



*Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный  
Университет (Сибстрин)*

***ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.  
КИНЕМАТИКА***

***ЛЕКЦИЯ 4.***

***Сложное движение точки.***



*Кафедра теоретической механики*

# *План лекции*

**Введение.**

**Абсолютное, относительное и переносное движение.**

**Теорема о сложении скоростей.**

**Теорема о сложении ускорений.**

**Рекомендации к решению задач.**

**Заключение.**

*На прошлых лекциях*

**Мы уже изучили:**

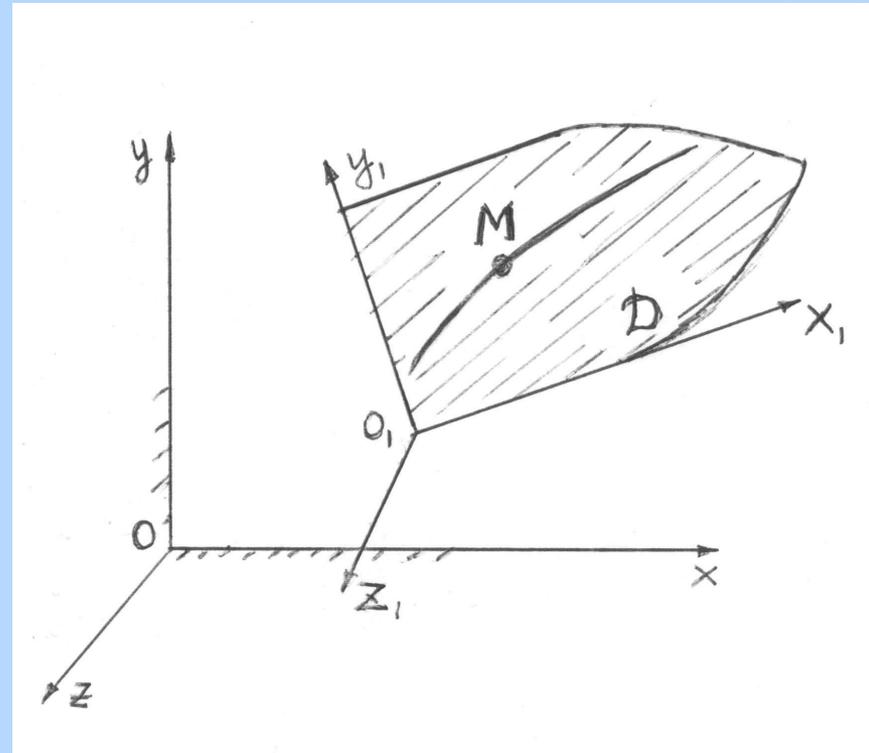
-кинематику точки

-кинематику твердого тела (поступательное, вращательное и плоское движение)

**Тема сегодняшней лекции:**

**Сложное движение точки**

**Определение.** Сложным называется такое движение точки **M**, при котором она движется по телу **D**, а само тело **D** тоже движется.



## *Цель лекции*

**Зная движение точки по телу и движение самого тела определить скорость и ускорение точки.**

# Абсолютное, относительное и переносное движения

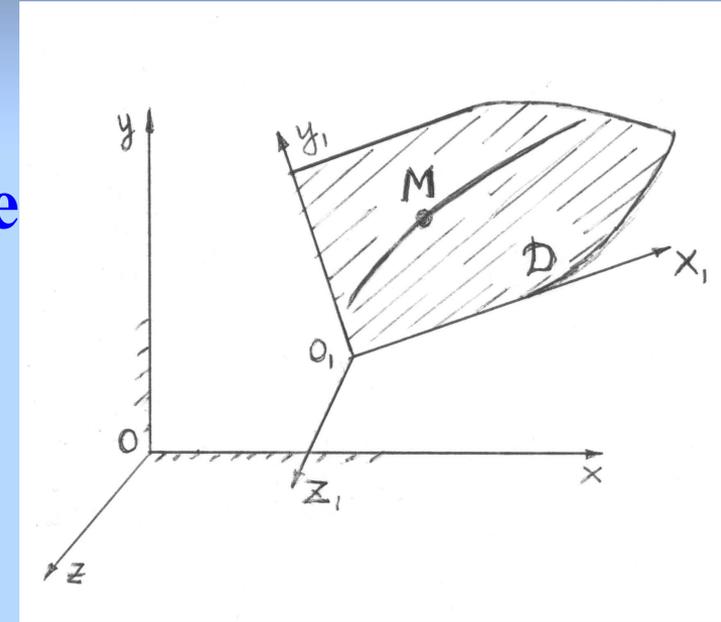
Движение точки **M** относительно неподвижной системы отсчета

**Oxyz** называется **абсолютным** (“a”- absolut,  $\vec{V}_a, \vec{a}_a$  - абсолютные скорость и ускорение).

Движение точки **M** относительно тела **D** (т.е в системе  $O_1x_1y_1z_1$

**относительным** (“r”- relation,  $\vec{V}_r, \vec{a}_r$  - относительные скорость и ускорение).

Движение тела **D** в системе **Oxyz** называется **переносным** (“e”- enduse,  $\vec{V}_e, \vec{a}_e, \omega_e$  - переносные скорость, ускорение, угловая скорость).



# Основная задача

## Дано:

1. Относительное движение точки  $M$ .
2. Переносное движение тела  $D$ .

Определить: скорость и ускорение абсолютного движения точки.

## Напишем ответ:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (*)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (**)$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

$\vec{v}_e, \vec{a}_e$  – скорость и ускорение той точки тела, в которой находилась точка  $M$  для данного  $t$

# Доказательство формулы (\*) для плоского случая

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_{O_1} + \frac{d\vec{r}_1}{dt};$$

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 \Rightarrow \frac{d\vec{r}_1}{dt} = (x_1 \dot{\vec{i}}_1 + y_1 \dot{\vec{j}}_1) +$$

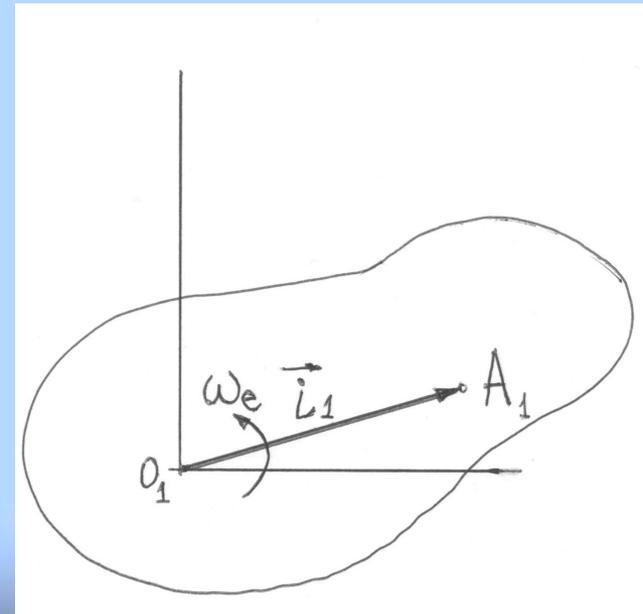
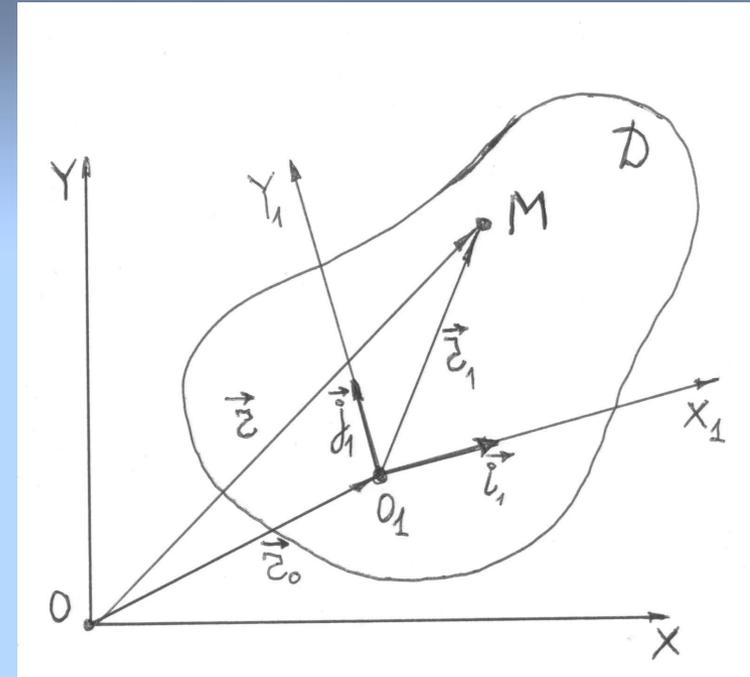
$$+ (x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt}) = \vec{v}_r + (x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt})$$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \frac{dO_1 A_1}{dt} = \vec{\omega} \times O_1 A_1 = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \Rightarrow$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + (\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1)) =$$

$$= \vec{v}_r + (\vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{r}_1)$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$



# Доказательство формулы (\*\*\*) для плоского случая

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + (\vec{v}_{O_1} + \omega \times \vec{r}_1)$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O_1}}{dt} + \varepsilon_e \times \vec{r}_1 + \omega_e \times \frac{d\vec{r}_1}{dt};$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1) = (\dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1) + (x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt}) = \\ &= \vec{a}_r + \omega_e \times (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1) = \vec{a}_r + \omega_e \times \vec{v}_r; \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_r + \omega_e \times \vec{r}_1$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + (\vec{a}_{O_1} + \varepsilon \times \vec{r}_1 + \omega_e \times (\omega_e \times \vec{r}_1)) + 2\omega_e \times \vec{v}_r;$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_c = 2\omega_e \times \vec{v}_r;$$

# Формулы сложения скоростей и ускорений

Таким образом:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (*)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad (**)$$

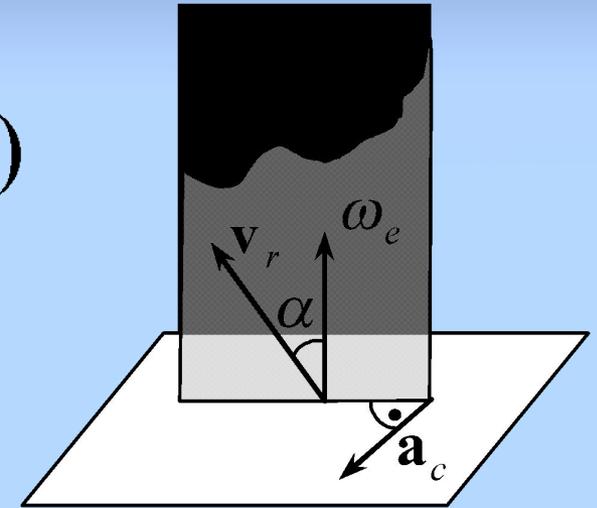
$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin \alpha,$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \beta};$$

$\beta$  – угол между  $\vec{v}_r$  и  $\vec{v}_e$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}$$



Еще рис.

## Рекомендации к решению задач

1. Решить задачу в подвижной системе координат и найти  $\vec{V}_r, \vec{a}_r$ . На этом этапе мы мысленно останавливаем тело.

2. Найти скорость и ускорение переносного движения. На этом этапе нужно “прикрепить” точку к телу. Тогда  $\vec{V}_e, \vec{a}_e$  - это скорость и ускорение “кнопки”.

3. Найти модуль и направление кориолисова ускорения

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r; \quad a_c = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin \alpha$$

4. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение по формулам

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e; \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

# Пример

Конус вращается по закону  $\varphi = 0,125t^2$

Точка  $M$  движется по образующей с постоянной скоростью  $v_1$

При  $t = 0: M_{\Delta} = O; \alpha = 30^\circ$

Определить  $v_a, a_a$ .

## Решение

1.  $v_r = OM = v_1; a_r = OM = v_1 = 0.$

2.  $\omega_e = \dot{\varphi} = 0,25t, \varepsilon_e = \ddot{\varphi} = 0,25$

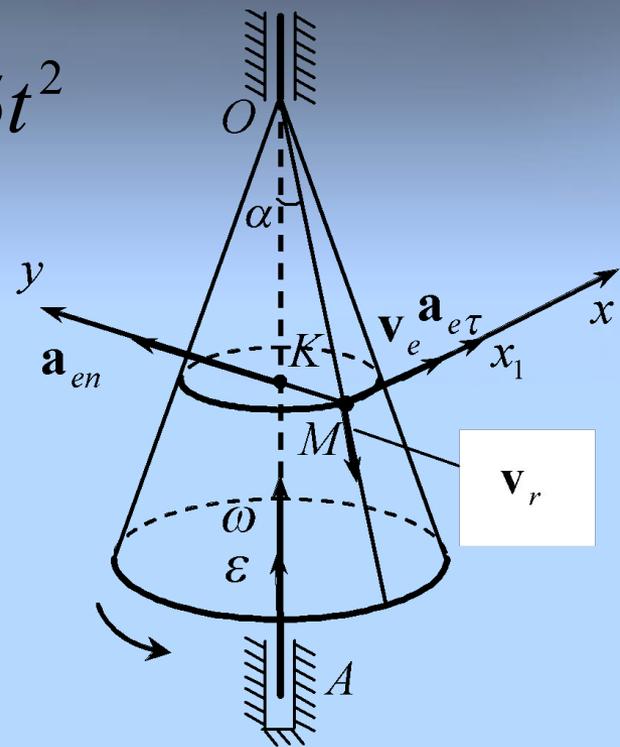
$$v_e = \omega_e KM = \omega_2 OM \sin \alpha = \omega_e v_1 t \sin \alpha$$

$$a_{en} = \omega_e^2 KM = \omega_e^2 v_1 t \sin \alpha; a_{e\tau} = \varepsilon_e KM = \varepsilon_e v_1 t \sin \alpha;$$

3.  $a_c = 2\omega_c v \sin 150^\circ;$

4.  $v_a = v_r + v_e; v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = v_1 \sqrt{1 + (\omega_e t \sin \alpha)^2}$

$$a_a = a_r + a_e + a_c = a_e^\tau + a_e^n + a_c; a_a = \sqrt{(a_e^\tau + a_c)^2 + (a_e^n)^2}$$



## **Заключение**

- 1. Определены понятия абсолютного, относительного и переносного движений.**
- 2. Выведены формулы для расчета абсолютной скорости и абсолютного ускорения.**
- 3. Даны рекомендации к решению задач на сложное движение точки.**
- 4. Приведены примеры расчета.**

## **Вопросы для самоконтроля**

1. В каких случаях целесообразно движение рассматривать как сложное?
2. Какое движение называется абсолютным?
3. Какое движение называется относительным?
4. Какое движение называется переносным?
5. Как найти скорость относительного движения?
6. Что такое угловая скорость?
7. Что такое угловое ускорение?
8. Чему равна скорость изменения единичных векторов при вращательном движении системы координат?
9. Сформулируйте и запишите теорему о сложении скоростей.

## **Вопросы для самоконтроля**

10. Как определяется переносная скорость точки?
11. Сформулируйте и запишите теорему о сложении ускорений.
12. Как определить относительное ускорение точки?
13. Из чего складывается переносное ускорение точки?
14. Что такое ускорение Кориолиса?
15. Когда ускорение Кориолиса равно нулю?

*Тема следующей лекции*

**Сферическое и произвольное  
движение точки**