ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 21

7. СУБГРАДИЕНТ И СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

7. СУБГРАДИЕНТ И СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

7.2. Критерий существование субградиента функции.

7.2. Критерий существования субградиента функции. Следующая теорема является критерием существования субградиента и, следовательно, субдифференциала у функции $I : U \to R^1$.

Теорема 2. ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***- открытое выпуклое множество. Для того, чтобы функция*** $I : U \to R^1$ ***имела непустой субдифференциал в каждой точке*** $u \in U$ ***необходимо и достаточно, чтобы эта функция была выпуклой на множестве*** U.

Доказательство. Необходимость. Пусть для некоторой функции $I : U \to R^1$ справедливо $\partial I\left(u\right) \neq \varnothing, \forall u \in U$.

Докажем выпуклость функции I. Для всех $u, v \in U, \alpha \in [0,1]$ полагаем

$$u_\alpha = \alpha u + \left(1-\alpha\right) v \in U,\; c\left(u_\alpha\right) \in \partial I\left(u_\alpha\right) \neq \varnothing$$

$u \to v$

Последовательно подставляем в $I(u) \geq I(v) + \langle c(v), u-v \rangle, \forall u \in U.$ (1.1) $v \to u_\alpha$,

$v \to u_\alpha$

$$\begin{array}{r|l} \alpha & I\left(u\right) - I\left(u_\alpha\right) \geq \left\langle c\left(u_\alpha\right), u - u_\alpha \right\rangle, \\ (1\text{-}\alpha) & I\left(v\right) - I\left(u_\alpha\right) \geq \left\langle c\left(u_\alpha\right), v - u_\alpha \right\rangle. \end{array} \qquad (1)$$

$$\alpha I\left(u\right) + (1\text{-}\alpha) I\left(v\right) - I\left(u_\alpha\right) \geq \left\langle c\left(u_\alpha\right), \overbrace{\alpha u + \left(1-\alpha\right) v - u_\alpha}^{=0} \right\rangle,$$

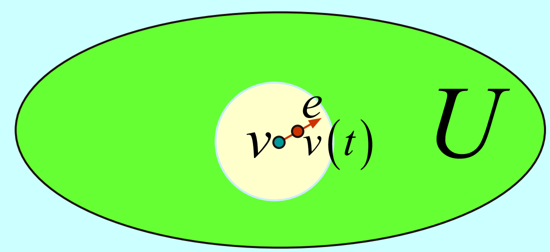
$$\alpha I(u)+(1\text{-}\alpha)I(v)-I(u_\alpha)\geq\left\langle c\Big(\underbrace{u_\alpha}_{\alpha u+(1-\alpha)v}\Big),\overbrace{\alpha u+(1-\alpha)v-u_\alpha}^{=0}\right\rangle\Rightarrow$$

$$\alpha I(u)+(1\text{-}\alpha)I(v)\geq I(u_\alpha)\Rightarrow I(u_\alpha)\leq\alpha I(u)+(1\text{-}\alpha)I(v)$$

$$I\big(\alpha u+(1-\alpha)v\big)\leq\alpha I(u)+(1\text{-}\alpha)I(v)$$

Необходимость доказана.

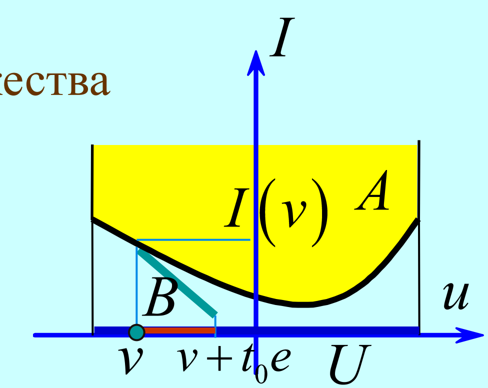
Достаточность. Пусть $I:U\to R^1$ выпуклая функция и $v\in U$. Надо показать, что $\partial I(v)\neq\varnothing$. Для произвольного $e\in R^n,\ \|e\|=1$ полагаем $v(t)=v+te$. В силу открытости множества U для достаточно малых $t_0>0$ будет выполняться $v(t)\in U,\ t\in[0,t_0)$. Из выпуклости функции I по **теореме 3.7** для всех e существует $\dfrac{dI(v)}{de}$ – производная функции I по направлению e.



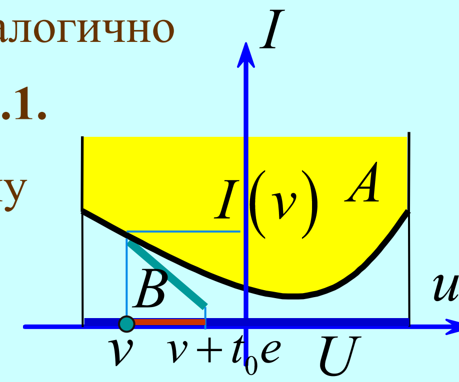
В пространстве R^{n+1} переменных (u,γ) рассмотрим множества

$$A=\left\{(u,\gamma)\in R^{n+1}\,\middle|\,u\in U;\gamma>I(u)\right\},$$

$$B=\left\{(u,\gamma)\in R^{n+1}\,\middle|\,u=v+te;\gamma=I(v)+t\frac{dI(v)}{de};0\leq t<t_0\right\}.$$



Множество $A \subset R^{n+1}$ выпукло. Доказательство этого факта аналогично доказательству выпуклости надграфика выпуклой функции **теорема 4.1.**



Множество $B \subset R^{n+1}$ представляет собой отрезок прямой, и поэтому тоже выпукло. Покажем что для малых t_0 будет выполняться

$$A \cap B = \varnothing. \qquad (2)$$

В самом деле, пусть $(u, \gamma) \in A.$ Имеются две возможности

1) $u \neq v + te, \forall t \in [0, t_0) \Rightarrow (u, \gamma) \notin B;$

2) $\exists t \in [0, t_0) : u = v + te.$ В силу $(u, \gamma) \in A$ выводим

$$\gamma > I(u) = I(v + te) \Rightarrow \gamma - I(v) > I(v + te) - I(v). \qquad (3)$$

По **лемме 3.1 из** выпуклости функции I для достаточно малых $t_0 > 0$ следует

выпуклость функции $\varphi(t) = I(v + te), t \in [0, t_0].$ По первому критерию выпуклости

$$\overset{I(v+te)}{\varphi(t)} \geq \overset{I(v)}{\varphi(0)} + \overset{\frac{dI(v)}{de}}{\varphi'(t)}(t - 0) \Rightarrow I(v + te) - I(v) \geq t\frac{dI(v)}{de}.$$

Из (3) $\gamma - I(v) > I(v+te) - I(v)$ (3) отсюда $I(v+te) - I(v) \ge t\dfrac{dI(v)}{de}$ выводим

$$\gamma - I(v) > \overbrace{I(v+te) - I(v)}^{\ge t\frac{dI(v)}{de}} \ge t\frac{dI(v)}{de} \Rightarrow \gamma - I(v) > t\frac{dI(v)}{de}.$$

Тогда из определения множества $B = \left\{ (u,\gamma) \in R^{n+1} \,\middle|\, \begin{array}{l} u = v + te; \\ \gamma = I(v) + t\dfrac{dI(v)}{de} \end{array} ; 0 \le t < t_0 \right\}$

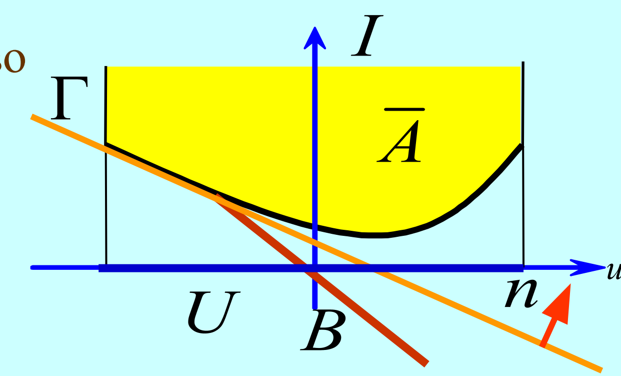
следует, что $(u,\ \gamma) = (v+te, \gamma\ ) \notin B.$ Таким образом, $(u,\gamma) \in A \Rightarrow (u,\ \gamma) \notin B$

и (2) $A \cap B = \varnothing$ (2) действительно имеет место. Тогда существует гиперплоскость Γ

с нормальным вектором $n = \begin{pmatrix} d \\ \delta \end{pmatrix} \in R^{n+1},\ n \ne 0,$ отделяющая множества

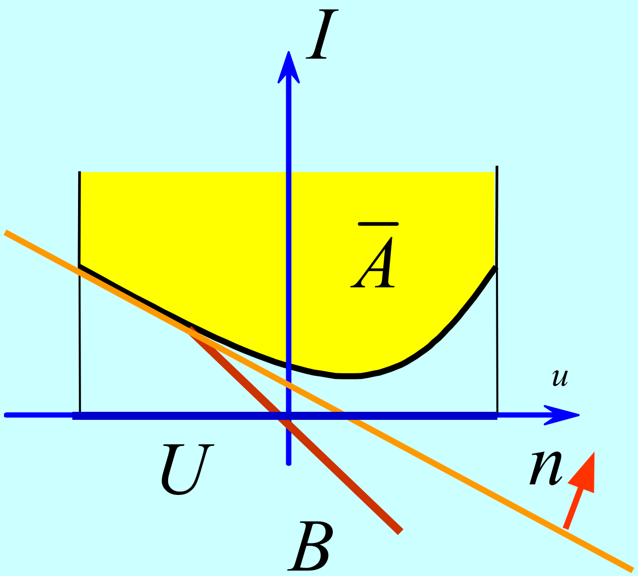
$$\bar{A} = \left\{ (u,\gamma) \in R^{n+1} \,\middle|\, u \in U; \gamma \ge I(u) \right\}$$ и $\bar{B} = B,$ т. е. для всех $(u,\gamma) \in \bar{A}$

и $\left(v + te, I(v) + t\dfrac{dI(v)}{de} \right) \in B,$ имеет место неравенство



$$\langle d, u \rangle + \delta\gamma \ge \langle d, v+te \rangle + \delta\left(I(v) + t\frac{dI(v)}{de} \right),$$

$$\forall \gamma \ge I(u), u \in U, t \in [0, t_0]. \qquad (4)$$



Покажем, что для вектора $n=\begin{pmatrix} d \\ \delta \end{pmatrix}$ имеет место $\delta \geq 0.$

Действительно, из (4)

$$\left\langle d, \overset{v}{u} \right\rangle + \delta\gamma \geq \left\langle d, v + \overset{0}{t} e \right\rangle +$$

$$+\delta\left(I(v) + \overset{0}{t}\frac{dI(v)}{de} \right), \; t \in [0, t_0] \quad (4)$$

при $u = v, \forall \gamma > I(v), t = 0$ выводим

$$\langle d, v\rangle + \delta\gamma \geq \langle d, v\rangle + \delta I(v) \Rightarrow \delta\gamma \geq \delta I(v) \Rightarrow \delta\left(\overset{\gamma > I(v)}{\gamma - I(v)}\right) \geq 0 \Rightarrow \delta \geq 0.$$

Покажем, что $\delta \neq 0.$ От противного $\delta = 0$ из (4) находим

$$\langle d, u\rangle \geq \langle d, v + te\rangle, \; u \in U, t \in [0, t_0]. \quad (5)$$

Полагаем $u = v + \varepsilon d.$ Заметим, что для малых по модулю ε будет выполнено

$$u = \overset{\in U}{v} + \varepsilon d \in \overset{\textit{открытое}}{U}.$$

Тогда из (5)

$$\langle d, v + \varepsilon d\rangle \geq \langle d, v + te\rangle \Rightarrow \langle d, \varepsilon d\rangle \geq \langle d, te\rangle \Rightarrow \varepsilon\langle d, d\rangle \geq t\langle d, e\rangle$$

При $t=0$ отсюда $\varepsilon\langle d,d\rangle \ge t\langle d,e\rangle, \quad t\in[0,t_0]$ получим $\varepsilon\|d\|^2 \ge 0.$

В силу произвольности знака числа ε последнее неравенство возможно только если

$d=0.$ Однако $\begin{pmatrix} d \\ \delta \end{pmatrix} \ne 0.$ Получили противоречие. Таким образом, $\delta > 0.$

Разделим неравенство (4)

$$\langle d,u\rangle + \delta\gamma \ge \langle d, v+te\rangle + \delta\left(I(v)+t\frac{dI(v)}{de}\right), (4)$$

на величину $\delta > 0.$ В результате получим

$$\left\langle \frac{d}{\delta}, u\right\rangle + \gamma \ge \left\langle \frac{d}{\delta}, v+te\right\rangle + I(v) + t\frac{dI(v)}{de},$$

$$\forall\gamma \ge I(u), u\in U, t\in[0,t_0]. \qquad (6)$$

Обозначим $c(v) = -\dfrac{d}{\delta}$ и перепишем (6). В результате получим

$$-\langle c(v), u\rangle + \gamma \ge -\langle c(v), v+te\rangle + I(v) + t\frac{dI(v)}{de}. \qquad (7)$$

Неравенство (7) $-\left\langle c(v), u\right\rangle + \overset{\to I(u)+0}{\gamma} \geq -\left\langle c(v), v + \overset{0}{t}\, e\right\rangle + I(v) + \overset{0}{t}\,\frac{dI(v)}{de}.$ $\qquad (7)$

верно для всех $\gamma \geq I(u)$ и $t \in [0, t_0]$. Полагаем в нем $t = 0$ и устремляем γ к $I(u)+0$. Тогда

$$-\left\langle c(v), u\right\rangle + I(u) \geq -\left\langle c(v), v\right\rangle + I(v), \quad u \in U \Rightarrow$$

$$I(u) - I(v) \geq \left\langle c(v), u - v\right\rangle \Rightarrow \quad c(v) \in \partial I(v) \neq \varnothing.$$

Теорема доказана.