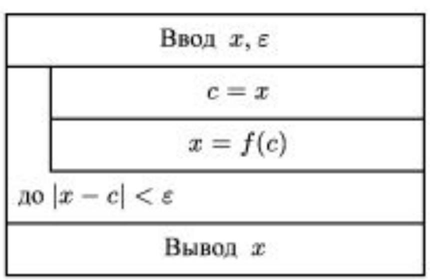


Рис. 5.5. Алгоритм метода простой итерации

Пример 3.8. Методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ уточнить корень трансцендентного уравнения $x^2 - e^{-x} = 0$, причем искомый корень $x_* \in [0{,}5;\ 1{,}0] = G$.

□ 1. Преобразуем исходное уравнение к виду $x = \varphi(x)$: $x = e^{-\frac{x}{2}} = \varphi(x)$. Проверкой можно убедиться, что $\varphi'(x) < 1$ при $x \in G$.

2. В качестве начального приближения выберем $x^{(0)} = \dfrac{0{,}5 + 1{,}0}{2} = 0{,}75$.

3,4. Выполняем последовательные действия по формуле (3.9): $x^{(k+1)} = e^{-\frac{x^{(k)}}{2}}$. Результаты расчетов приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

k	0	1	2	3	4	5
$x^{(k)}$	0,7500	0,6873	0,7091	0,7015	0,7042	0,7032
$\left\lvert x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\rvert$	–	0,0627	0,0218	0,0076	0,0027	0,0010

На пятой итерации выполнилось условие $\left|x^{(5)}-x^{(4)}\right| \le \varepsilon = 0{,}001$, поэтому процесс завершен. В качестве приближенного решения берется $x_* \cong x^{(5)} = 0{,}703$. Подстановка $x^{(5)}$ в исходное уравнение дает $(x^{(5)})^2 - e^{-x^{(5)}} = 0{,}00088$, т.е. равенство в уравнении также выполняется с заданной точностью. Видно, что сходимость двусторонняя (это следует также из неравенства $-1 < \varphi'(x) < 0$) и линейная, так как отношения $\dfrac{\left|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right|}{\left|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right|}$ при $k = 1,2,3,4,5$ примерно одинаковые и равны $\approx 0{,}35$ (знаменатель геометрической прогрессии).■