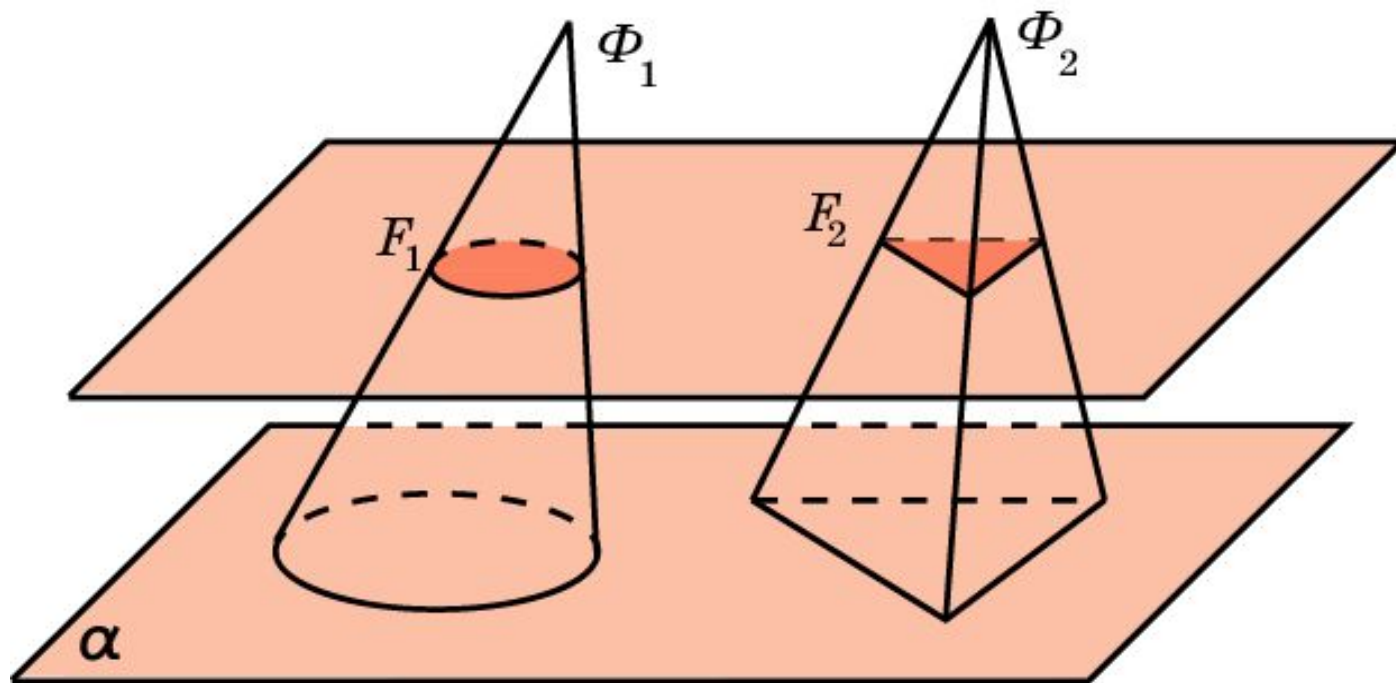


Обобщенный конус

Пусть F - фигура на плоскости π , и S - точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S , образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть **обобщенным конусом**. Фигура F называется **основанием** обобщенного конуса, точка S - **вершиной** обобщенного конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется **высотой** обобщенного конуса.

Частным случаем обобщенного конуса является **конус** и **пирамида**.

Теорема. Если два обобщенных конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то их объемы равны.



Упражнение 1

Верно ли, что две пирамиды, имеющие общее основание и вершины, расположенные в плоскости, параллельной основанию, равновелики?

Ответ: Да.

Упражнение 2

Два конуса имеют равные высоты, а площадь основания одного в три раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

Ответ: 3:1.

Упражнение 3

Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину и центр основания кругового конуса, делит его на равновеликие части?

Ответ: Да.

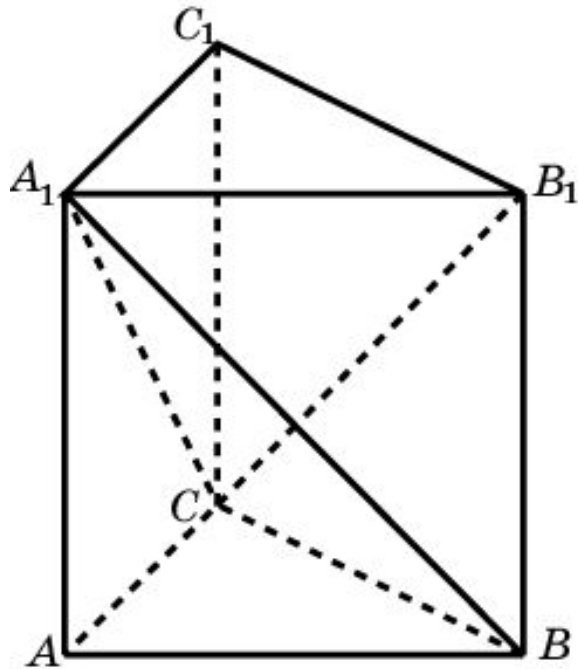
Упражнение 4

В основании пирамиды квадрат. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину пирамиды и центр основания, делит пирамиду на две равновеликие части?

Ответ: Да.

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Теорема. Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту.



Доказательство. Рассмотрим случай треугольной пирамиды. Пусть A_1ABC треугольная пирамида. Достроим ее до призмы $ABCA_1B_1C_1$. Плоскости, проходящие через точки B, C, A_1 и C, B_1, A_1 разбивают эту призму на три пирамиды A_1ABC , A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ с вершинами в точке A_1 . Пирамиды A_1CBB_1 и $A_1CB_1C_1$ имеют равные основания $CB B_1$ и $CB_1 C_1$. Кроме этого, данные пирамиды имеют общую вершину, а их основания лежат в одной плоскости. Значит, эти пирамиды имеют общую высоту. Следовательно, эти пирамиды имеют равные объемы.

Рассмотрим теперь пирамиды A_1ABC и $CA_1B_1C_1$. Они имеют равные основания ABC и $A_1B_1C_1$ и равные высоты. Следовательно, они имеют равные объемы. Таким образом, объемы всех трех пирамид равны. Учитывая, что объем призмы равен произведению площади основания на высоту, получим формулу объема треугольной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

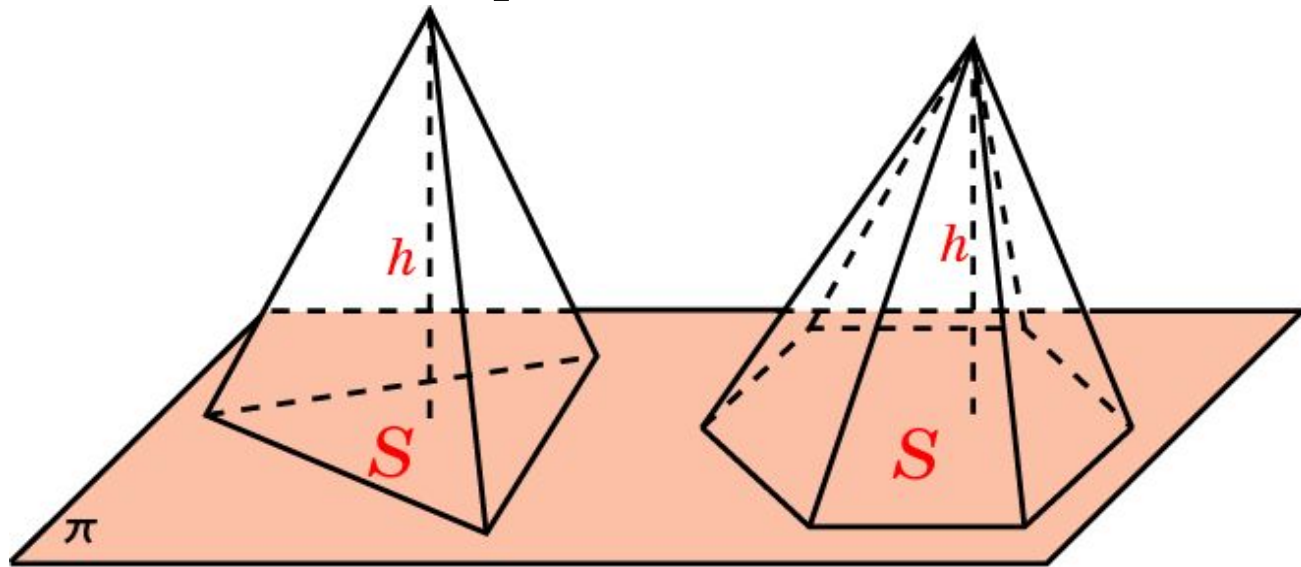
где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Пусть теперь дана пирамида, в основании которой - многоугольник. Рассмотрим треугольную пирамиду с такой же высотой и такой же площадью основания. По теореме предыдущего параграфа объемы этих пирамид равны и, следовательно, имеет место формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

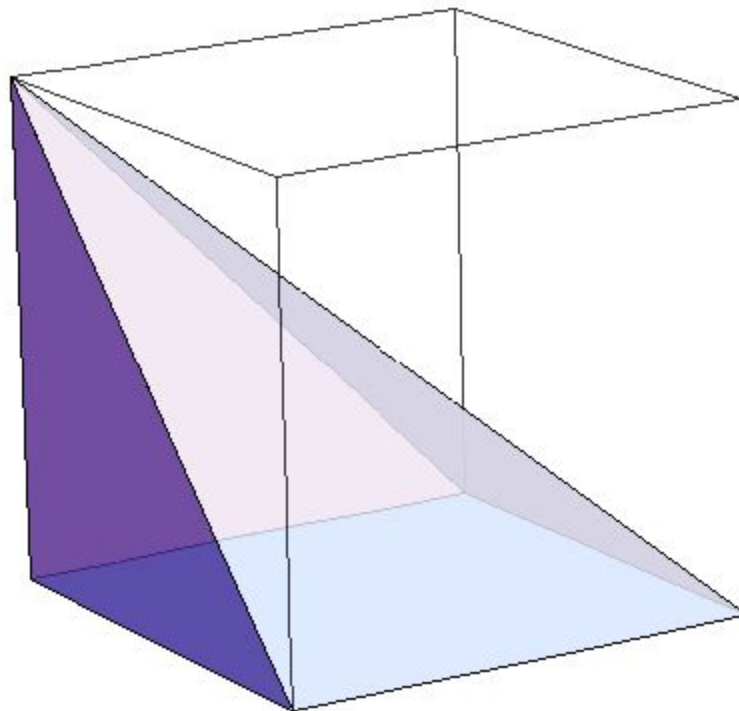
где S - площадь основания пирамиды, h - ее высота.



$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Упражнение 1

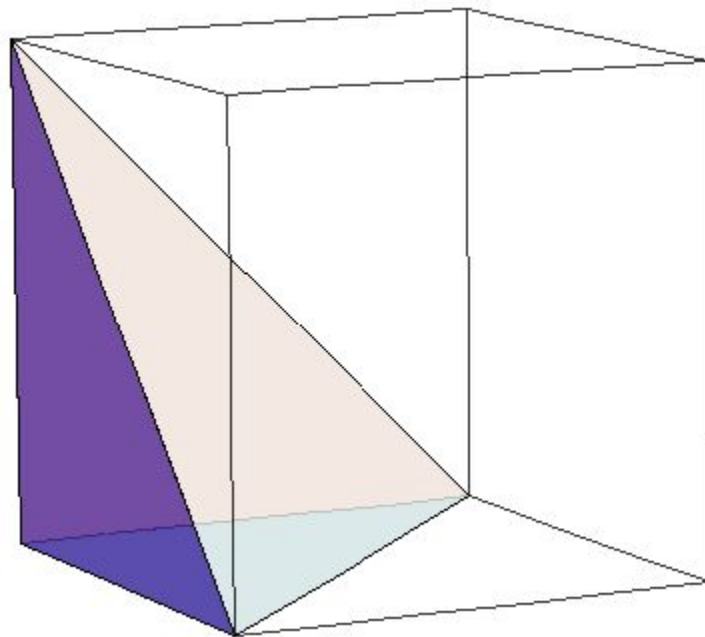
Найдите объем четырехугольной пирамиды, изображенной на рисунке, вершинами которой являются вершины единичного куба.



Ответ: $1/3$.

Упражнение 2

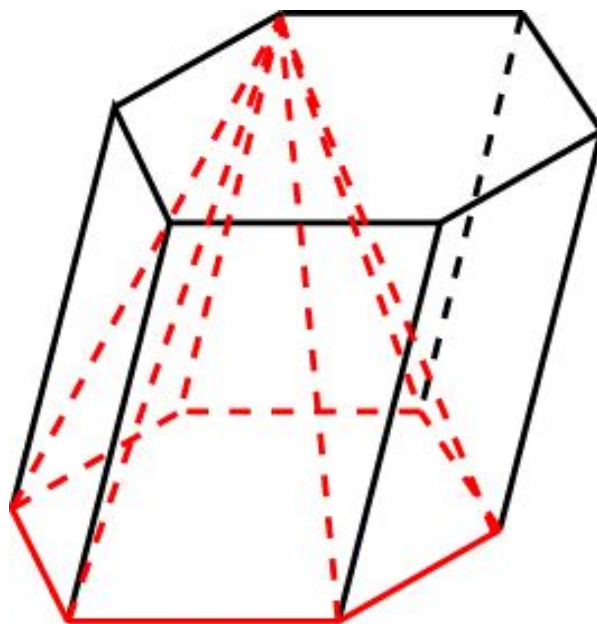
Найдите объем треугольной пирамиды, изображенной на рисунке, вершинами которой являются вершины единичного куба.



Ответ: $1/6$.

Упражнение 3

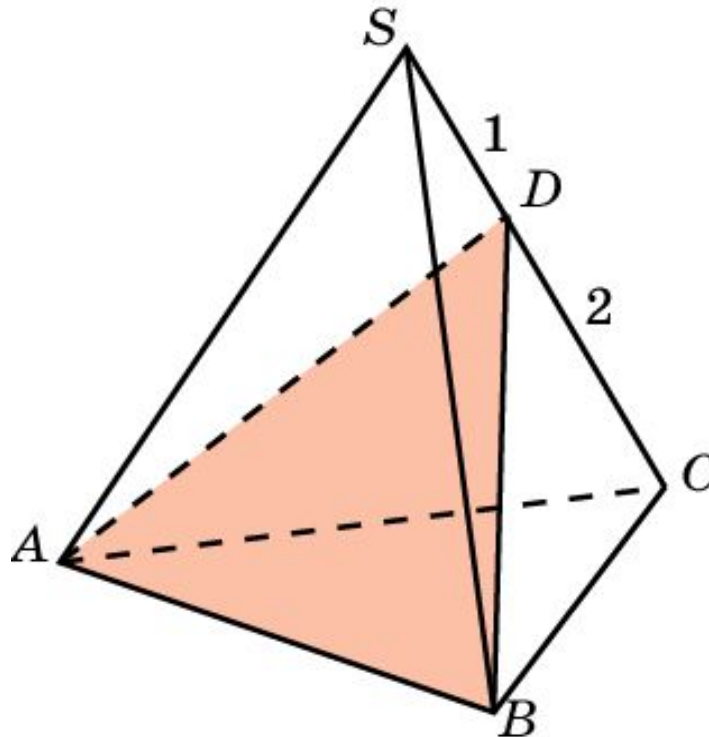
Вершинами пирамиды являются все вершины одного основания и одна вершина другого основания призмы. Какую часть объема призмы составляет объем пирамиды?



Ответ: $1/3$.

Упражнение 4

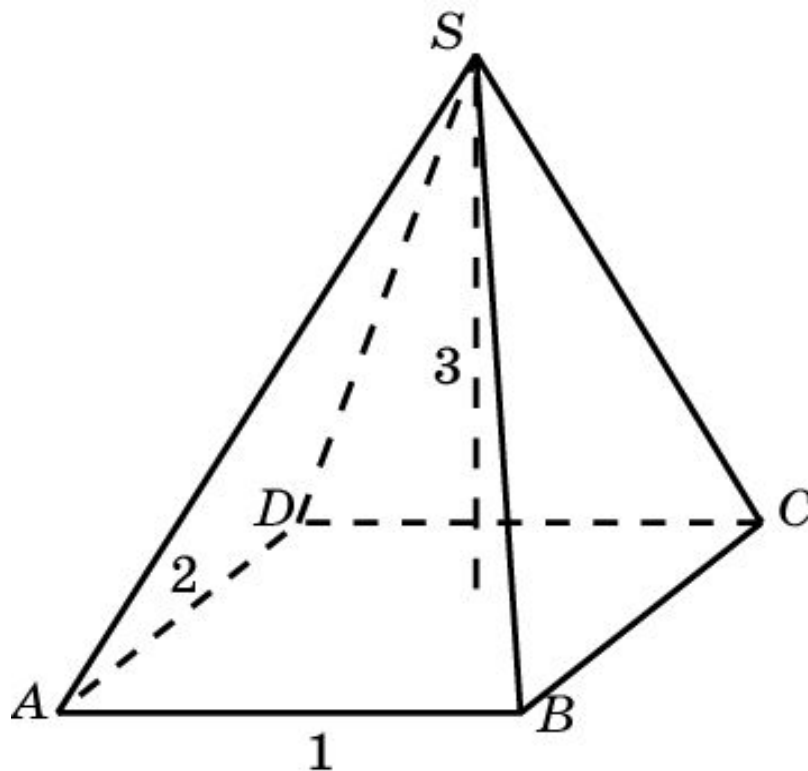
Плоскость проходит через сторону основания треугольной пирамиды и делит противоположное боковое ребро в отношении $1 : 2$, считая от вершины. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?



Ответ: $1 : 2$.

Упражнение 5

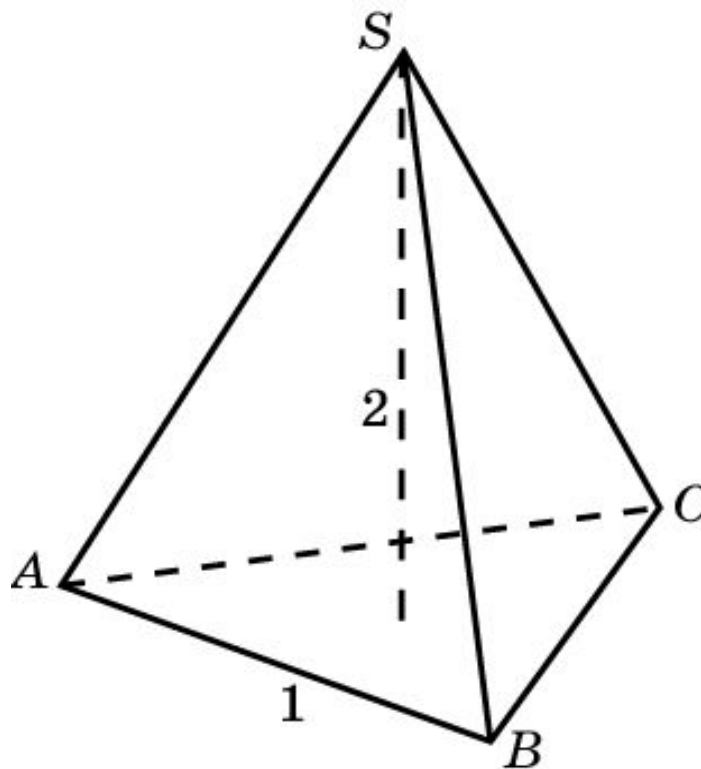
Найдите объем пирамиды, высота которой 3, а в основании - прямоугольник со сторонами 1 и 2.



Ответ: 2.

Упражнение 6

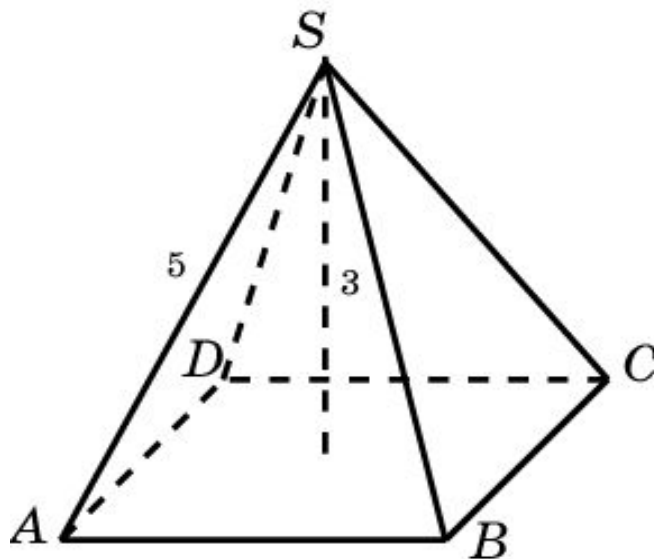
Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 1, высота – 2.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Упражнение 7

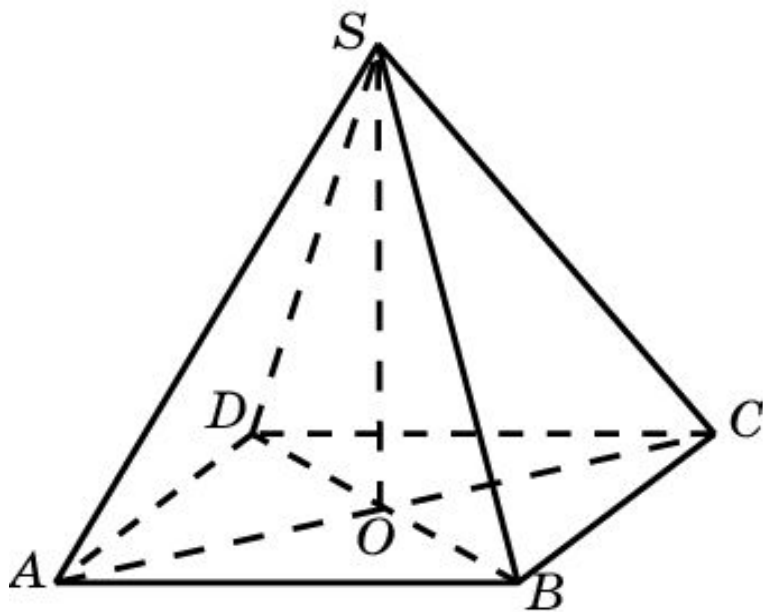
В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найдите ее объем.



Ответ: 32 м^3 .

Упражнение 8

Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.

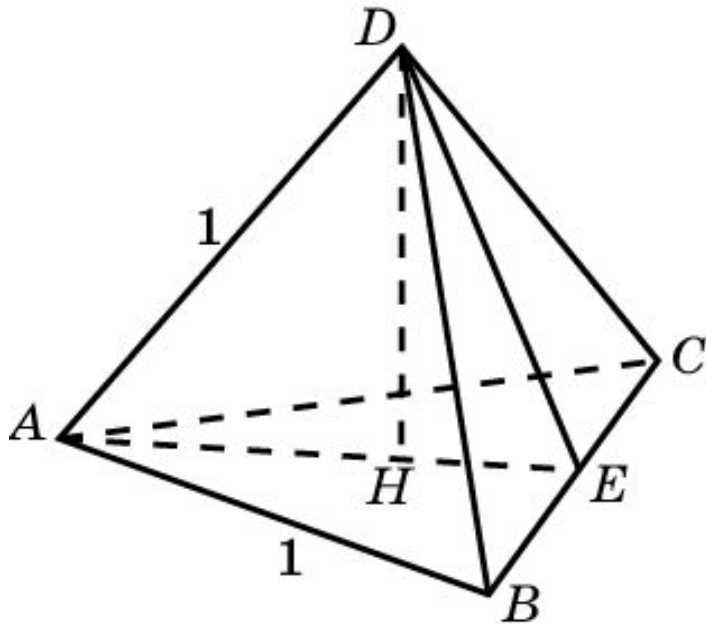


Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Решение. Пусть ACS –
правильный треугольник.
Его высота SO равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Сторона основания равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Следовательно, объем пирамиды
равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Упражнение 9

Найдите объем тетраэдра с ребром, равным 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Решение. Пусть E – середина ребра BC . В треугольнике ADE

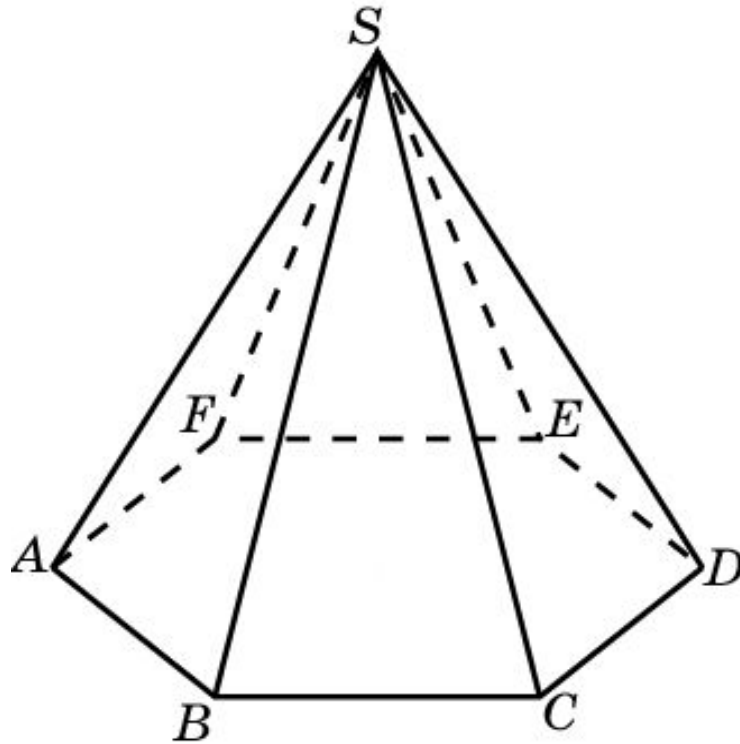
$AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота DH равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Площадь треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Следовательно, объем тетраэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Упражнение 10

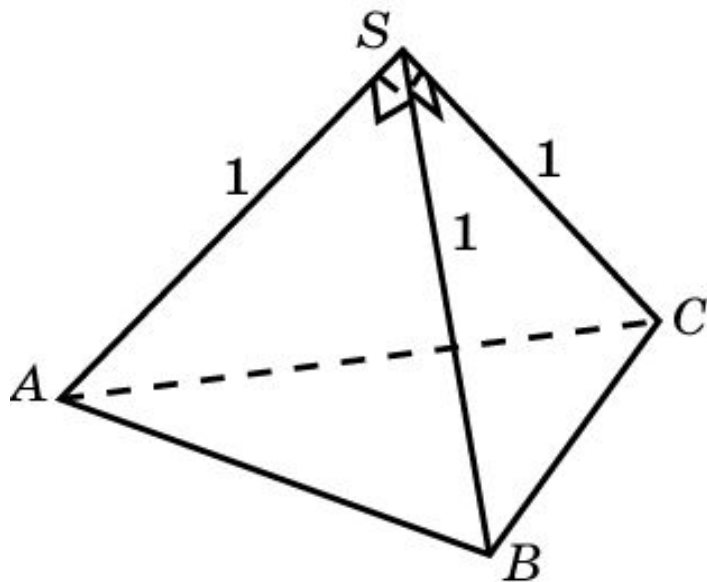
Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3 . Сторона основания 1 см . Найдите боковое ребро.



Ответ: 7 см .

Упражнение 11

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 1. Найдите объем пирамиды.



Решение. Примем треугольник ABS за основание пирамиды.

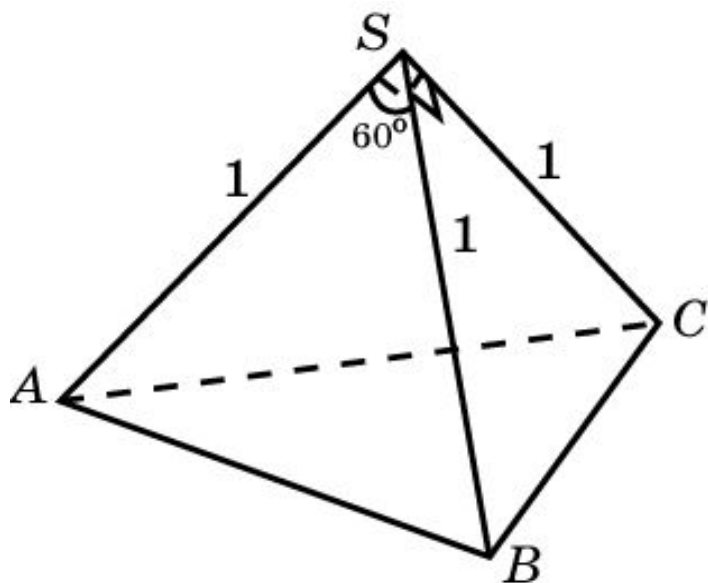
Тогда SC будет высотой.

Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Упражнение 12

Найдите объем треугольной пирамиды, если длина каждого ее бокового ребра равна 1, а плоские углы при вершине равны 60° , 90° и 90° .



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

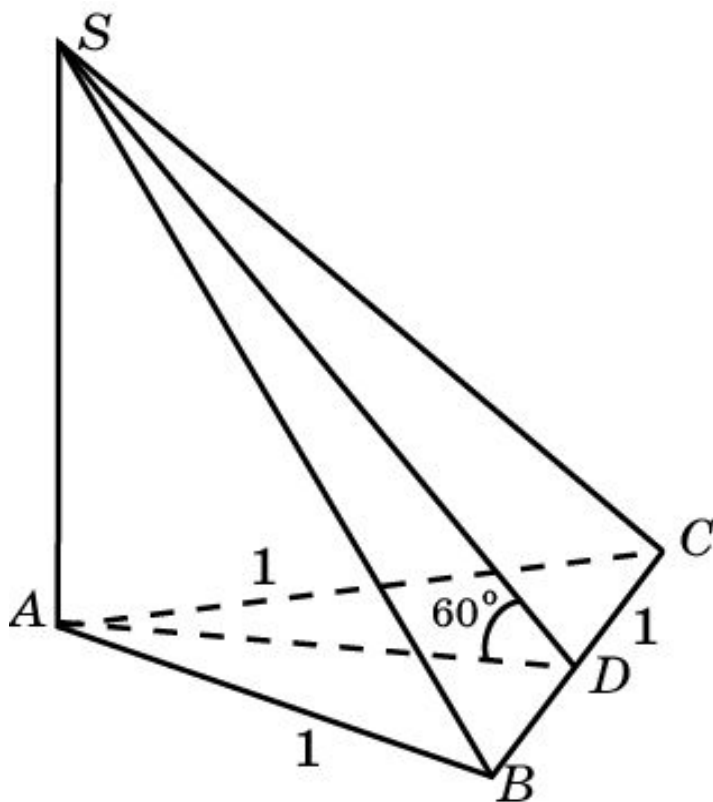
Решение. Примем треугольник ABS за основание пирамиды.

Тогда SC будет высотой.

Объем пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Упражнение 13

Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол 60° . Найдите объем пирамиды.

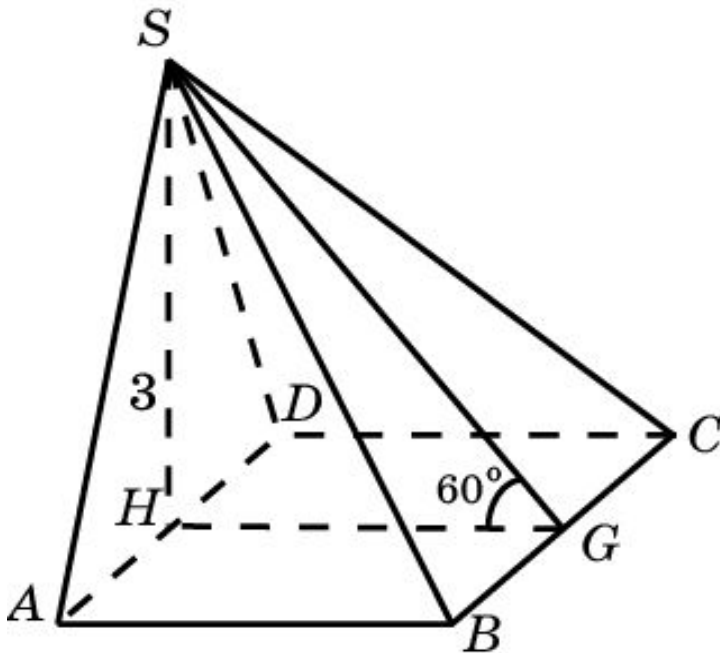


Решение. Площадь
треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
Высота SA равна $\frac{3}{2}$.
Следовательно, объем
пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Упражнение 14

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 3 см. Найдите объем пирамиды.



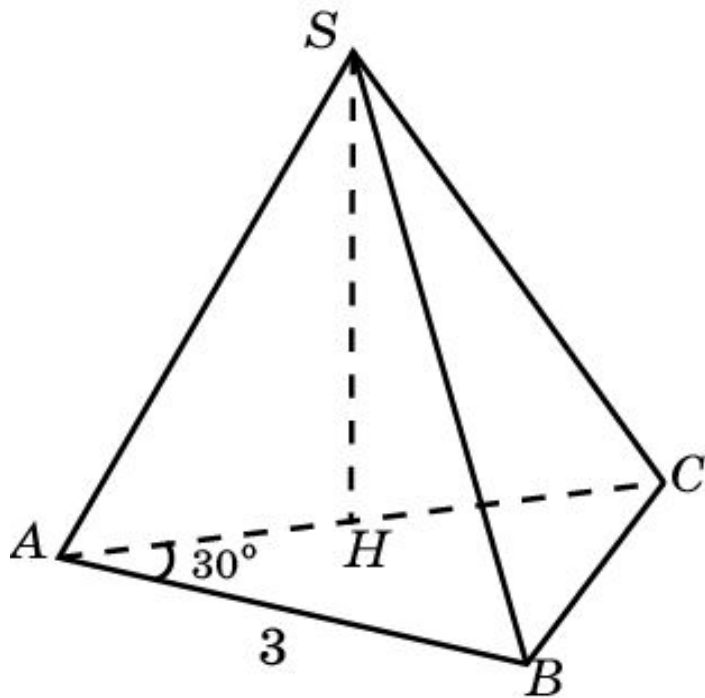
Решение. Треугольник SAD равносторонний со стороной $2\sqrt{3}$.
 $AB = GH = \sqrt{3}$.

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 6. Следовательно, объем пирамиды равен 6.

Ответ: 6.

Упражнение 15

В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3 см, а прилежащий к нему острый угол равен 30° . Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.



Решение. Площадь треугольника ABC равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

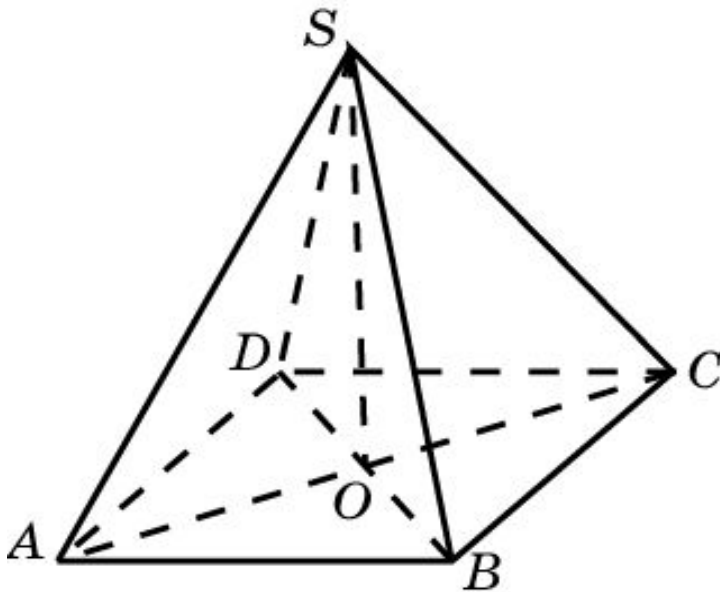
Основанием высоты SH служит середина AC . Треугольник SAC равносторонний со стороной, равной $2\sqrt{3}$. Его высота равна 3. Следовательно, объем пирамиды

равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 16

Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом 30° . Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите объем пирамиды.



Ответ: $\frac{800\sqrt{3}}{13} \text{ см}^3$.

Решение. Площадь основания пирамиды равна 120 см^2 . Сторона основания равна 13 см.

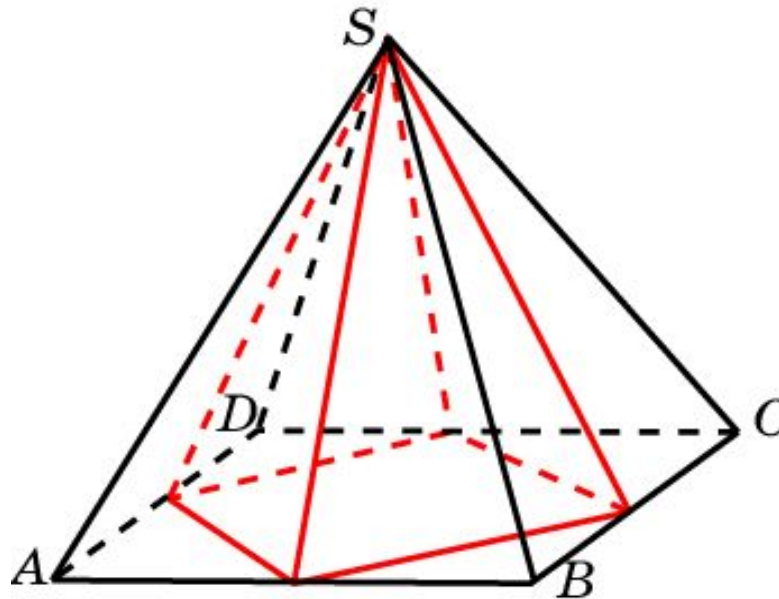
Высота ромба равна $\frac{120}{13} \text{ см}$.

Высота пирамиды равна $\frac{20\sqrt{3}}{13} \text{ см}$.

Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{800\sqrt{3}}{13} \text{ см}^3$.

Упражнение 17

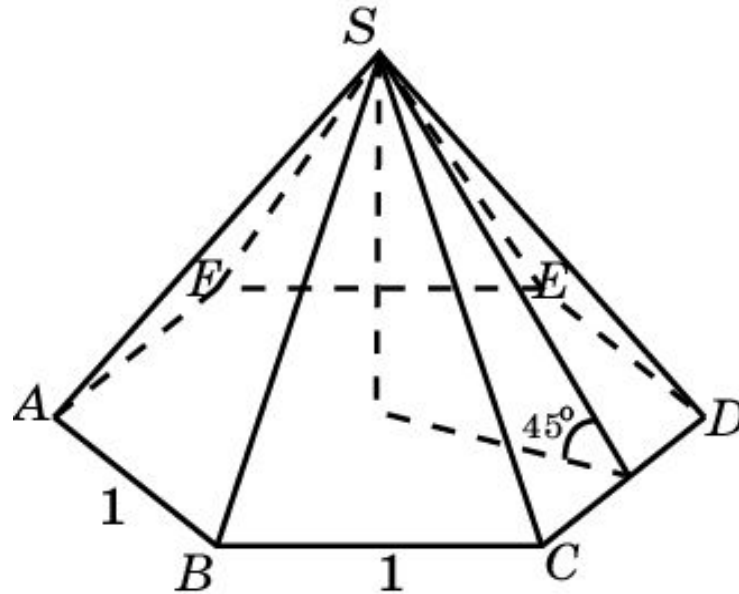
Пирамида, объем которой равен 1, а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Определите объем оставшейся части пирамиды.



Ответ: $\frac{1}{2}$.

Упражнение 18

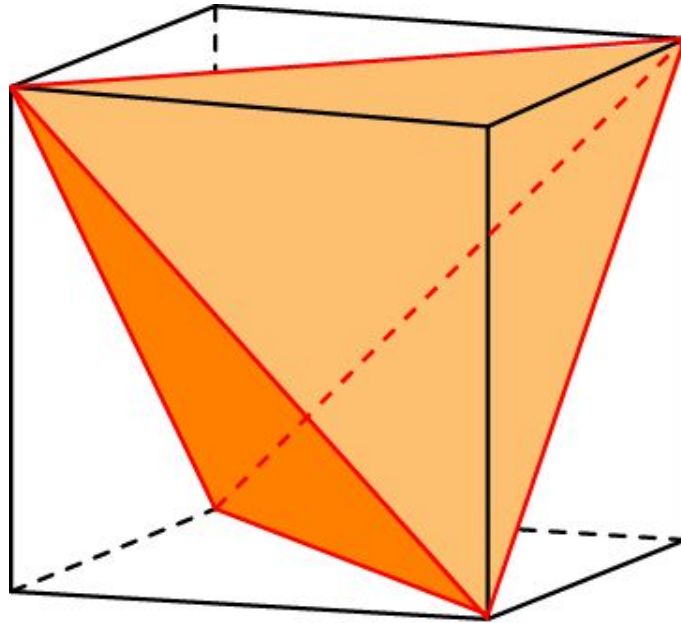
Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды 1, а угол между боковой гранью и основанием 45° . Найдите объем пирамиды.



Ответ: $\frac{3}{4}$.

Упражнение 19

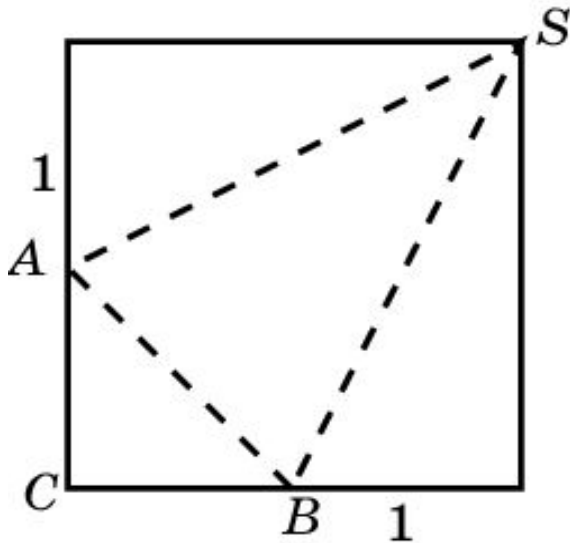
В куб с ребром, равным 1, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Определите объем тетраэдра.



Ответ: $\frac{1}{3}$.

Упражнение 20

Развертка треугольной пирамиды представляет собой квадрат со стороной 1. Найдите объем этой пирамиды.

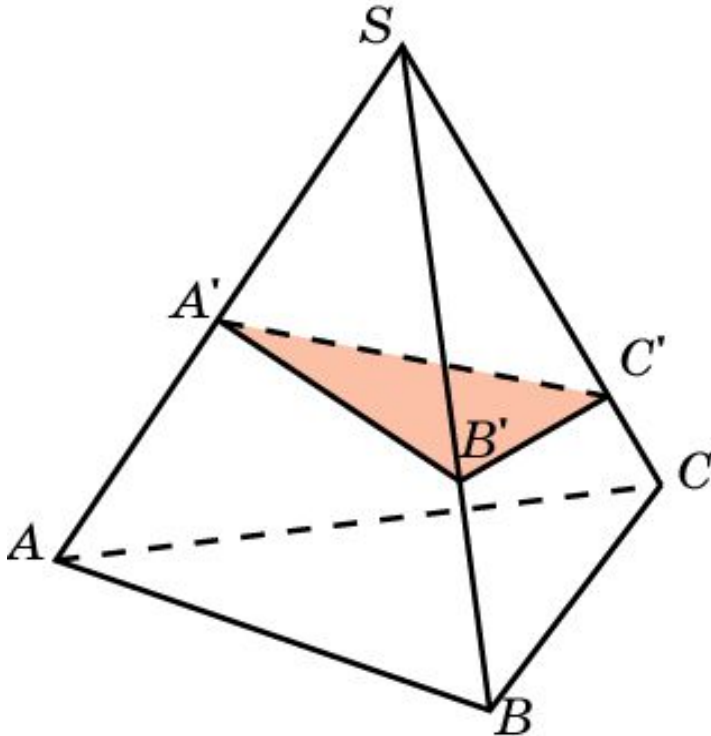


Решение. Основанием пирамиды будет прямоугольный треугольник ABC с катетами, равными 0,5. Высота пирамиды будет равна стороне квадрата. Следовательно, объем пирамиды равен $\frac{1}{24}$.

Ответ: $\frac{1}{24}$.

Упражнение 21

Плоскость пересекает ребра SA , SB , SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках A' , B' , C' соответственно. Найдите объем пирамиды $SA'B'C'$, если объем исходной пирамиды равен 1 и $SA' : SA = 1 : 2$, $SB' : SB = 2 : 3$, $SC' : SC = 3 : 4$.

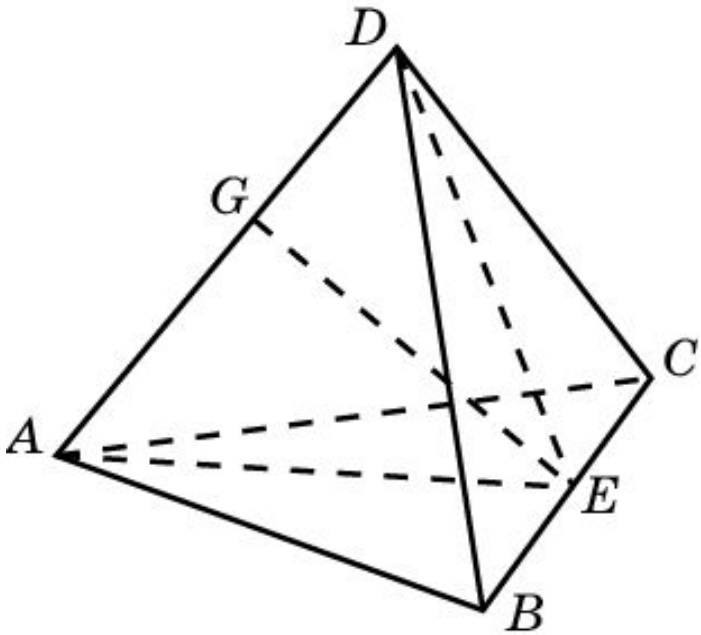


Решение. Площадь треугольника $SA'B'$ составляет $1/3$ площади треугольника SAB . Высота, опущенная из точки C' составляет $3/4$ высоты, опущенной из вершины C . Следовательно, объем пирамиды $SA'B'C'$ равен $1/4$.

Ответ: $1/4$.

Упражнение 22

Два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны и равны 3. Расстояние между ними равно 2. Найдите объем тетраэдра.

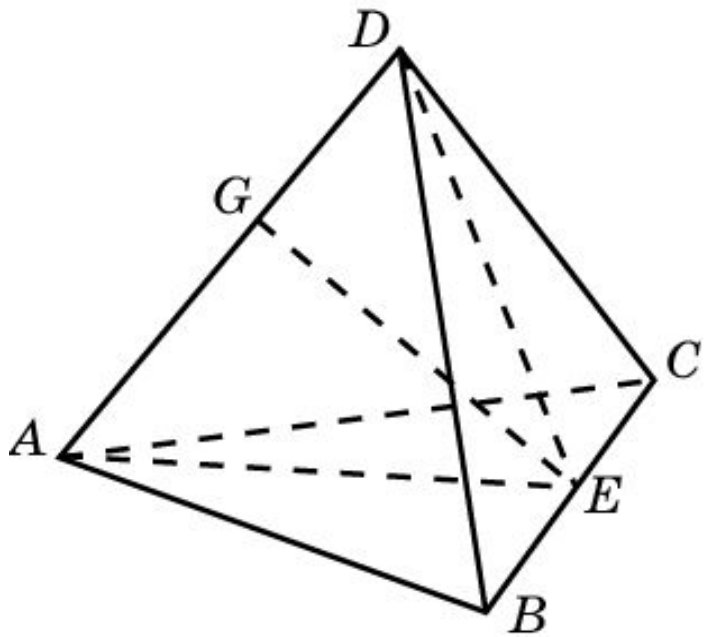


Решение. Пусть AB перпендикулярно CD . Проведем сечение ADE перпендикулярное BC . Площадь треугольника ADE равна 3. Объем пирамиды равен 3.

Ответ: 3.

Упражнение 23

Два противоположных ребра тетраэдра образуют угол 60° и равны 2. Расстояние между ними равно 3. Найдите объем тетраэдра.

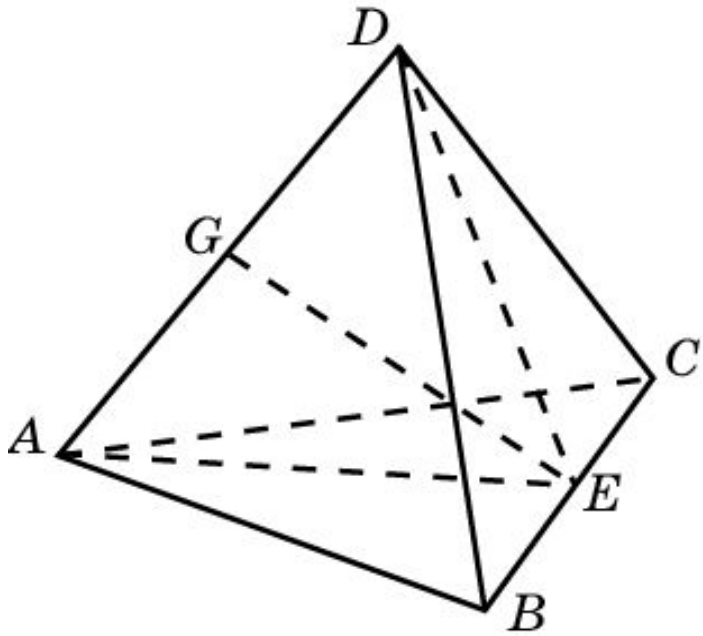


Решение. Пусть угол между AD и BC равен 60° . Проведем общий перпендикуляр EG . Площадь треугольника ADE равна 3. Угол между прямой BC и плоскостью ADE равен 60° . Объем пирамиды равен $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Упражнение 24

Одно ребро тетраэдра равно 6. Все остальные ребра равны 4. Найдите объем тетраэдра.

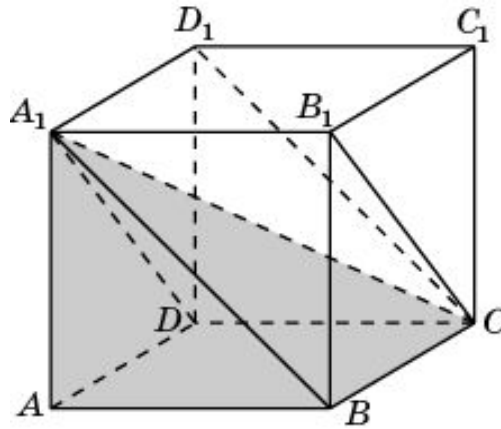


Решение. Пусть $BC = 6$. Обозначим E середину BC . $AE = DE = \sqrt{7}$. Высота EG треугольника ADE равна $\sqrt{3}$. Его площадь равна $2\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Упражнение 25

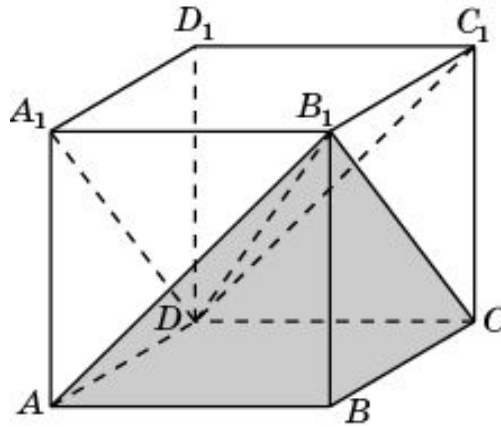
Найдите объем общей части двух призм ADA_1BCB_1 и ABA_1DCD_1 , содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух призм ADA_1BCB_1 и ABA_1DCD_1 является четырехугольная пирамида A_1ABCD , объем которой равен $1/3$.

Упражнение 26

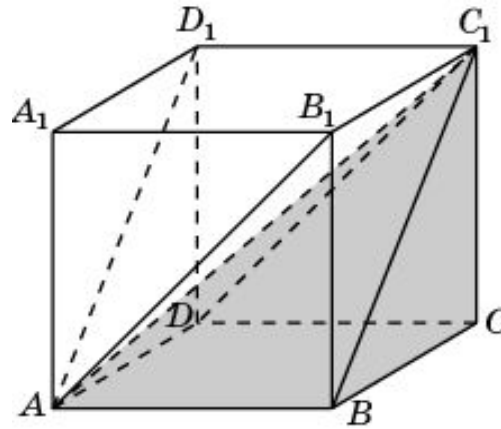
Найдите объем общей части двух призм ABB_1DCC_1 и ADA_1BCB_1 , содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух призм ABB_1DCC_1 и ADA_1BCB_1 является четырехугольная пирамида B_1ABCD , объем которой равен $1/3$.

Упражнение 27

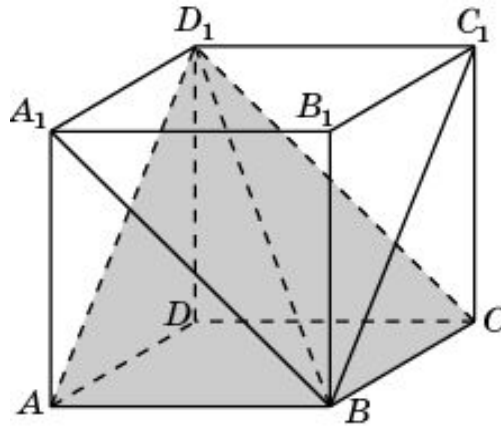
Найдите объем общей части двух призм ADD_1BCC_1 и ABB_1DCC_1 , содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух призм ADD_1BCC_1 и ABB_1DCC_1 является четырехугольная пирамида $C_1 ABCD$, объем которой равен $1/3$.

Упражнение 28

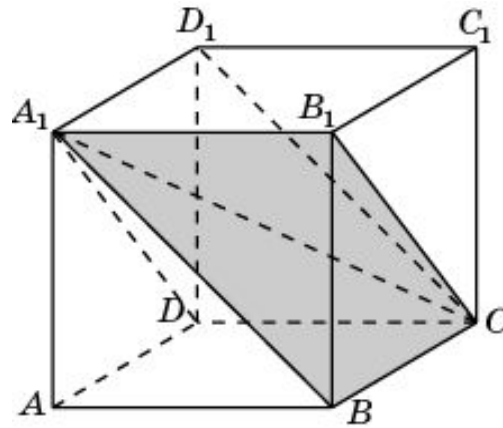
Найдите объем общей части двух призм ADD_1BCC_1 и ABA_1DCD_1 , содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух призм ADD_1BCC_1 и ABA_1DCD_1 является четырехугольная пирамида $D_1 ABCD$, объем которой равен $1/3$.

Упражнение 29

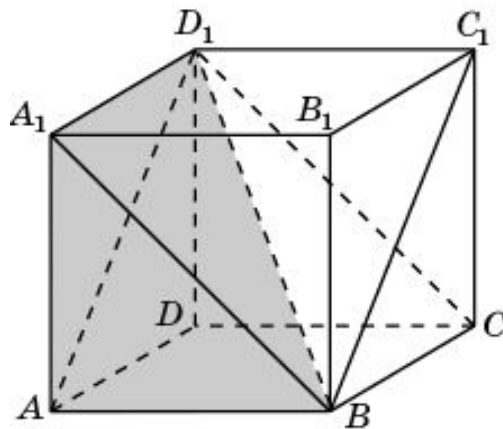
Найдите объем общей части двух призм ADA_1BCB_1 и $BA_1B_1CD_1C_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1B_1C_1D_1$.



Ответ: Общей частью двух призм ADA_1BCB_1 и $BA_1B_1CD_1C_1$ является треугольная пирамида BCB_1A_1 , объем которой равен $1/6$.

Упражнение 30

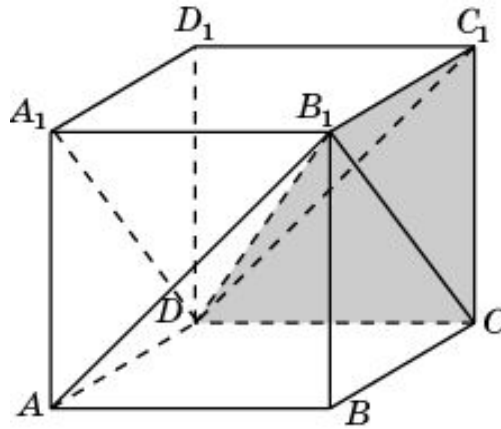
Найдите объем общей части двух призм ABA_1DCD_1 и $AA_1D_1BB_1C_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1B_1C_1D_1$.



Ответ: Общей частью двух призм ABA_1DCD_1 и $AA_1D_1BB_1C_1$ является треугольная пирамида ABD_1A_1 , объем которой равен $1/6$.

Упражнение 31

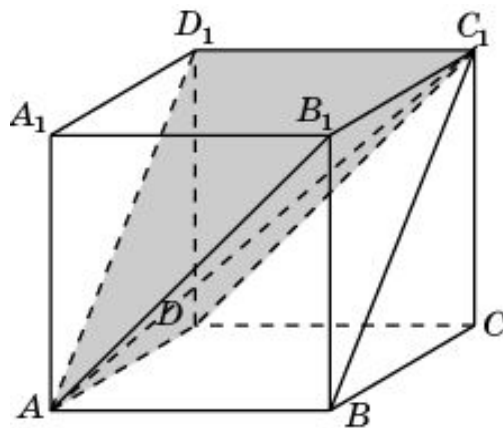
Найдите объем общей части двух призм ABA_1DCD_1 и $DA_1D_1CB_1C_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1B_1C_1D_1$.



Ответ: Общей частью двух призм ABA_1DCD_1 и $DA_1D_1CB_1C_1$ является треугольная пирамида CDB_1C_1 , объем которой равен $1/6$.

Упражнение 33

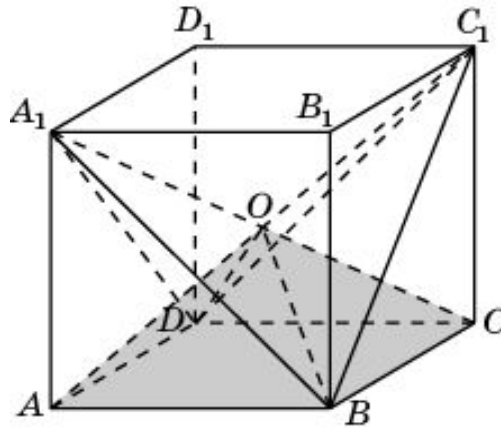
Найдите объем общей части двух призм ADD_1BCC_1 и $AA_1B_1DD_1C_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Ответ: Общей частью двух призм ADD_1BCC_1 и $AA_1B_1DD_1C_1$ является треугольная пирамида ADC_1D_1 , объем которой равен $1/6$.

Упражнение 33

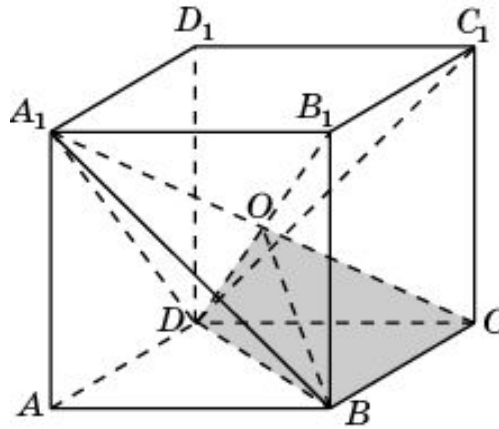
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABCD и C_1ABCD , содержащихся в единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABCD и C_1ABCD является четырехугольная пирамида $OABCD$, объем которой равен $1/6$.

Упражнение 34

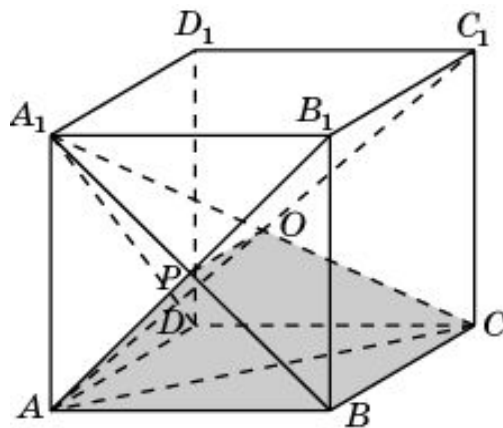
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABCD и $DBCC_1B_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABCD и $DBCC_1B_1$ является треугольная пирамида $OBCD$, объем которой равен $1/12$.

Упражнение 35

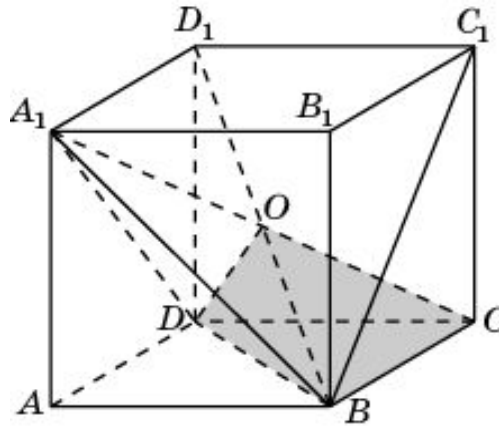
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABCD и $ABCC_1B_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABCD и $ABCC_1B_1$ является четырехугольная пирамида $ABCO$, объем которой равен $1/8$.

Упражнение 36

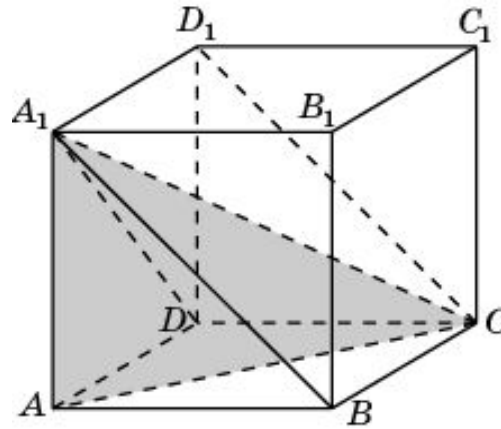
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABCD и $BCDD_1C_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABCD и $BCDD_1C_1$ является треугольная пирамида $OBCD$, объем которой равен $1/12$.

Упражнение 37

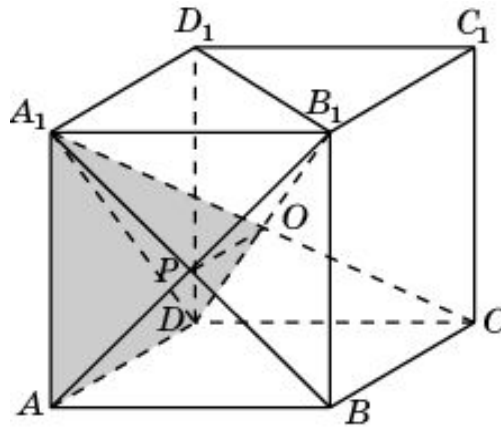
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABCD и $CADD_1A_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABCD и $CADD_1A_1$ является треугольная пирамида A_1ACD , объем которой равен $1/6$.

Упражнение 38

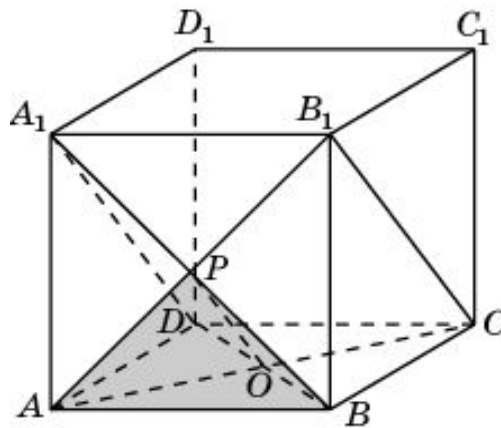
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABCD и $B_1ADD_1A_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABCD и $B_1ADD_1A_1$ является четырехугольная пирамида A_1ADOP , объем которой равен $1/8$.

Упражнение 39

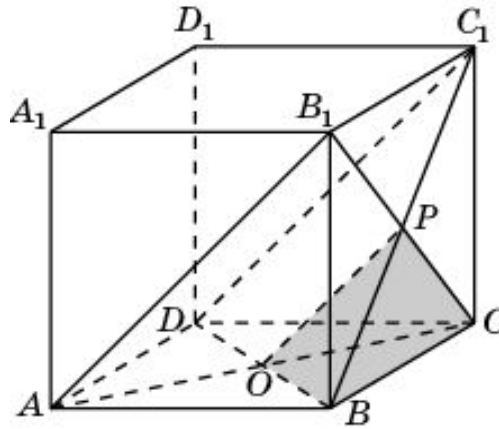
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABD и B_1ABC , содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABD и B_1ABC является треугольная пирамида $PAOB$, объем которой равен $1/24$.

Упражнение 40

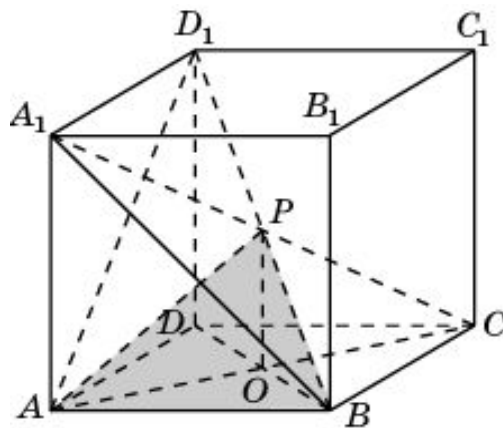
Найдите объем общей части двух пирамид C_1BCD и B_1ABC , содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид C_1BCD и B_1ABC является треугольная пирамида $POBC$, объем которой равен $1/24$.

Упражнение 41

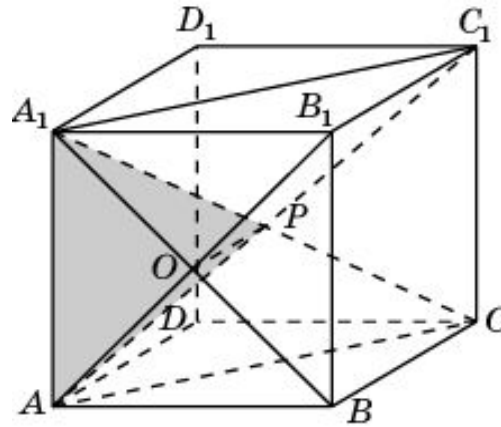
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABC и D_1ABD , содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABC и D_1ABD является треугольная пирамида $POAB$, объем которой равен $1/24$.

Упражнение 42

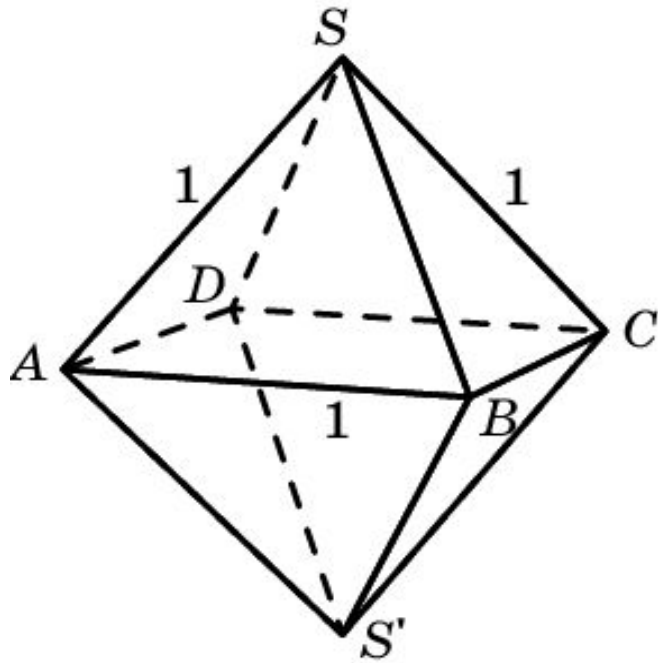
Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABC и $AA_1B_1C_1$, содержащихся в единичном кубе $ABCD A_1B_1C_1D_1$.



Ответ: Общей частью двух пирамид A_1ABC и $AA_1B_1C_1$ является треугольная пирамида POA_1 , объем которой равен $1/24$.

Упражнение 43

Найдите объем октаэдра с ребром, равным 1.

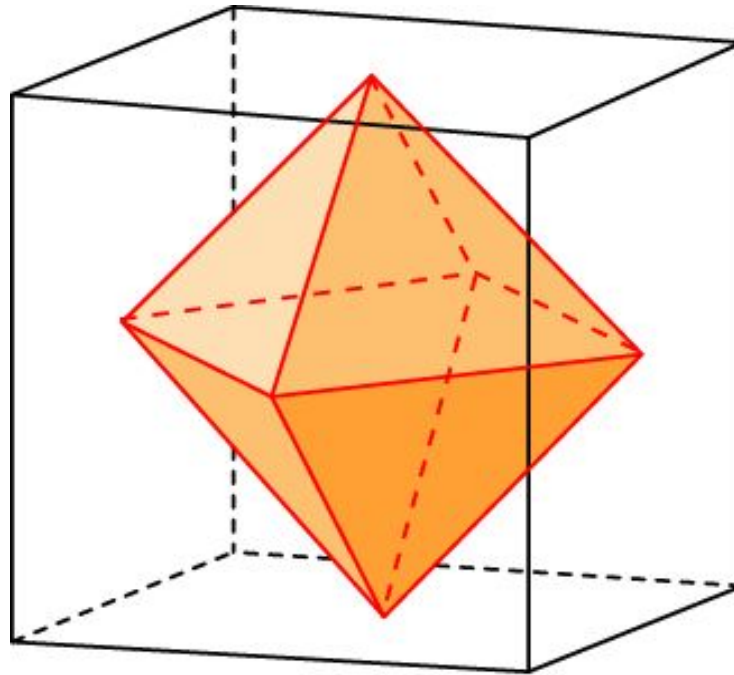


Решение. Октаэдр состоит из двух правильных четырехугольных пирамид со стороной основания 1 и высотой $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, объем октаэдра равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Упражнение 44

Центры граней куба, ребро которого равно 1, служат вершинами октаэдра. Определите его объем.

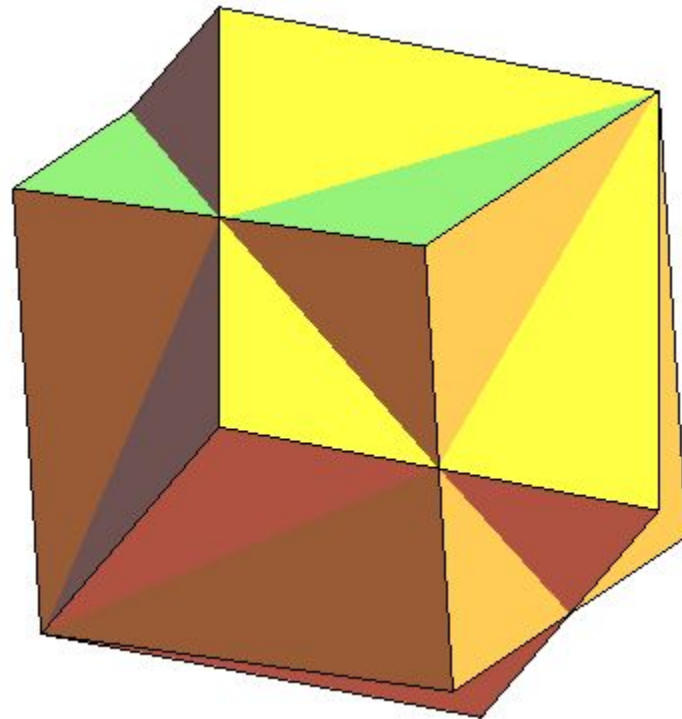


Ответ: $\frac{1}{6}$.

Упражнение 45

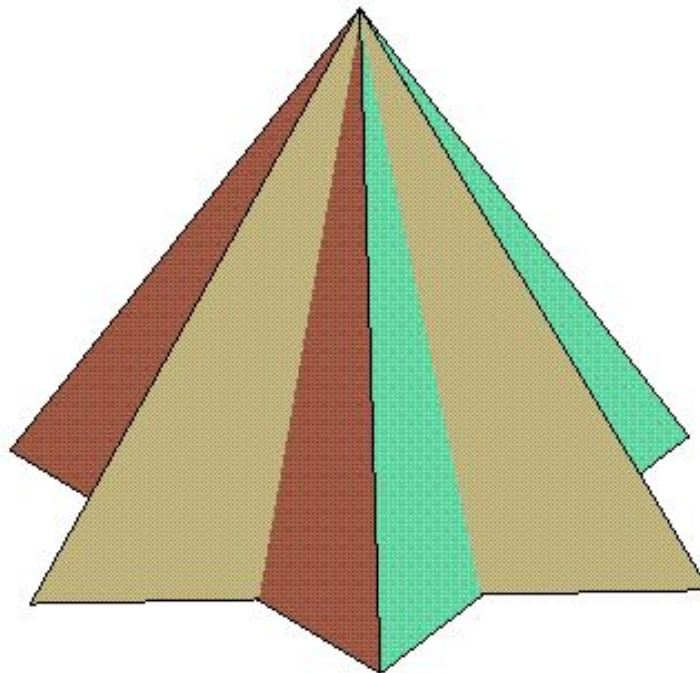
Два куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на угол 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

Ответ: Общая часть является правильной 6-й бипирамидой со стороной основания $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и высотой $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Объем этой бипирамиды равен $\frac{3a^3}{4}$.



Упражнение 46

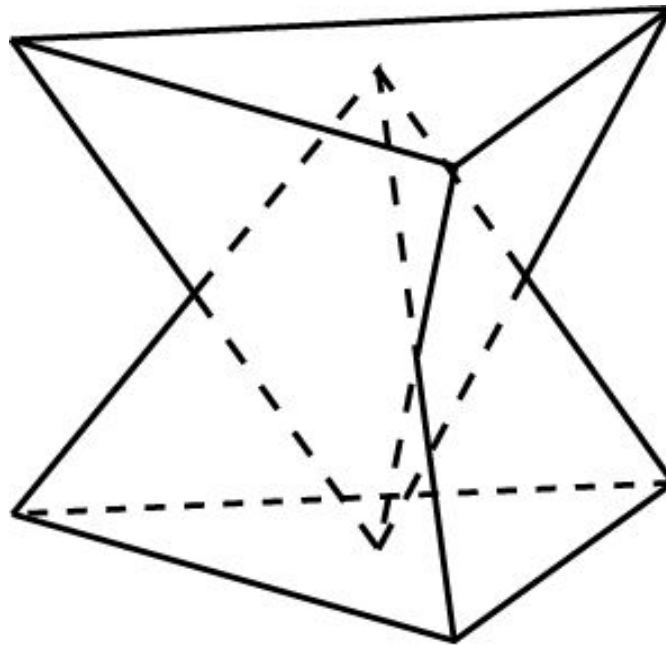
Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Один из них повернут на 60° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.



Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{18}$.

Упражнение 47

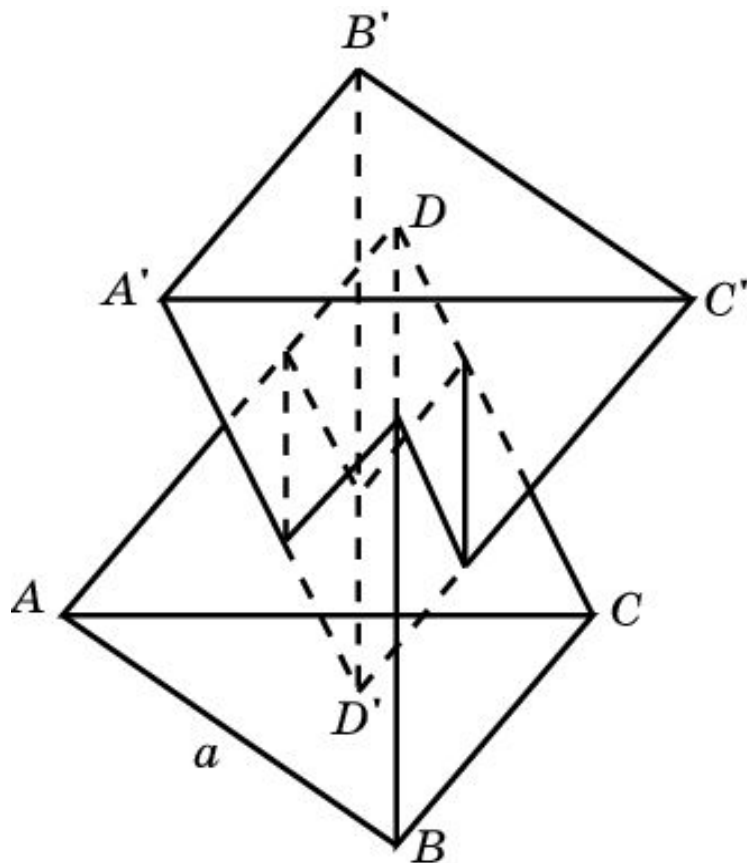
Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Стороны оснований тетраэдров попарно параллельны. Найдите объем общей части этих тетраэдров.



Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{48}$.

Упражнение 48

Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту. Вершина одного из них лежит в центре основания другого и наоборот. Основание одного из тетраэдров повернуто на 60° по отношению к основанию другого. Найдите объем общей части этих тетраэдров.



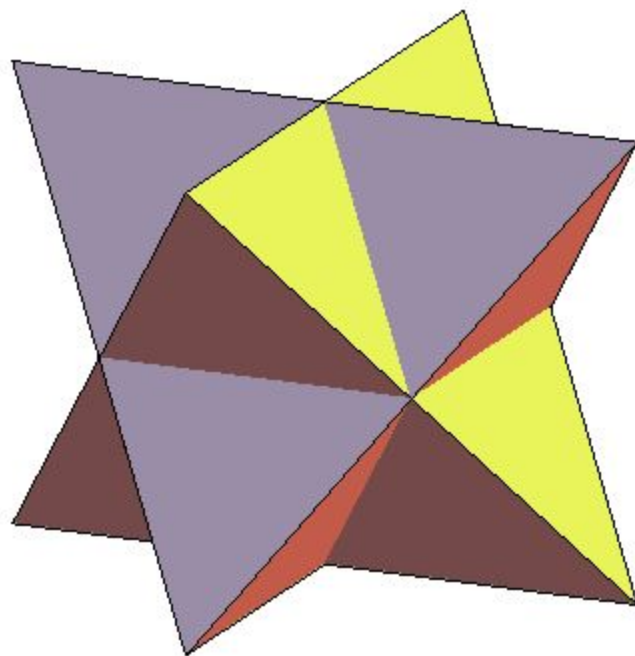
Решение: Общей частью является параллелепипед, все грани которого – ромбы с острым углом 60° . Ребра параллелепипеда равны $\frac{a}{3}$. Его объем равен $\frac{a^3 \sqrt{2}}{54}$.

Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{54}$.

Упражнение 49

Два правильных тетраэдра с ребрами a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер. Один тетраэдр повернут на 90° по отношению к другому. Найдите объем их общей части.

Ответ: Общей частью является октаэдр (правильная 4-я бипирамида) с ребром $\frac{a}{2}$.
Его объем равен $\frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$.



Упражнение 50

Октаэдр с ребром 1 повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол 45° . Найдите объем общей части исходного октаэдра и повернутого?

Ответ: Общей частью является правильная 8-я бипирамида с площадью основания $2\sqrt{2} - 2$ и высотой $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ее объем равен $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$.

