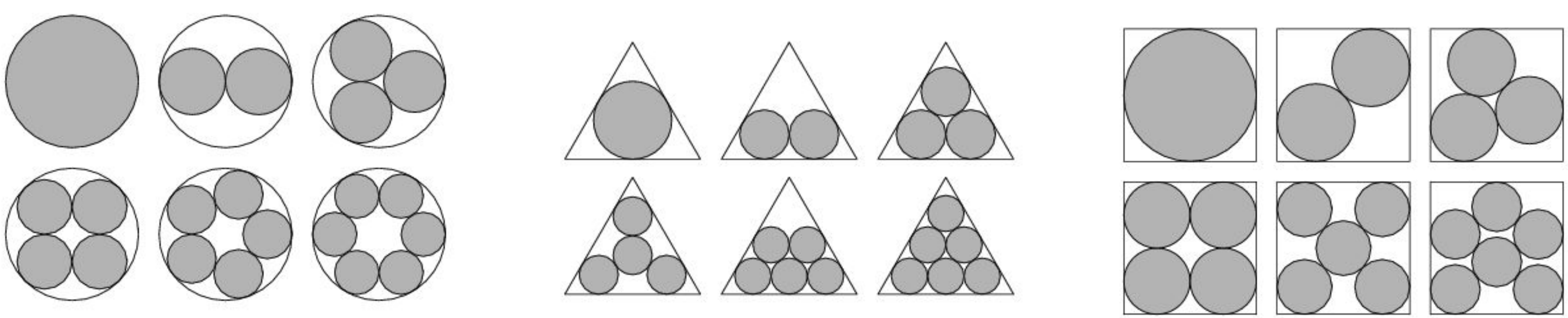
Решение задачи упаковки кругов с помощью генетических алгоритмов

Выполнил:
Студент группы 85-05
Гаврилов Н.И.

Руководитель:
ст. преп. каф. ИАНИ, к.т.н.
Исаев С.А.

Содержательная постановка задачи об упаковке кругов

Найти максимальный радиус, при котором **N** неперекрывающихся кругов могут быть помещены в область упаковки.



Математическая постановка задачи

Пусть есть компактная область D из R^2.

Найти такие точки $S_1, \dots, Sn$ из D, чтобы максимизировать величину $min(R,r)$,

где

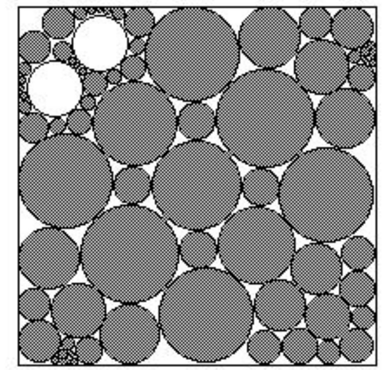
$R = min\{ |Si - Sj| \mid i \neq j,\ i,j=1..n\}$

$r = min\{ \rho(Si, \partial D) \mid i=1..n \}$

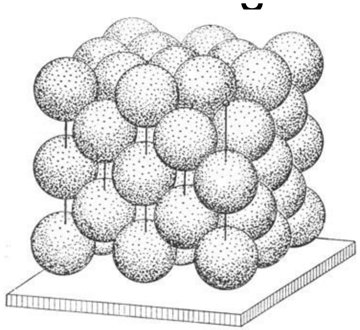
$\rho(Si, \partial D)$ – расстояние от точки Si до границы области D

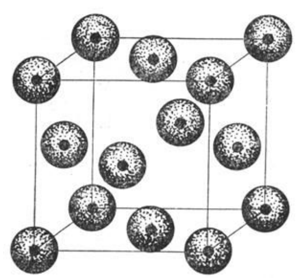
Практическая значимость задачи

- Укладка объектов цилиндрической формы в контейнер;



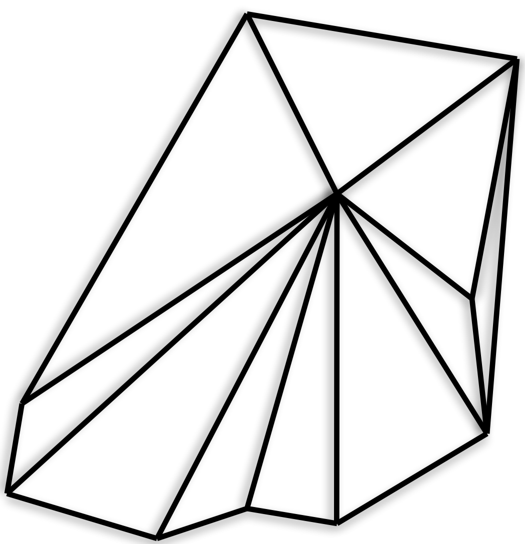
- Кристаллические структуры построены на основе … шаров.

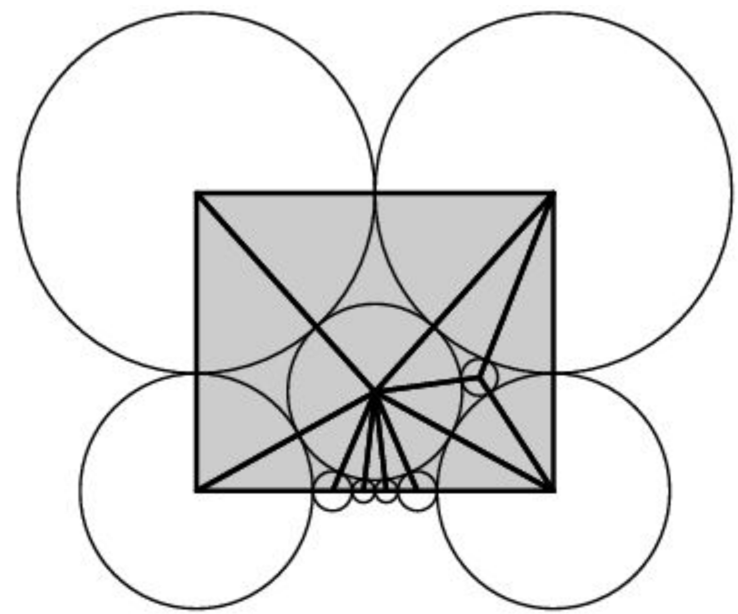




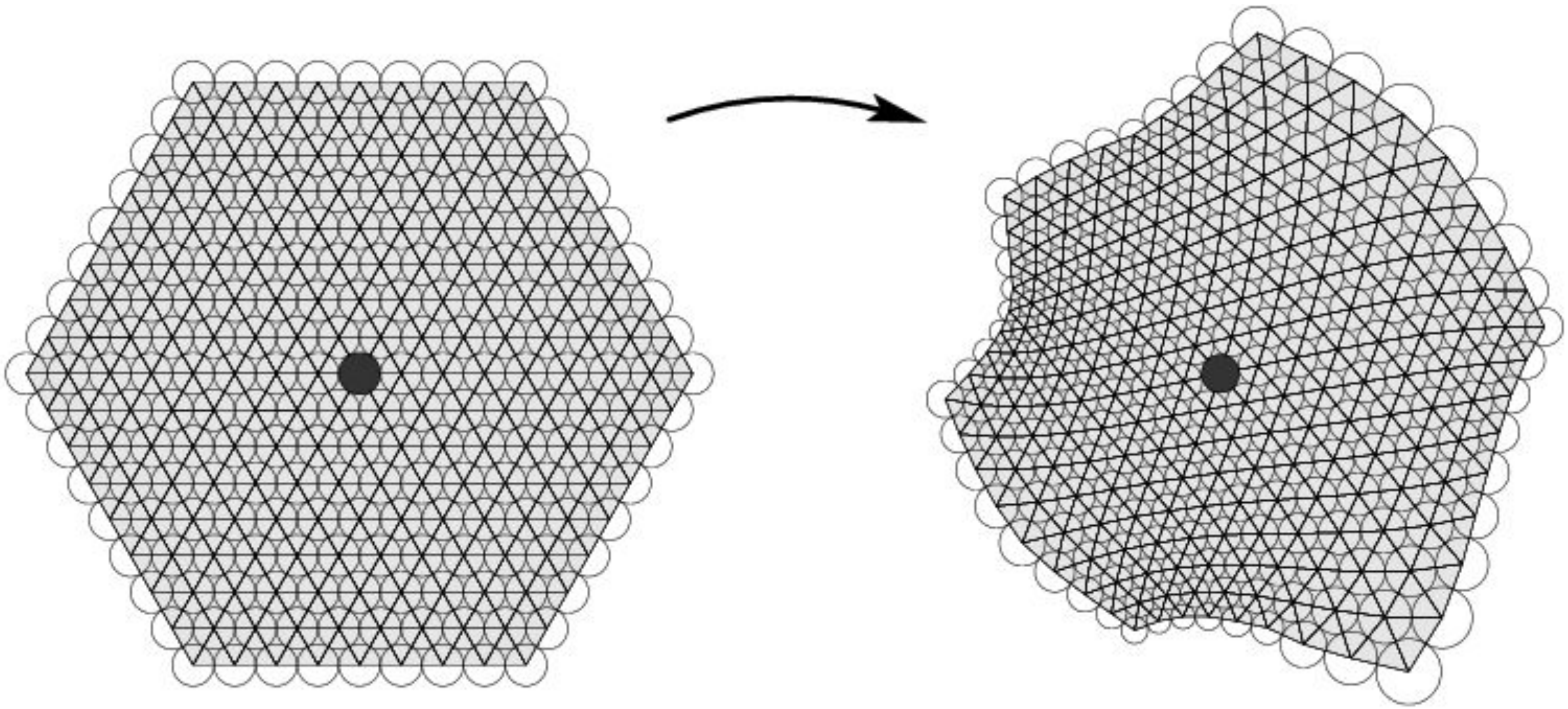
Научная значимость

Теорема об упаковке кругов используется теориях конформного отображения и планарных графов.





Приближённое конформное отображение



Оптимальные упаковки

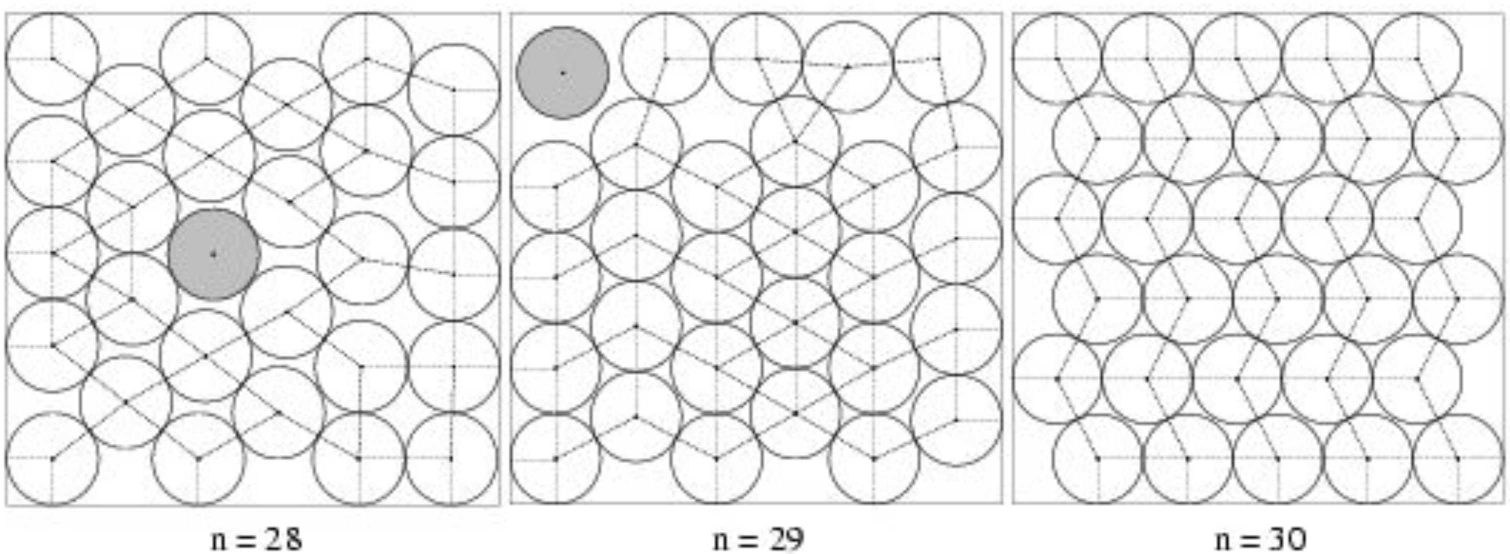
- Сейчас известны оптимальные упаковки (с доказательством) до n = 36;

- Упаковки-кандидаты – лучшие известные упаковки без доказательства оптимальности (http://www.packomania.com).

  Находятся эвристическими методами.

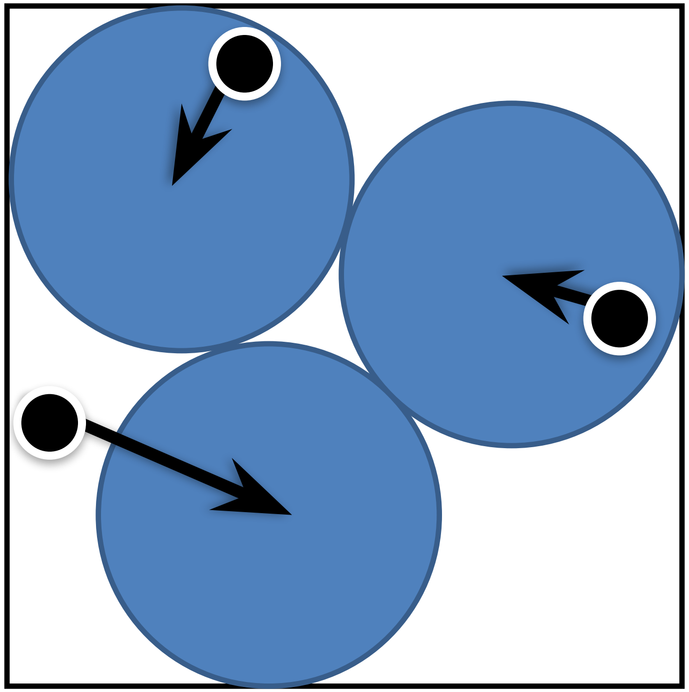
Упаковка в единичный квадрат

$$\max_{s_k \in [0,1]^2,\ 1 \le k \le n} \ \min_{1 \le i < j \le n} \|s_i - s_j\| .$$



Локальные методы

- Минимизация “энергии”
- Бильярдная симуляция
- Метод “тряски”



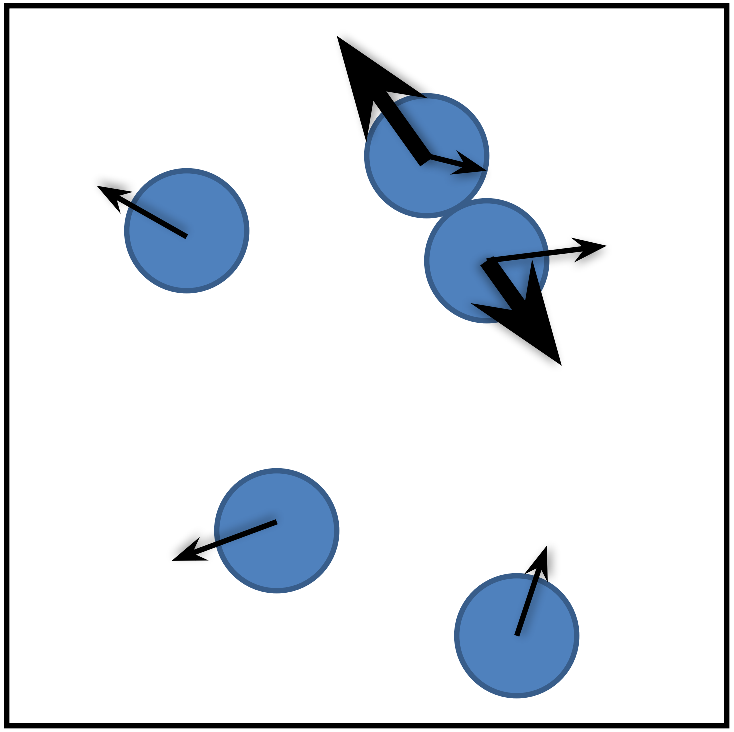
Минимизация “энергии”

$$\min_{s_i \in [0,1]^2,\ 1 \le i \le n} \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{\|s_i - s_j\|^m}.$$

- Аналогия с электростатикой;
- При замене x’=sin(x),y’=sin(y) получаем задачу без ограничений;
- Методом Ньютона получены упаковки до 50 кругов.

Бильярдная симуляция

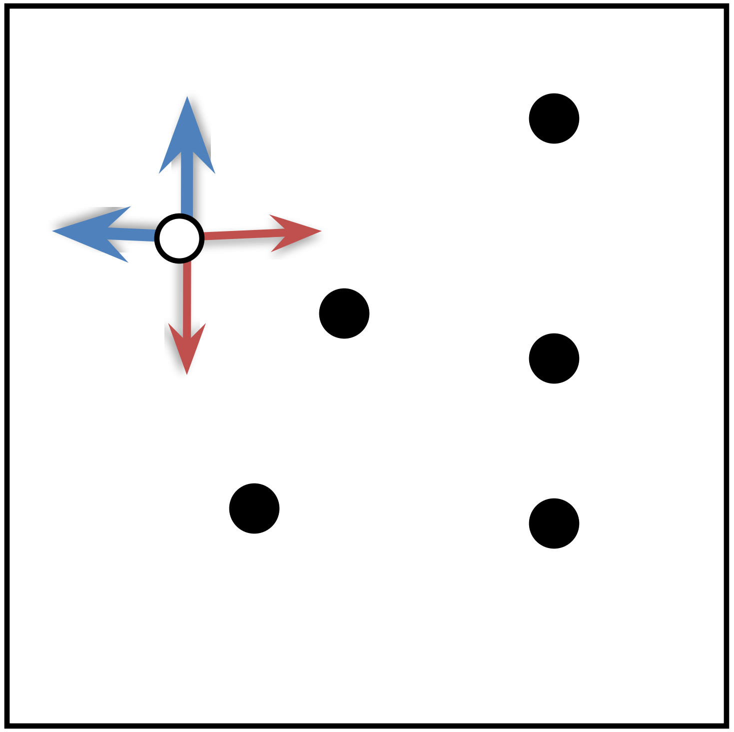
- Аналогия с механикой;
- Радиус кругов увеличивается.



Метод тряски

- По очереди пытаемся двигать каждую точку в различных направлениях на величину S;

- Если ничего не передвинули – уменьшаем S.



Глобальные методы

- Метод Монте-Карло

- Дискретизация задачи с последующим перебором.

- Эволюционные методы
  - В качестве приспособленности выступает радиус кругов, либо размер масштабируемой области упаковки.

Схема работы ГА

- Выбираем три случайные особи (A, B и C в порядке приспособленности)
- С вероятностью **p** особь C замещается потомком от A и B
- Иначе особь B замещается потомком от A и C
- С вероятностью **q** потомок мутирует
- Если последние **K** итерации дали улучшения решения, то идём на шаг 2

Выбор кодировки

- Кодировать напрямую: (X1,Y1, … , Xn,Yn)

- Кодировать со сжатием.

  Цель – уменьшить число неизвестных

- Кодировать алгоритм получения плотной упаковки

Прямая кодировка

- В векторе ($X_1,Y_1, \ldots , X_n,Y_n$) координаты центров кругов;
- Можно кодировать в ($X_2,Y_2, \ldots , X_n,Y_n$). Тогда это координаты центров кругов радиуса 1.

  Тогда область упаковки масштабируется.

Недостатки:

- Много переменных
- Сложная область допустимых значений
- Много локальных экстремумов

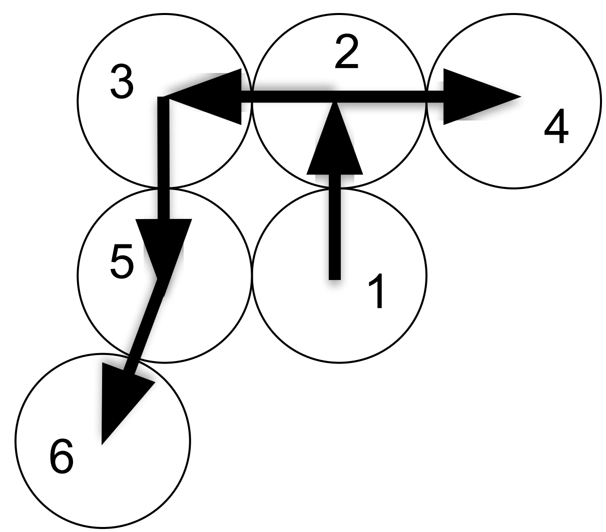
Кодировка со сжатием

Кодировать в **<A,B>**

A = (A[1],…,A[n-1]), B = (B[1],…,B[n-1])

- B[i] – сколько кругов “создаёт” i-ый круг
- A[i] – под каким углом “создан” (i+1)-ый круг

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$(1,2,1,0,1)



Кодировка алгоритма

Кодировка – пара **<M, A>**

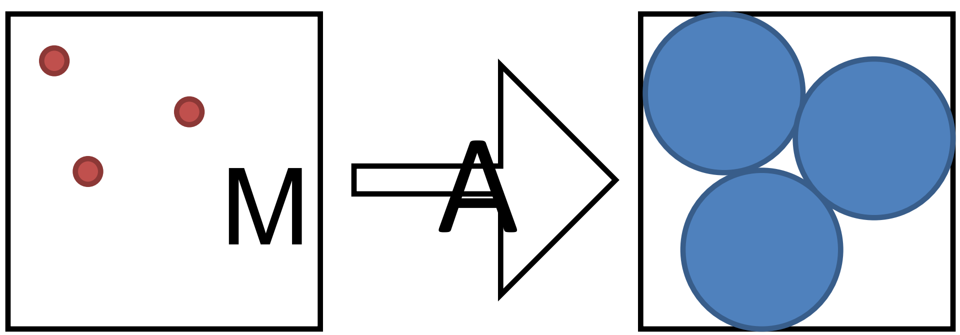
- **M** = { Ci | i=1…n, Ci є D} (область упаковки)

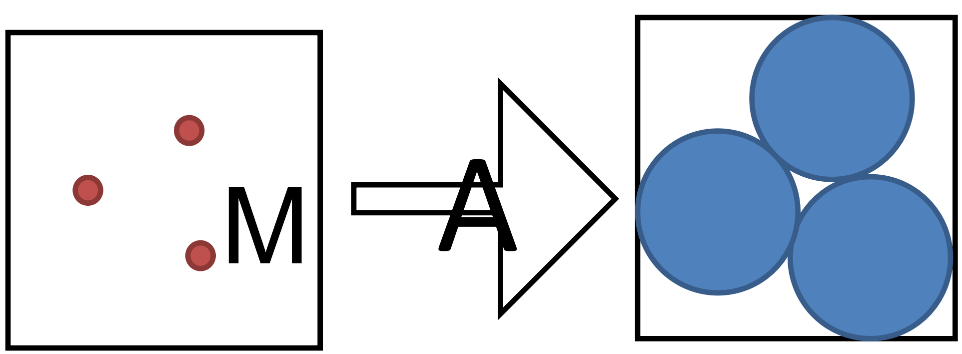
  Этими начальными условиями обладают все алгоритмы **A**;

- **A** – алгоритм упаковки и начальные условия для него;

Роль алгоритма A

Алгоритм A переводит множество точек M в соответствующую упаковку





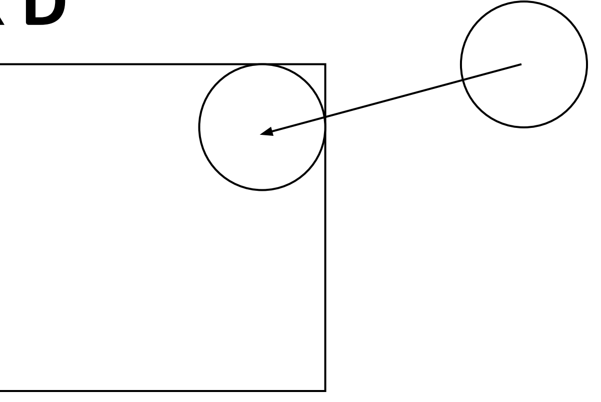
Структура **A**

- Идентификатор алгоритма
- Кол-во итераций

- Вероятности
- Параметры, влияющие на скорость сходимости **A**, и т.д.

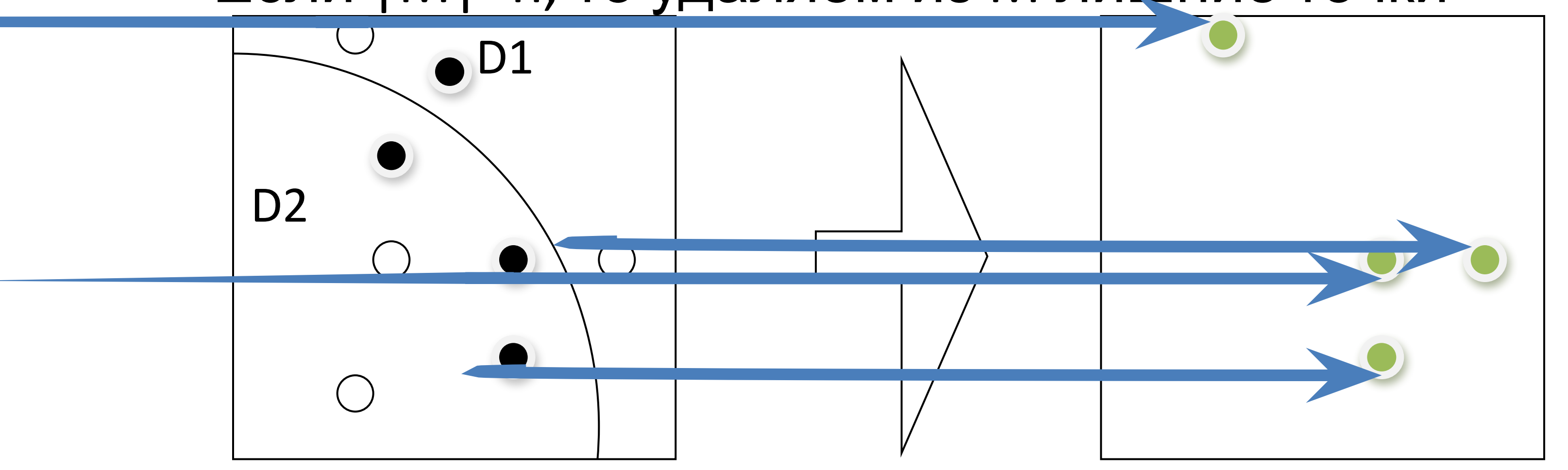
Пример алгоритма А

- Каждая точка отталкивается от ближайшей на **V**
- Каждая точка случайно сдвигается с вероятностью p2
- **V = V*p1**
- Вычисляем **r**
- Проверка принадлежности к **D**



Оператор скрещивания

- Множество M у потомка определяется следующим образом:
  - Область D разбивается на подобласти D1 и D2
  - M = { m | (m є M1 и m є D1)или (m є M2 и m є D2) }
  - Если |M|<n, то добавляем в M точки из (M1 U M2)
  - Если |M|>n, то удаляем из M лишние точки



Наследование алгоритма

- Потомок наследует алгоритм А у случайного родителя;

- Если у родителей одинаковые схемы алгоритма, то каждый параметр этого алгоритма у потомка также выбирается от случайного родителя.

Оператор мутации

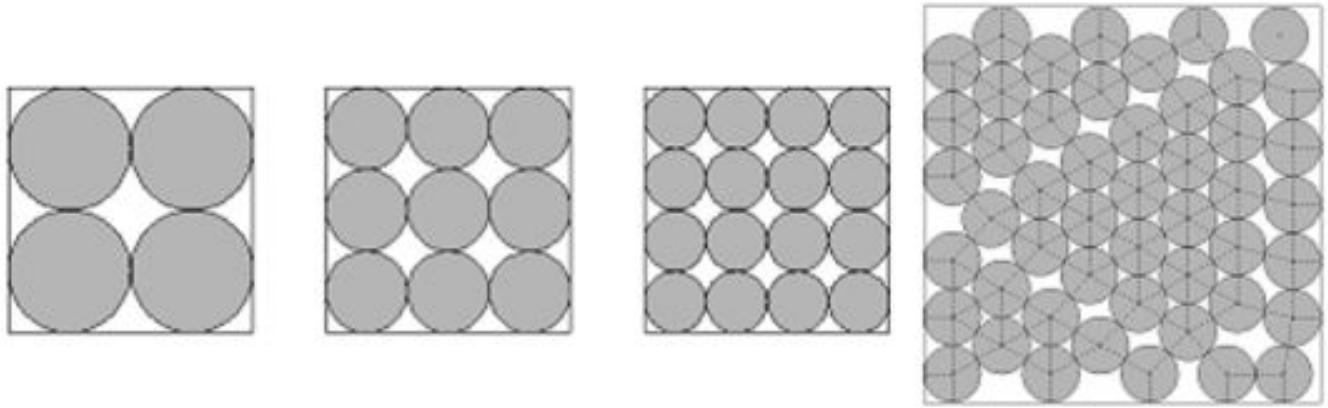
- Случайное подмножество **M** сдвигается на случайные вектора

$(dx,dy) = (a, b)*(n^{-1/2})$

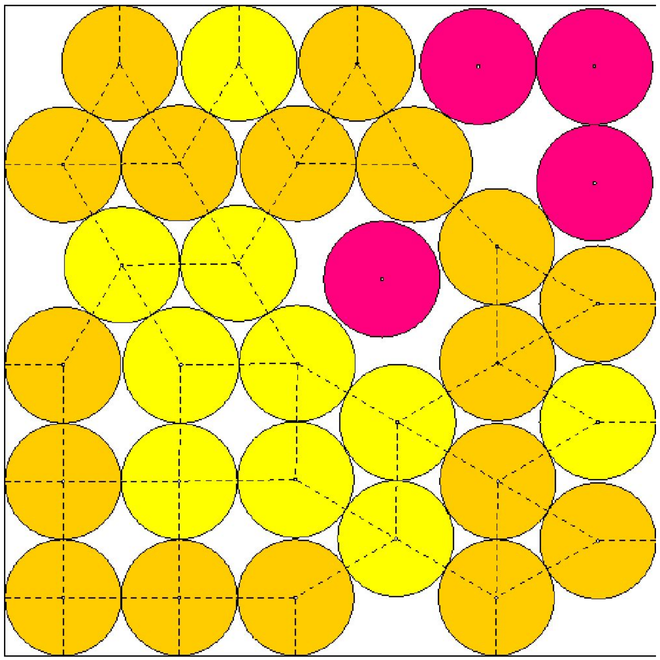
a, b – числа из распределения N(0,1)

Структура оптимальных упаковок

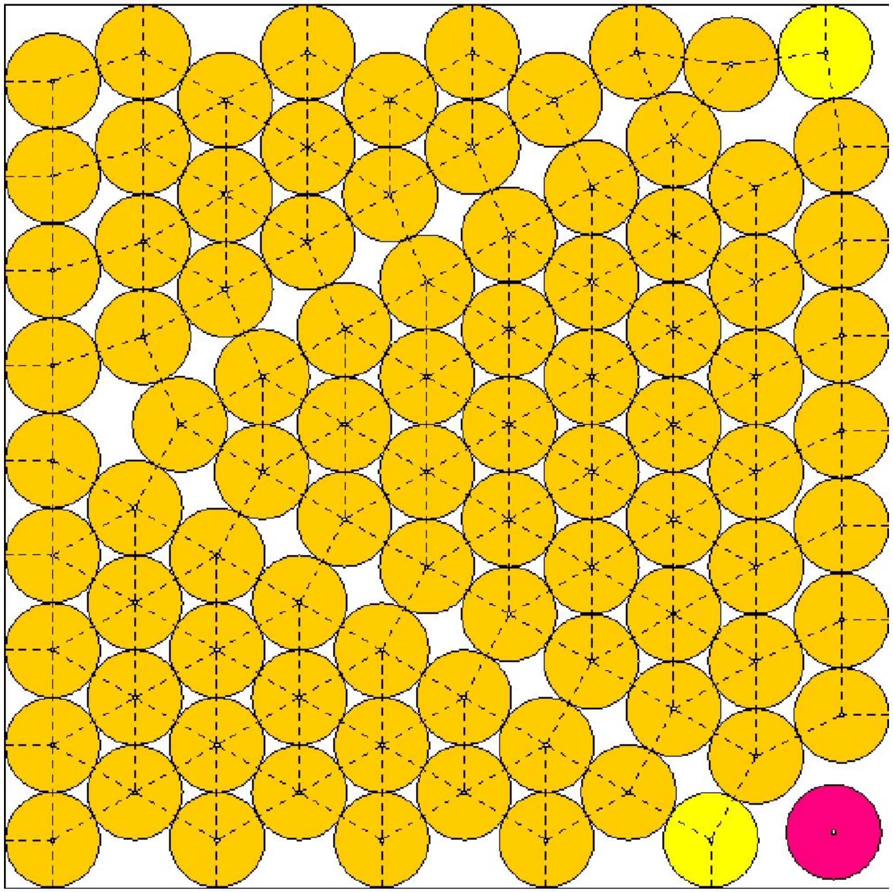
- начиная с 49 кругов, оптимальная упаковка $n=k^2$ кругов будет отлична от регулярной квадратной решётки.



Свободные круги



n = 31



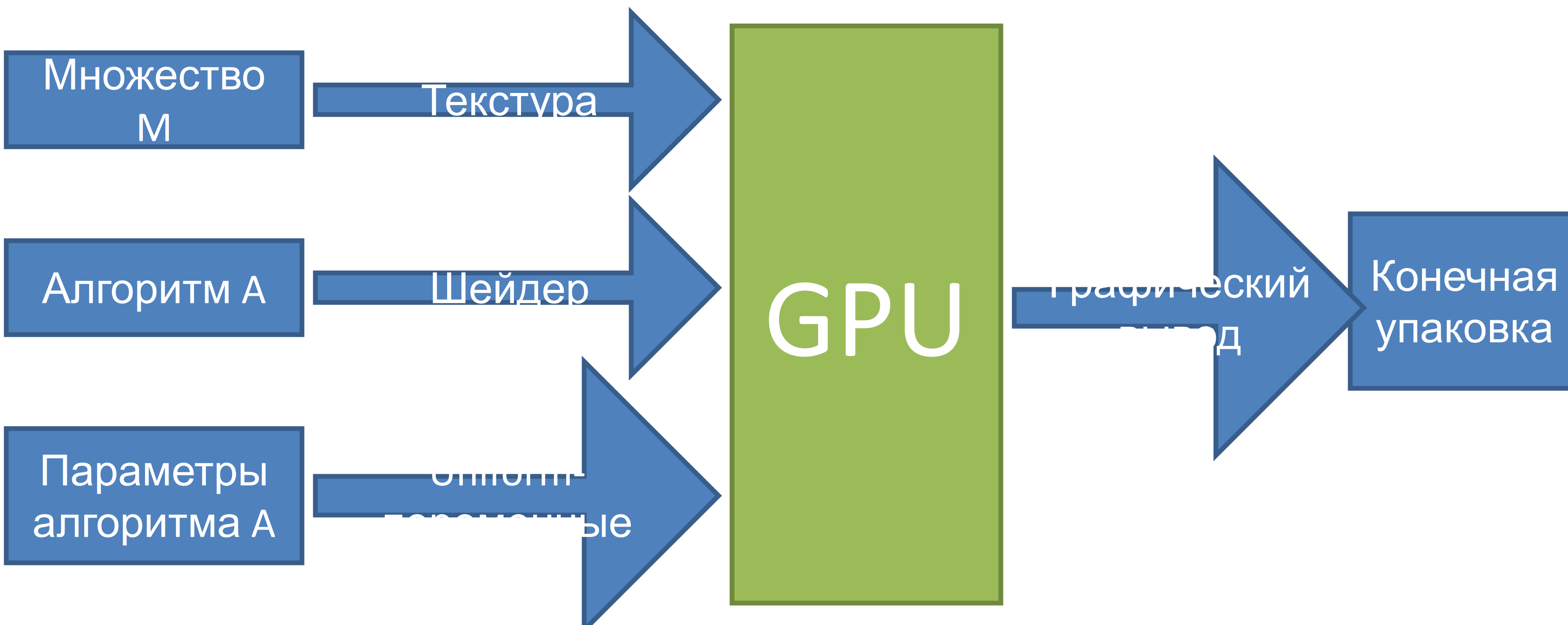
n = 90

Касания кругов в плотных упаковках

n = 1,…,300

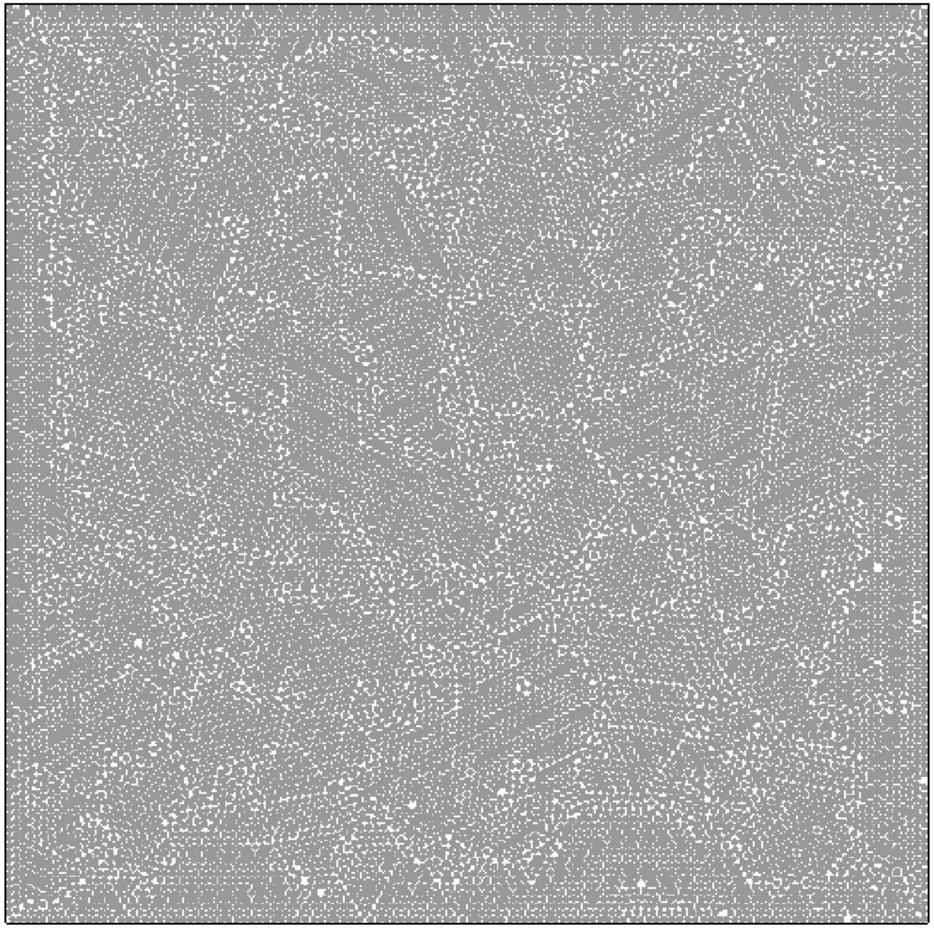
Использование GPU для вычислений

Цель – ускорение работы алгоритма А



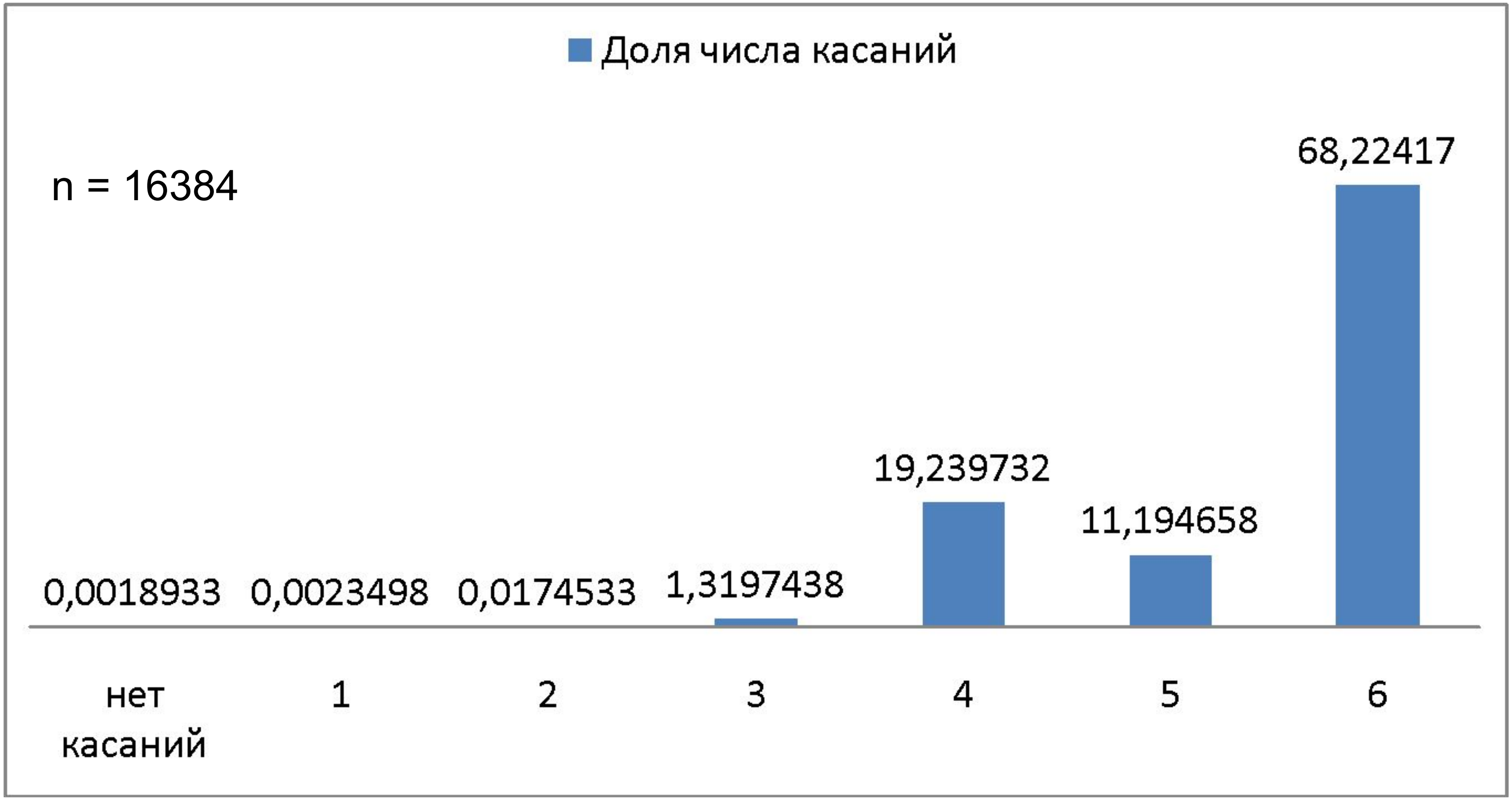
Упаковка большого числа кругов

При увеличении **n** появляются большие фрагменты плотнейших кладок



n = 16384 r = 0.00405794

Касания кругов в плотных упаковках



Выводы

- Адаптация генетического алгоритма и его гибридизация с низкоуровневой проблемно-ориентированной эвристикой способна значительно повысить эффективность применения ГА.

- Важным фактором, влияющим на эффективность применения ГА, является выбранный способ кодирования решений.

Заключение

В ходе выполнения дипломной работы сделано:

- Обзор методов решения задачи об упаковке кругов;
- Разработан проблемно-ориентированный генетический подход к решению этой задачи;
- Исследованы структуры упаковок, найденных в результате численного эксперимента.