Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# Лекция 5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Е.В. Феськова,
канд. пед. наук, доцент кафедры «Инженерный бакалавриат CDIO»

Красноярск 2022

# ВИДЫ И ПРИЗНАКИ КОЛЕБАНИЙ

**Колебания –** движение тел, повторяющиеся точно (или приблизительно) точно через одинаковые промежутки времени

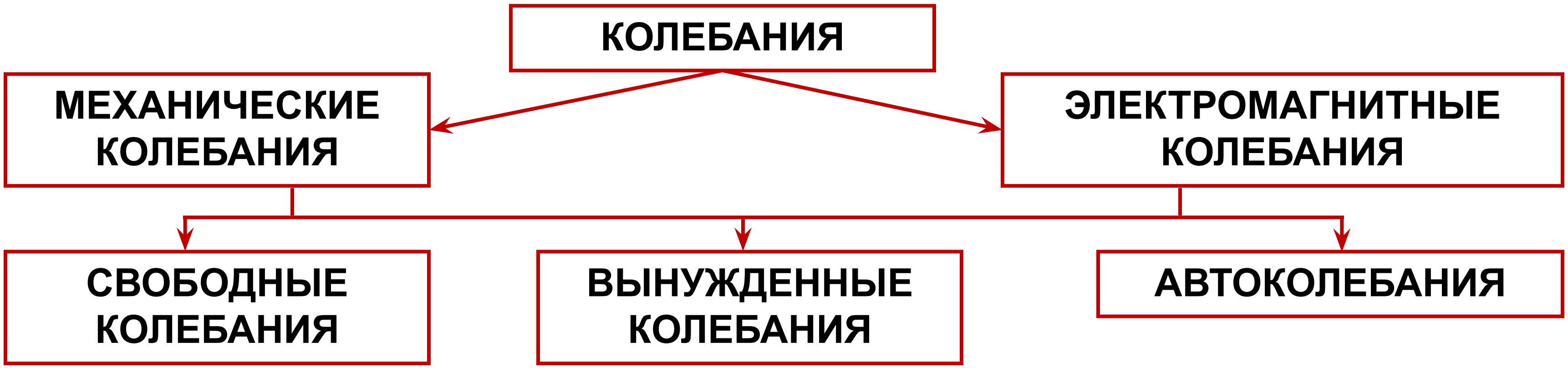
**Закон движения тела**, совершающего колебания, задается с помощью некоторой **периодической функции времени x = f(t)**. Графическое изображение этой функции дает наглядное представление о протекании колебательного процесса во времени.

**Для колебаний характерно:**
превращение одного вида энергии в другую – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.

**Три признака колебательного движения:**

- **повторяемость** (**периодичность**) – движение по одной и той же траектории туда и обратно;
- **ограниченность** пределами крайних положений;
- **действие силы**

# ВИДЫ И ПРИЗНАКИ КОЛЕБАНИЙ




**Условия существования колебаний:**

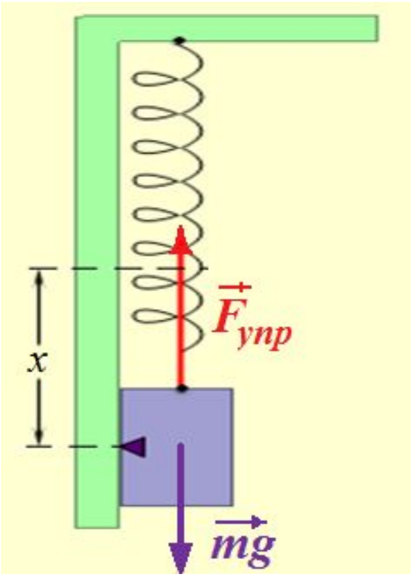
1. Инерция колеблющегося тела;
2. Наличие силы, которая стремится вернуть систему в положение равновесия

# ПРИМЕРЫ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ (ОСЦИЛЛЯТОРОВ)

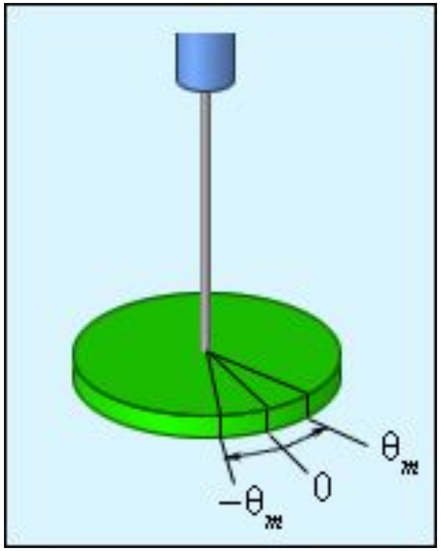
Физическую систему, совершающую колебания, называют **осциллятором**.

**Классический осциллятор** — механическая система, совершающая колебания около положения устойчивого равновесия (маятник).

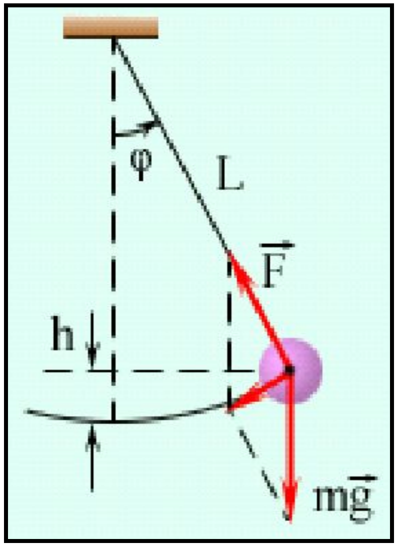
**Пружинный маятник**



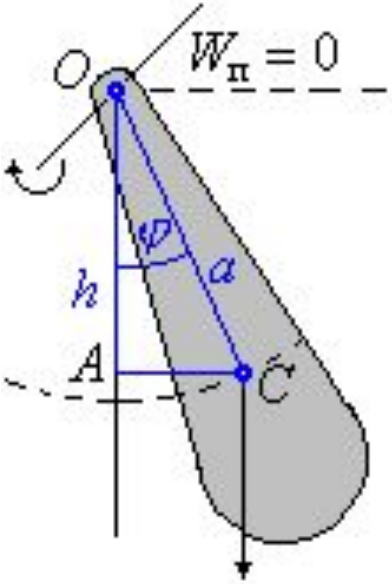

**Крутильный маятник**




**Математический маятник**




**Физический маятник**




Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

**Колебания называются свободными (или собственными)**, если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему

Колебания, которые совершаются с течением времени по закону синуса или косинуса, называют **гармоническими колебаниями**.

$$x = {}_0\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad\qquad x = {}_0\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Причины изучения гармонических колебаний:

1)колебания, встречающиеся в природе и технике, часто близки к гармоническим;

2)различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний.

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Формула (кинематическое уравнение) гармонического колебания**

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$x$ **– смещение** в данный момент времени, расстояние материальной точки от положения равновесия до точки, в которой она находится (м);

***A*** **– амплитуда** колебания, характеризующая величину наибольшего смещения материальной точки от положения равновесия (м);

**$(\omega t + \phi_0)$ – фаза** колебания, определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в данный момент времени;

**$\omega$– циклическая** (круговая) **частота,** показывает сколько колебаний совершается за 2π секунд;

**$\phi_0$ – начальная фаза** колебания, определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в начальный момент времени

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Период колебания T –** это промежуток времени одного полного колебания.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

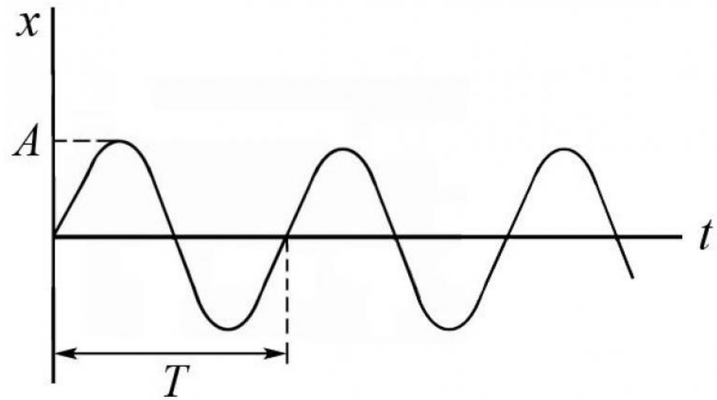
**Период колебания T-** минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

**Частота колебаний** определяется, как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, измеряют в герцах (Гц):
1 Гц = 1 колебание в секунду.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

**Циклическая (круговая, собственная) частота** – число полных колебаний за 2 π секунд. Измеряют в рад/с.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$



# ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Смещение** описывается уравнением $$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

---

**Скорость** гармонических колебаний $$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

**Амплитуда скорости** гармонических колебаний $$\omega A = \upsilon_m$$

---

**Ускорение** гармонических колебаний $$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

**Амплитуда ускорения** гармонических колебаний $$\omega^2 A = a_m$$

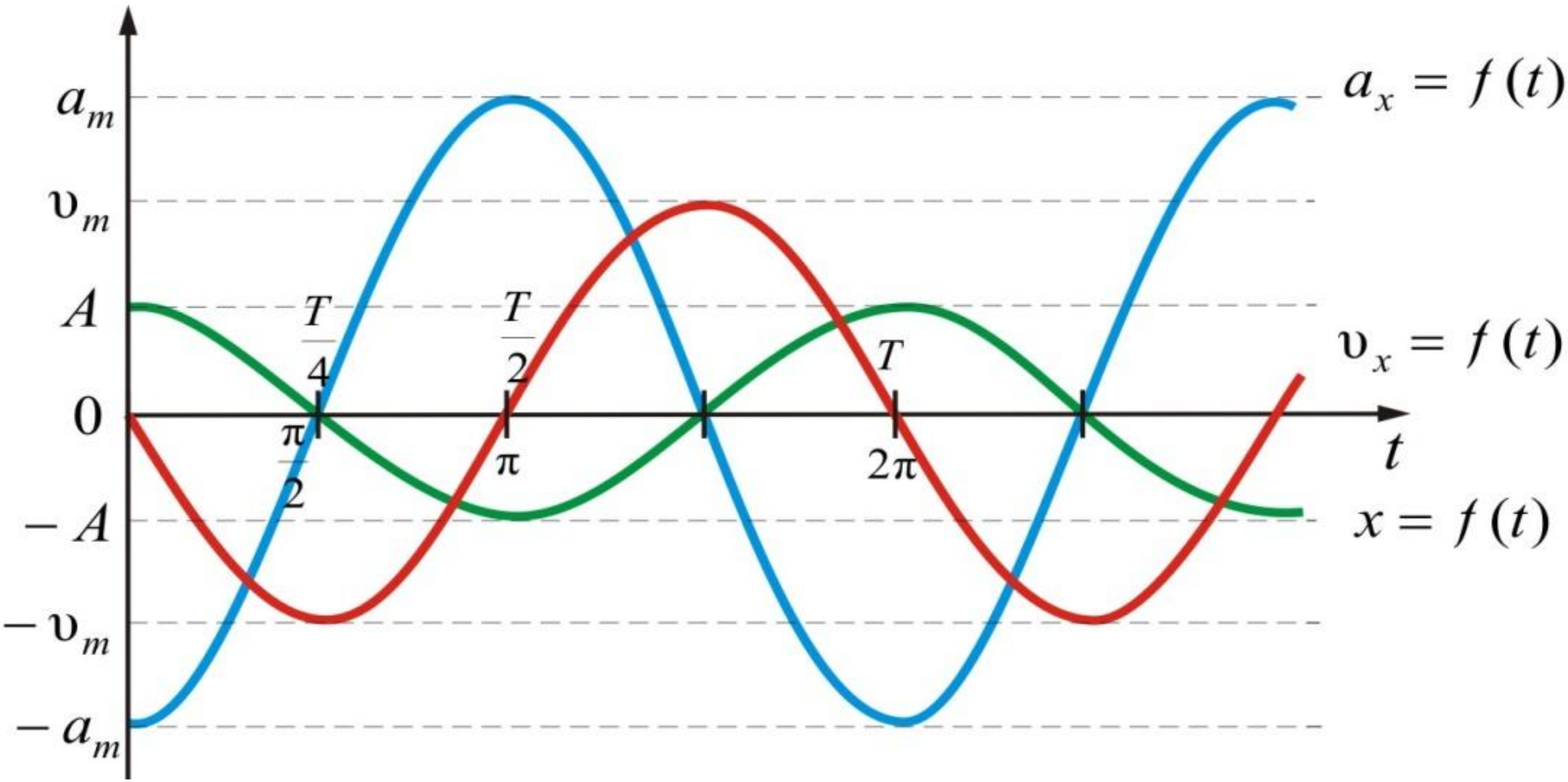
---

**Сила** при гармонических колебаниях $$F = -m \cdot \omega^2 \cdot A\cos(\omega t + \varphi)$$

**Амплитуда силы** при гармонических колебаниях $$F_x = -m \cdot \omega^2 \cdot A$$

сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

# ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ




Ускорение опережает колебания смещения по фазе на π и опережает колебание скорости по фазе на π/2

# КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

**Кинетическая энергия** материальной точки, совершает гармонические колебания с круговой частотой 2ω, а величина ее периодически изменяется от 0 до ½ m $\omega^2 A^2$.

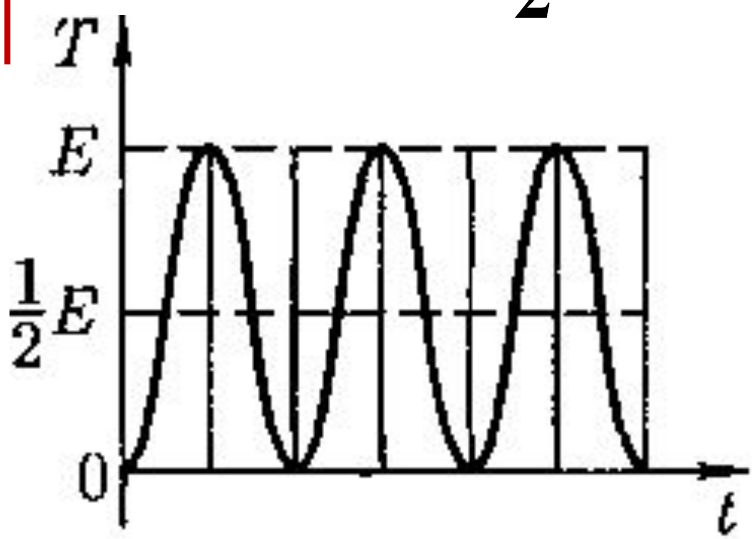
$$T = \frac{m v_m^2}{2}$$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t)$$

$$v_m = -A\omega \sin \omega t$$

$$T = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)}{2}$$

$$T_m = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$



# ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

**Потенциальная энергия** физической системы периодически изменяется от 0 до m $\omega^2 A^2/2$ и совершает гармонические колебания с круговой частотой $2\omega$.

$$\Pi = \frac{k\Delta x^2}{2}$$

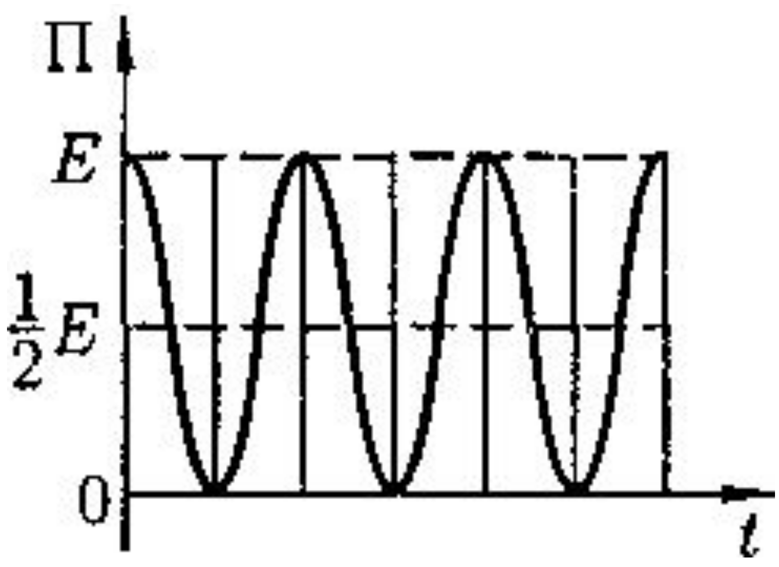
$$x = A\cos\omega t$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$k = m\omega^2$$

$$\Pi = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t)}{2}$$

$$\Pi_m = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

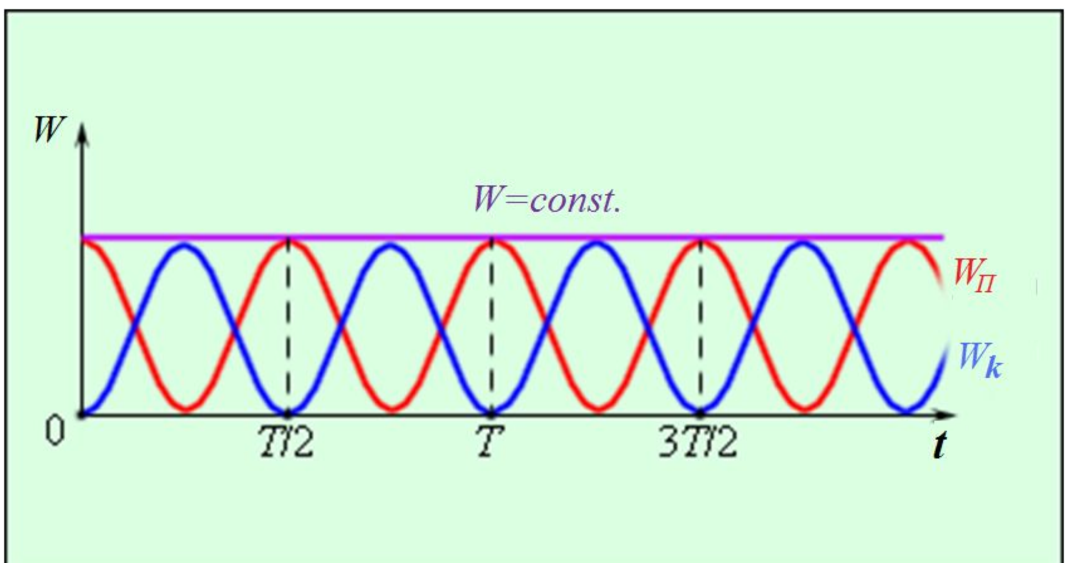


# ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Полная механическая энергия системы в отсутствии затухания не изменяется, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна

$$W = \Pi + T = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t}{2} + \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t}{2}$$

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$




$$W \sim A^2$$

$$W \sim \omega^2$$

так как $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha,$

то $\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} W$

# ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК

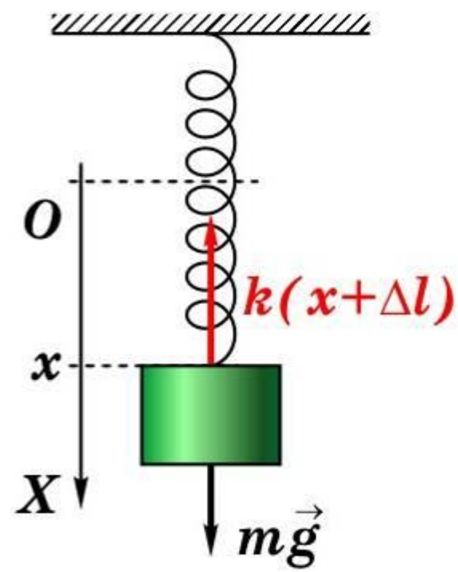
**Пружинный маятник** – это груз массой *m*, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью *k*, совершающий гармонические колебания под действием упругой силы

$$F = -k\Delta x$$

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Выполняется при условии когда масса пружины мала по сравнению с массой тела




Квадрат круговой частоты прямо пропорционален коэффициенту жесткости пружины k и обратно пропорционален его массе m

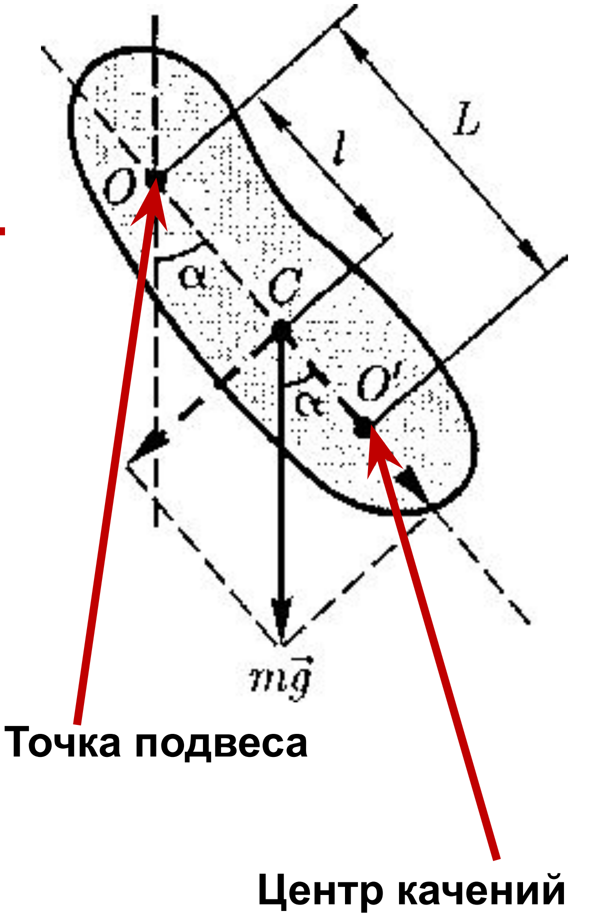
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Потенциальная энергия пружинного маятника

$$\Pi = \frac{k\;^{2}}{2}$$

# ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Твердое тело произвольной формы, свободно совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс, называют **физическим маятником**




Уравнение колебания физического маятника

$$J\varepsilon + mgl\alpha = 0$$

Собственная частота колебания физического маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

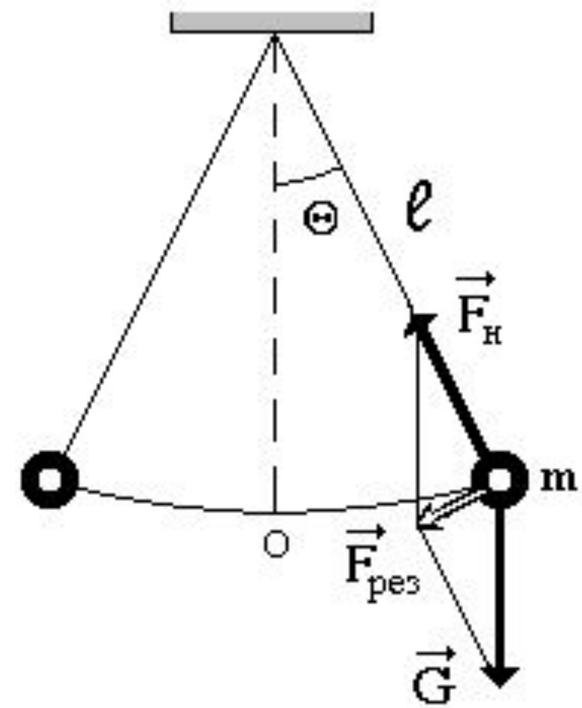
Приведенная длина физического маятника

$$L = \frac{J}{ml}$$

Точка подвеса маятника и центр качаний обладают **свойством взаимозаменяемости**: если точку подвеса перенести в центр качаний, то прежняя точка подвеса станет новым центром качаний, и период колебаний физического маятника не изменится

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

**Математическим маятником** называют материальную точку, закрепленную на невесомой и нерастяжимой нити, совершающую свободные гармонические колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.




Собственная частота колебания математического маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

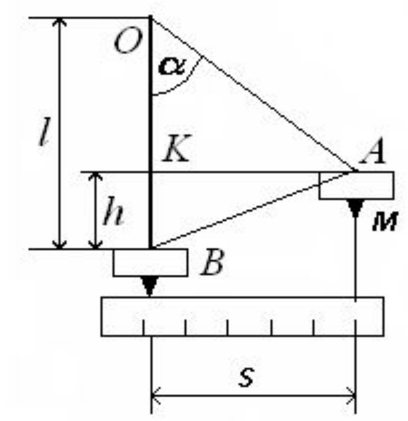
Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

математический маятник частный случай физического маятника

# БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

**Баллистический маятник** представляет собой тяжелое тело, подвешенное на двойных нитях




закон сохранения импульса

$$m\upsilon = (m+M)\cdot\upsilon_1$$

закон сохранения механической энергии

$$\frac{1}{2}(m+M)\cdot\upsilon_1^2 = (M+m)\cdot gh$$

$$AK^2 = S^2 = l^2 - (l-h)^2 = 2lh + h^2$$

$$h = \frac{S^2}{2l}$$ Так как *l*>>*h*, то $S^2 \approx 2lh$

$$\upsilon = \frac{M+m}{m} S\sqrt{\frac{g}{l}}$$

скорости пули перед ударом

# ЗАДАЧИ

1. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 5 см, если за время t = 1 мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний φ = π/4.

2. Через какое время от начала колебания точка, которая выполняет колебательное движение по уравнению $x = 7\sin\frac{\pi}{2}t$, проходит путь от положения равновесия до максимального смещения ?

3. Амплитуда гармонического колебания A = 5 см, период T = 4 с. Найти максимальную скорость $v_{max}$ колеблющейся точки и ее максимальное ускорение $a_{max}$.

4. Уравнение колебаний материальной точки массой m = 10 г имеет вид $x = 5\sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см
Найти максимальную силу $F_{max}$, действующую на точку, и полную энергию W колеблющейся точки

5. Найти отношение кинетической энергии $W_к$ точки, совершающей гармоническое колебание, к ее потенциальной энергии $W_п$ для моментов времени: t = T/12. Начальная фаза колебаний $\varphi_0$ = 0.

6. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, W = 30 мкДж; максимальная сила, действующая на тело, $F_{max}$ = 1,5 мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний T = 2 с и начальная фаза φ = π/3.

# ЗАДАЧИ

7. Шарик, подвешенный на нити длиной $l$ = 2 м, отклоняют на угол □ = 4° и наблюдают его колебания. Полагая колебания не затухающими гармоническими, найти скорость шарика при прохождении им положения равновесия.

8. К пружине подвешен груз массой m = 10 кг. Зная, что пружина под влиянием силы F = 9,8 Н растягивается на □$l$ = 1,5 см. Найти период T вертикальных колебаний груза.

9. К резиновому шнуру длиной $l$ = 40 см и радиусом r = 1 мм подвешена гиря массой m = 0,5 кг. Зная, что модуль Юнга резины E = 3 МН/м2, найти период T вертикальных колебаний гири. (Жесткость k резины связана с модулем Юнга E соотношением $k = SE/l$, где S — площадь поперечного сечения резины, $l$ — ее длина).

10. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определите, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была равна □.

# СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ОДИНАКОВОЙ ЧАСТОТЫ

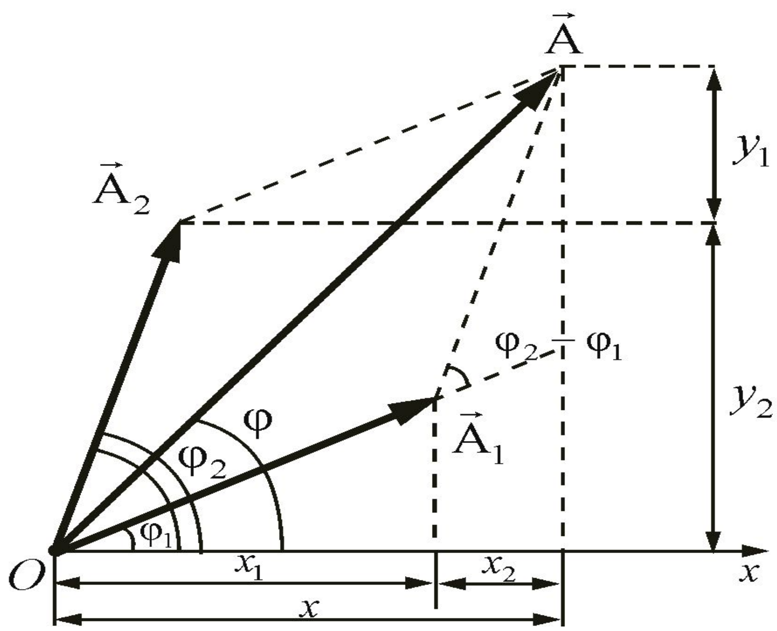
Пусть **точка** одновременно участвует **в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой**

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

колебания называются когерентными, их разность фаз не зависит от времени $\varphi_2 - \varphi_1 = const$

Суммарная амплитуда результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$




Начальная фаза определяется из соотношения

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

**Амплитуда А результирующего колебания зависит от разности начальных фаз**

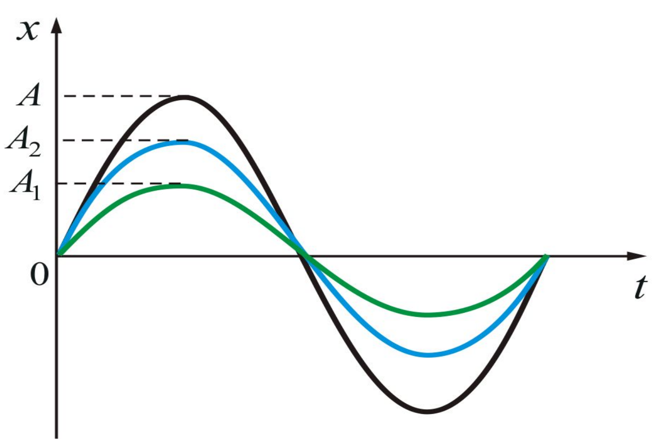
# СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ОДИНАКОВОЙ ЧАСТОТЫ

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

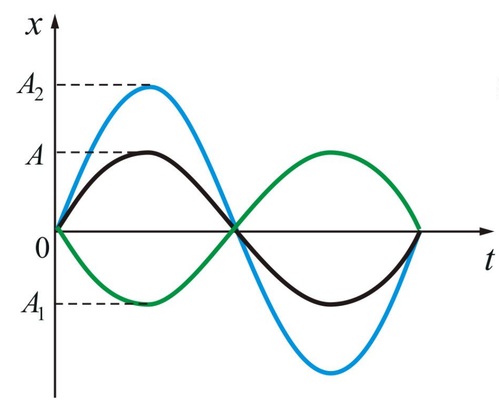
Если $\Delta\varphi = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2...$; разность фаз равна нулю или четному числу π то колебания происходят в одной фазе (**синфазны**). Тогда $\vec{A}_1 \uparrow\uparrow \vec{A}_2$ и

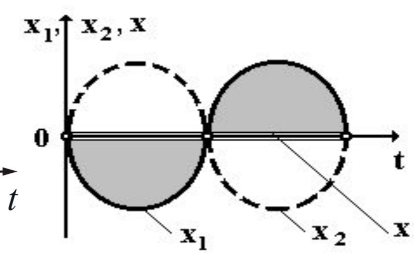
$$A = A_{\max} = A_1 + A_2$$

**Результирующая амплитуда равна сумме амплитуд складываемых колебаний**




Если $\Delta\varphi = \pi + 2\pi n, \quad n = 0, 1, ...$, разность фаз равна нечетному числу π, то колебания (**противофазны**). Тогда $\vec{A}_1 \uparrow\downarrow \vec{A}_2$ и $A = A_{\min} = |A_1 - A_2|$




Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и $A_1 = A_2$, но противоположны по фазе, то результирующая амплитуда A = 0, т. е. **колебания полностью гасят друг друга**

# СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ОДИНАКОВОЙ ЧАСТОТЫ

**Разность фаз изменяется во времени произвольным образом**

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)] \\ x_2 = A_2 \cos[\omega_2 t + \varphi_2(t)] \end{cases}$$

Результат сложения двух гармонических колебаний одинакового направления с близкими частотами называется **биениями**.

**Результирующее колебание – формула биений**

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega$$

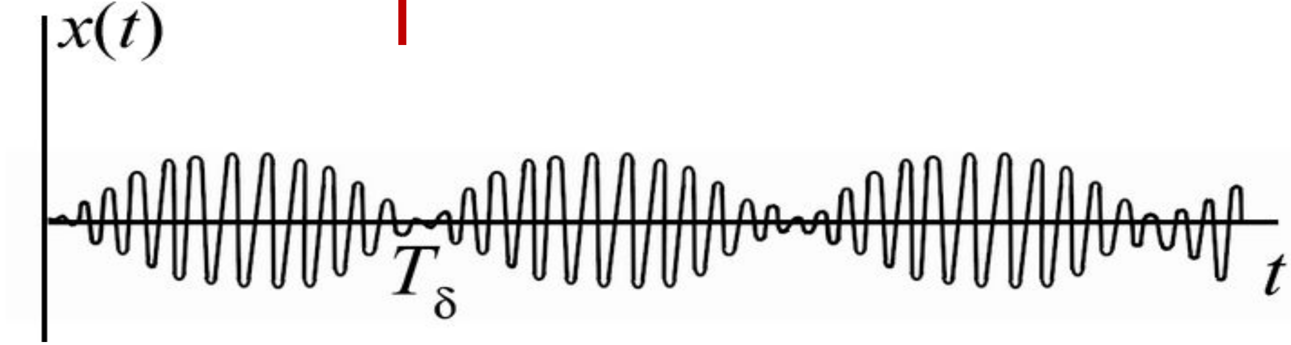
**Амплитуда результирующего колебания**

$$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$$

**Период результирующего колебания**

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

**Некогерентные колебания,** называемый биениями, когда частоты близки $\omega_1 \approx \omega_2$



# СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

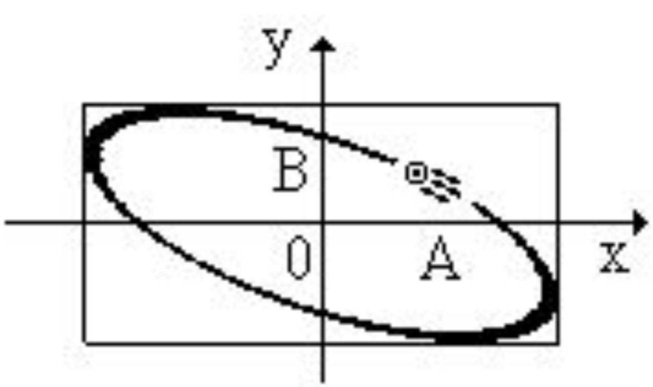
Уравнения двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

В результате получили уравнение **эллипса** с произвольно расположенными осями

$$\boxed{\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$




Частица совершает полный оборот за время, равное периоду колебаний Т.
Результирующее колебание называют **эллиптически поляризованным.**

**Ориентация эллипса и размеры его осей зависят** от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз

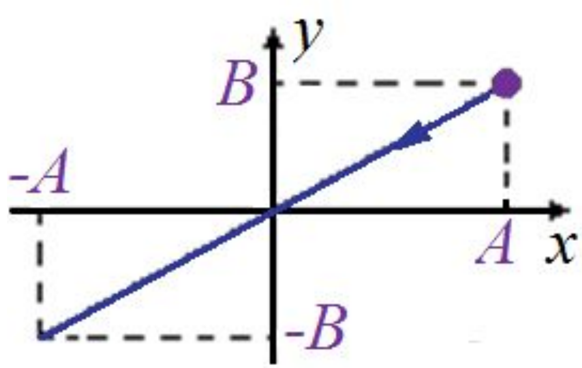
# СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \sin\Delta\varphi = 0 \qquad \cos\Delta\varphi = 1$$

уравнение **эллипса** $$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

**уравнение прямой линии** $$y = \frac{B}{A}x$$

**амплитуда колебаний** $$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

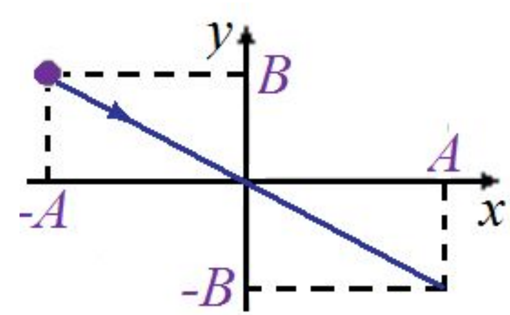



$$\Delta\varphi = \pm\pi \qquad \sin\Delta\varphi = 0 \qquad \cos\Delta\varphi = -1$$

уравнение **эллипса** $$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

**уравнение прямой линии** $$y = -\frac{B}{A}x$$

**амплитуда колебаний** $$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$



# СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

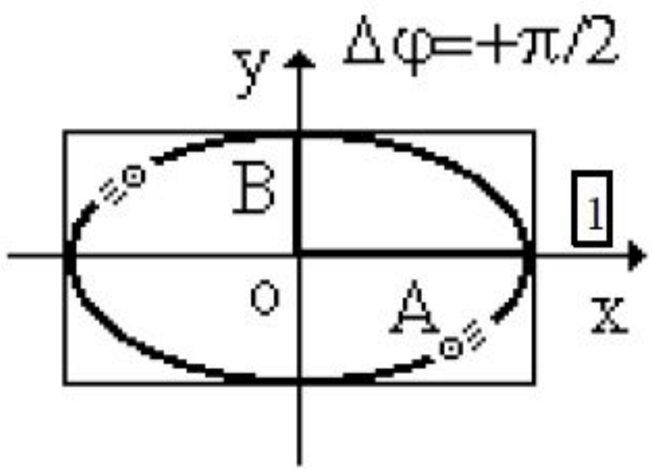
**Разность фаз складываемых взаимно перпендикулярных колебаний равна нечетному числу π/2,** т. е.

$\Delta\phi = \pm(2m + 1)\,\pi/2$, где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ .

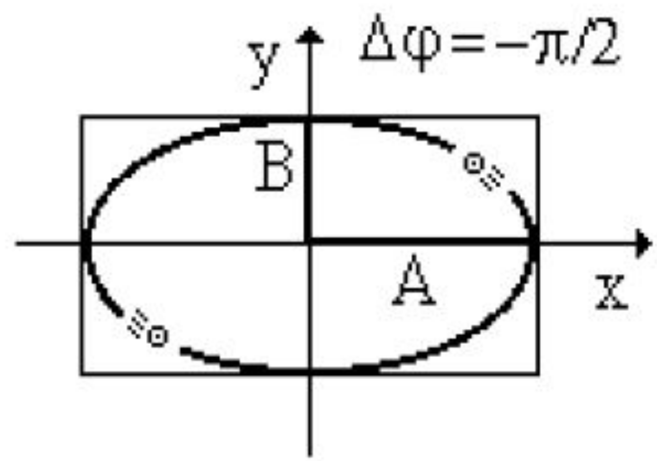
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

При равенстве амплитуд $A = B$ складываемых колебаний эллипс вырождается в окружность радиуса $R$ ($A = B = R$): $x^2 + y^2 = R^2$

Если $\Delta\phi = +\pi/2$, то при $t = 0$ частица будет двигаться по траектории по часовой стрелке




Если $\Delta\phi = -\pi/2$, то при $t = 0$ частица будет движется по траектории против часовой стрелке

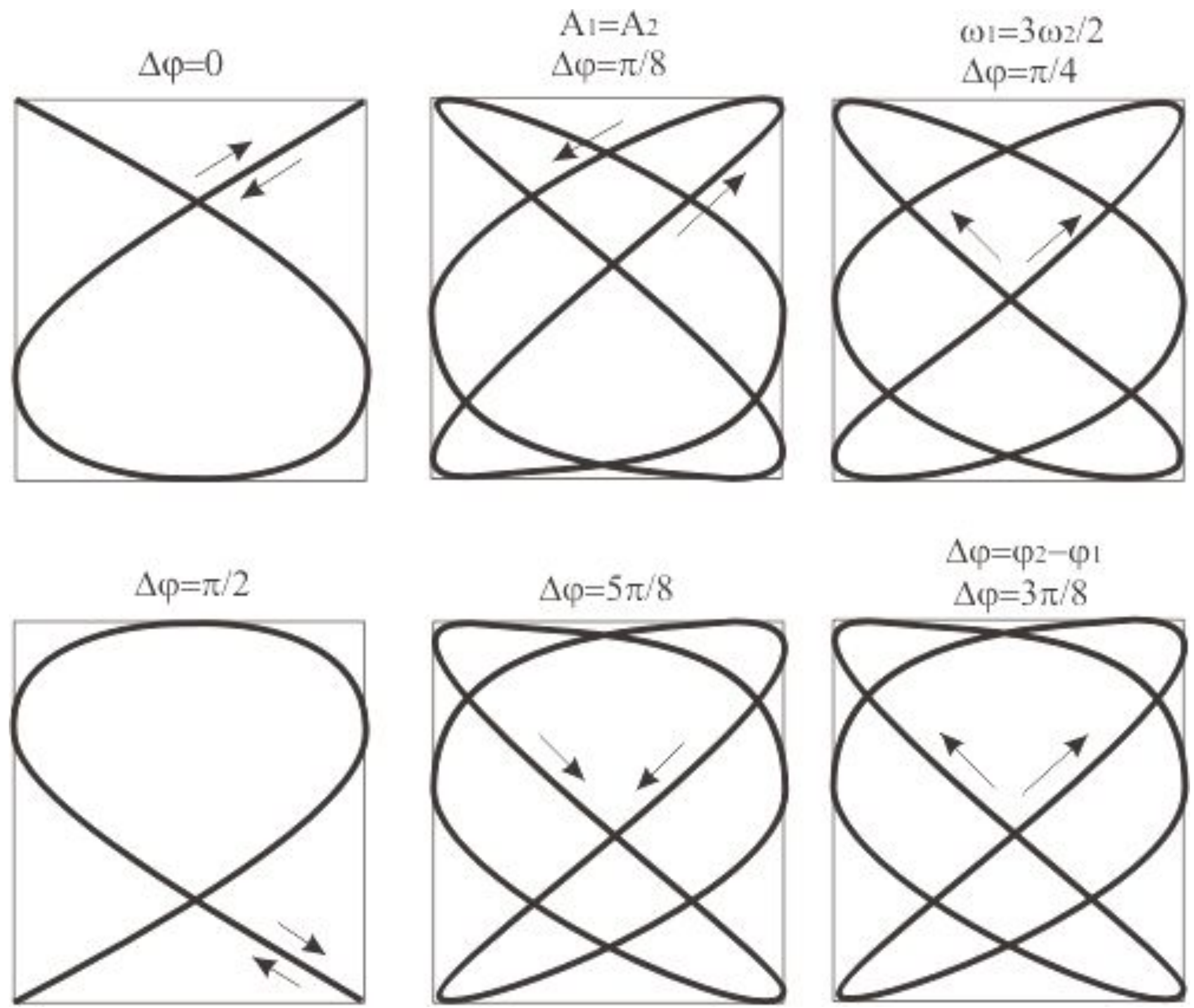


# СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНОПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

**Все остальные разности фаз дают эллипсы** с различным углом наклона относительно осей координат.

Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний **разных** частот, называются фигурами Лиссажу.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}$$



# ЗАДАЧИ

11. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебательных, колебаний с одинаковым периодом $T = 8$ с и одинаковой амплитудой $A = 0{,}02$ м. Разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/4$. Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

12. Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Найти амплитуду $A$ результирующего колебания, если колебания совершаются; а) в одном направлении; б) в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

**Затухающие колебания** — колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии с течением времени уменьшаются.
Энергия механических колебаний расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается

Сила трения (или сопротивления) $F_{mp} = -r\vec{\upsilon}$

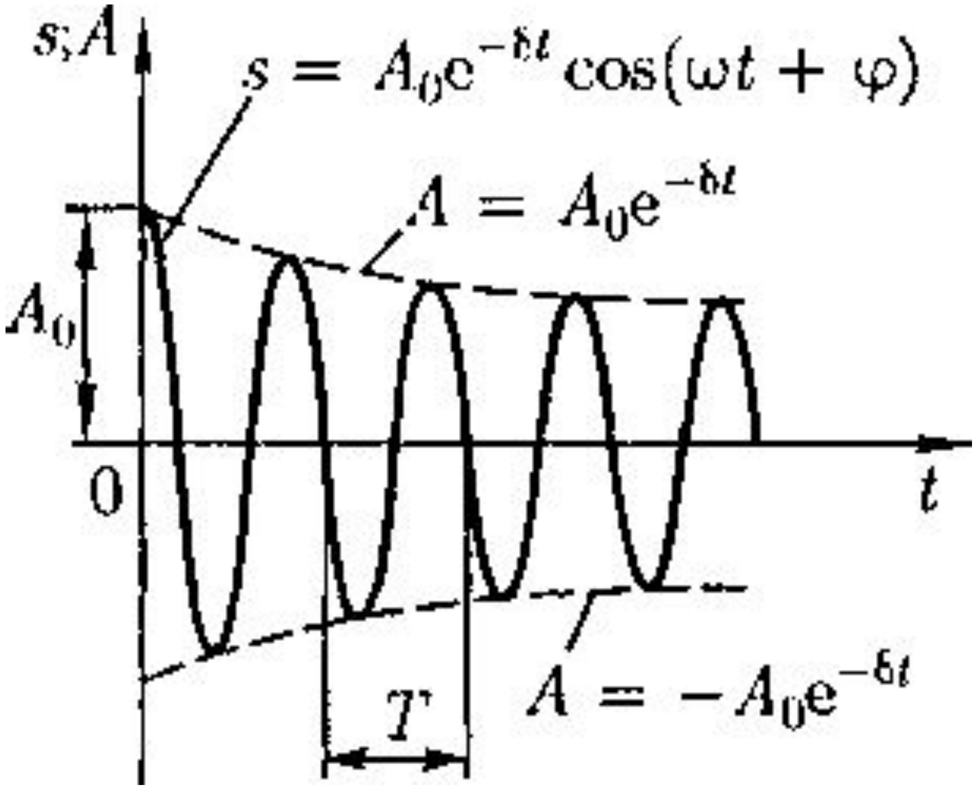
*r* – коэффициент сопротивления,
$\vec{\upsilon}$ – скорость движения

**Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

x — колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс,
δ=const — коэффициент затухания,
$\omega_0$ — собственная циклическая частотой колебательной системы

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ




**Амплитуда свободных затухающих колебаний**

$$A = A_0 e^{-\delta t}$$

δ — коэффициент затухания

$$\frac{r}{m} = 2\delta$$

$\omega_0$ — собственная циклическая частотой колебательной системы

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

# ХАРАКТЕРИСТИКИ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Промежуток времени τ = 1/δ, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в е = 2.7 раз, называется **временем релаксации**.

**Период затухающих колебаний равен (условно)**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$$

**Циклическая частота затухающих колебаний**

$$\omega = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$$

**Собственная частота пружинного маятника**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**Декремент затухания**

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

A(t), A(t+T) — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период

**Коэффициент затухания**

$$\delta = \frac{r}{2m}$$

r — коэффициент сопротивления

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Механические колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы называются **вынужденными механическими колебаниями.**

**Амплитуда вынужденных колебаний будет максимальна**, если собственная частота этих колебаний совпадает с резонансной частотой (частотой внешней силы):

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$$

---

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется **резонансом**

Амплитуда резонансных колебаний

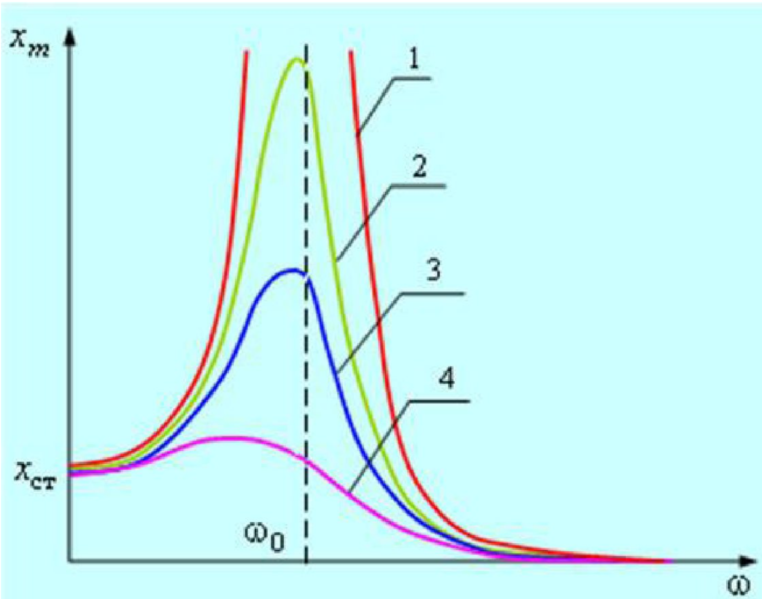
$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}$$

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях δ:

**1**- коэффициент $\delta=0$;

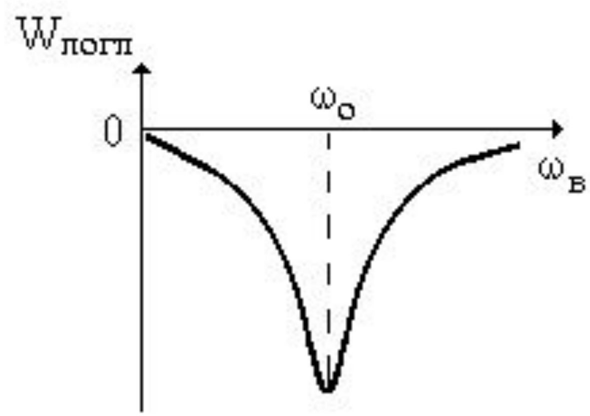
**2,3,4** – реальные резонансные кривые при $\delta_2 < \delta_3 < \delta_4$




Чем меньше δ, тем выше и правее лежит максимум данной кривой

С увеличением коэффициента затухания явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при

$$\delta > \frac{\omega}{\sqrt{2}} \qquad \omega \to \infty, A \to 0$$



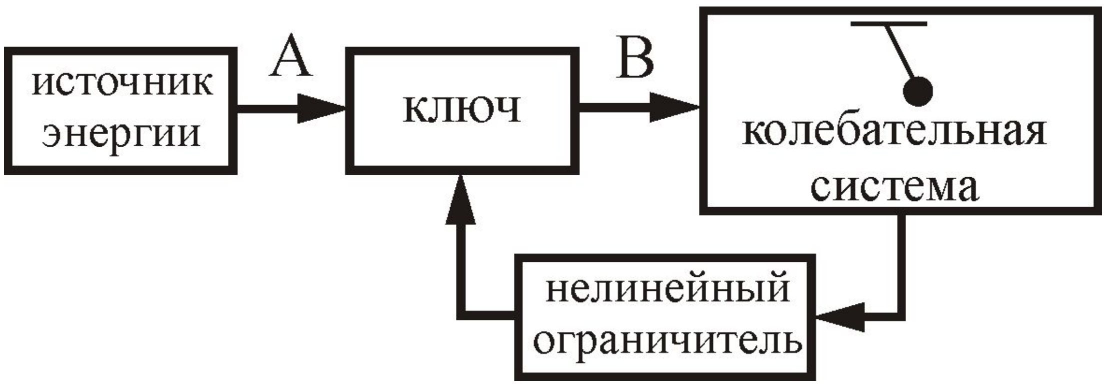

амплитуда вынужденных колебаний зависит от вынуждающей частоты и имеет резонансный максимум при $\omega_в = \omega_о$, поглощаемая энергия, наоборот, имеет резонансный минимум, «провал» или «яму»

# АВТОКОЛЕБАНИЯ

Классическим примером автоколебательной системы служат механические часы с маятником и гирями.

**Автоколебания** — незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой

**Принцип работы всех автоколебательных систем**

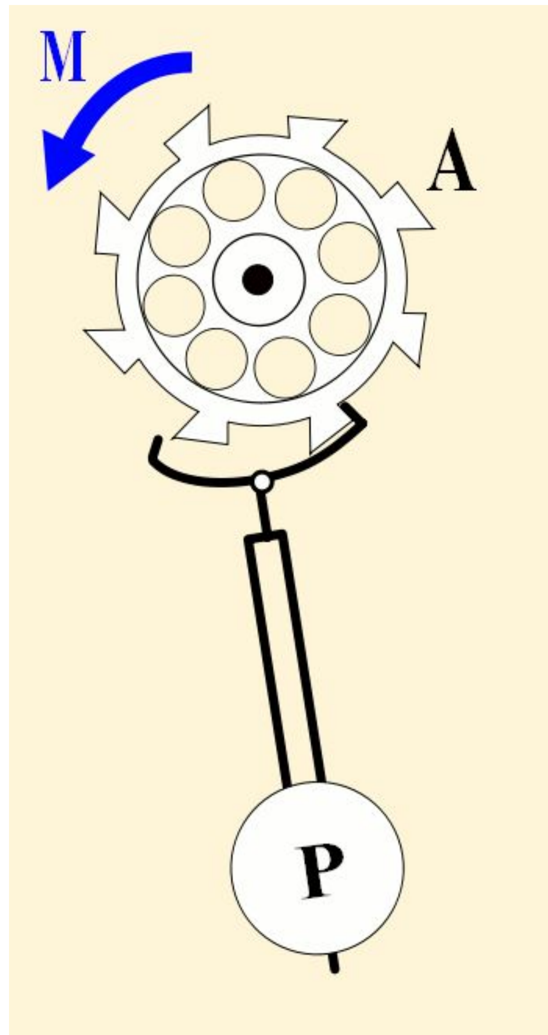


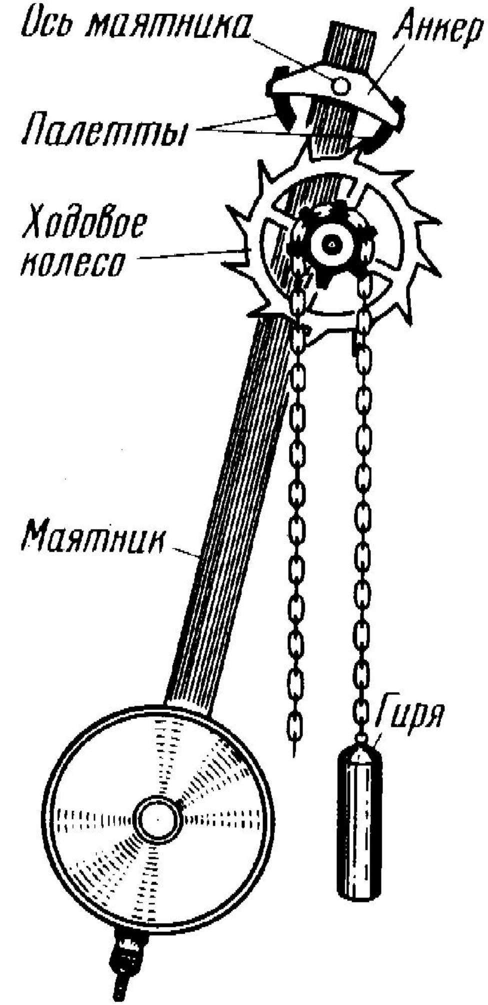

Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу AB управляет сама колебательная система посредством обратной связи.

# АВТОКОЛЕБАНИЯ

В конструкции часового механизма присутствует специальное устройство – анкер, выполняющий роль ключа. Этот анкер, представляющий собой коромысло, приводится в колебание самим маятником часов.

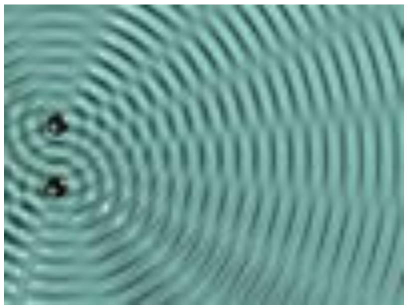
Важно отметить, что любая автоколебательная система нелинейна.

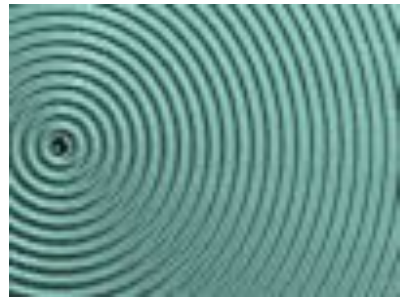


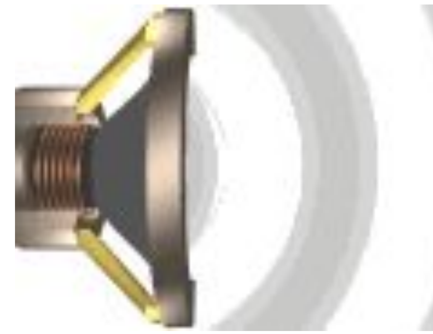



# ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

**Волна – процесс распространения колебаний в пространстве**







При распространении волны, частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия

Вместе с волной от частицы к частице, передается состояние колебательного движения и его энергия

**Основным свойством** всех волн независимо от их природы является перенос энергии без переноса вещества

# ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ

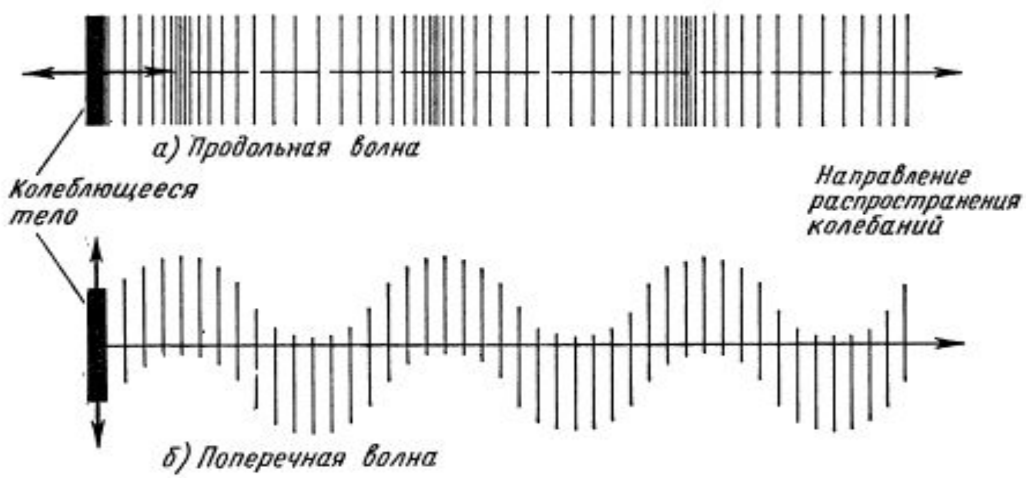
Среди волн, встречающихся в природе и технике, выделяются их типы: **волны на поверхности жидкости, упругие и электромагнитные волны**

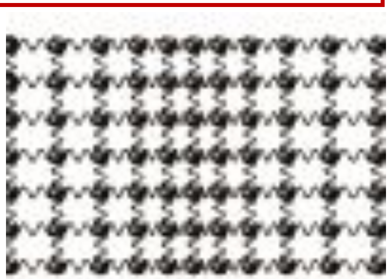
**Упругими (или механическими)** волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде

**УПРУГИЕ ВОЛНЫ**

**Продольные**
- волны, при распространении которых частицы среды колеблются в направлении распространения волны

**Поперечные –**
волны, при распространении которых частицы среды колеблются в направлении перпендикулярном распространению волны



**в твердой, жидкой и газообразной** средах

**в твердой,** среде

# ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ

**Поперечные волны** связаны с упругими деформациями сдвига. Возможны только в твердых телах

$$v_{\square} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

***G*** **- модуль сдвига**

***ρ*** **- плотность среды**

**Продольные волны** связаны с упругими деформациями сжатия и растяжения. Возможны в газах, жидкостях, твердых телах

$$v_{\square} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$E$ **- модуль Юнга**

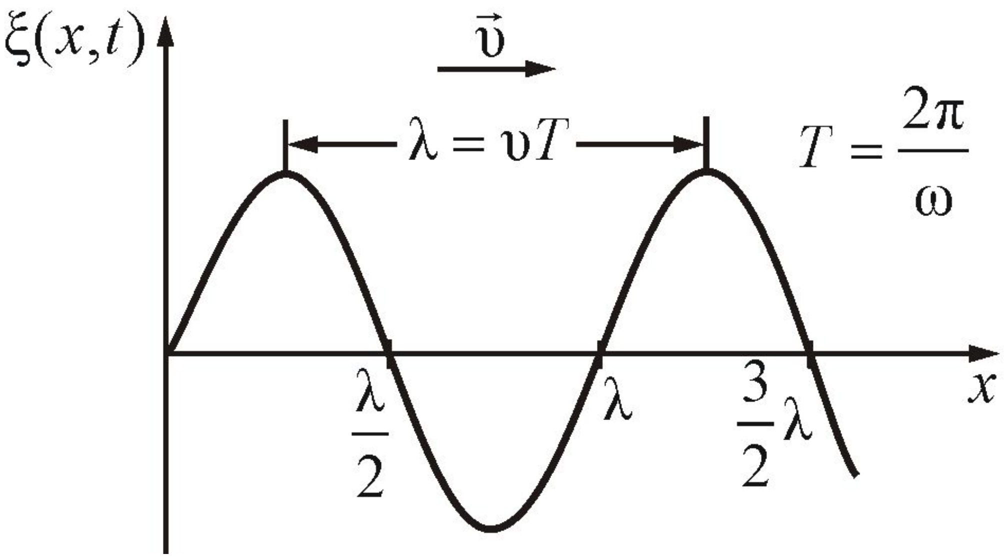
# ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ

**Монохроматической** называется волна  определённой частоты или длины волны

**Упругая волна** называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими

Волновая функция $\xi = \xi(x, y, z, t)$

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны λ**




$$\lambda = \upsilon T$$

$\nu$ – частота          T– период

$$T = \frac{1}{\nu}$$

$\upsilon = \lambda \nu$ скорость распространения волны

# ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

**Фронт волны** – геометрическое место точек, до которых доходит возмущение в момент времени t. В однородной среде направление распространения перпендикулярно фронту волны.

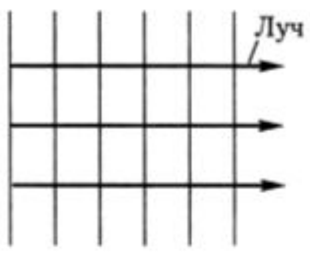
Фронт волны – один. Фронт волны все время перемещается

**Волновая поверхность -** геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Число волновых поверхностей – бесконечно. Волновые поверхности неподвижны

**ВИДЫ ВОЛН ПО ВОЛНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

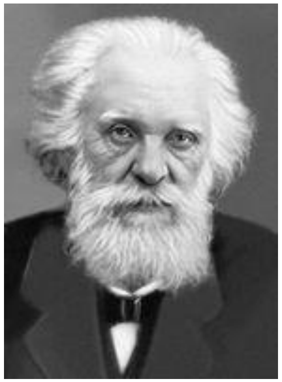
**Плоская** - волна, фазовые поверхности которой представляют собой совокупность параллельных друг другу плоскостей

**Сферическая** - волна, фазовые поверхности которой представляют собой совокупность концентрический сфер




# УРАВНЕНИЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

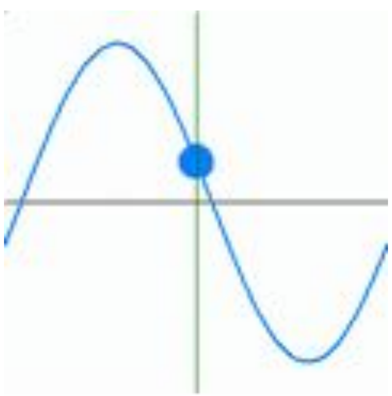
**Бегущими волнами** называются волны, которые переносят в пространстве энергию



Умов Николай Алексеевич (1846-1915)

Перенос энергии волнами количественно характеризуется **вектором плотности потока энергии (вектором Умова)**

**Вектор Умова совпадает** с направлением **переноса энергии**, а его модуль **равен энергии**, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны



$$\xi = A\cos\omega t$$ волновая функция $\xi$ носит гармонический характер

$$\tau = \frac{x}{\upsilon}$$ чтобы пройти путь *x* необходимо время

$$\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$$ **уравнение бегущей волны**

# УРАВНЕНИЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Для характеристики волн используют **волновое число**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{\omega}{\upsilon}$$

Тогда **уравнение плоской волны** запишется так

$$\xi = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

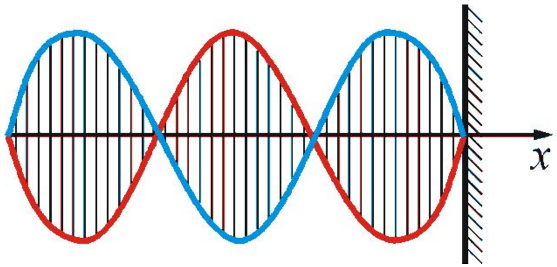
Скорость распространения волны (скорость перемещения фазы волны), называют **фазовой скоростью.** Из формулы для волнового числа получим формулу для фазовой скорости

$$\frac{\omega}{k} = \upsilon$$

Если **фазовая скорость волн** в среде **зависит от их частоты**, то это явление называют **дисперсией волн**, а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, называется **диспергирующей средой**

# СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

При наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой возникает колебательный процесс называемый **стоячей волной**.
Практически стоячие волны возникают при отражении от преград (частный случай интерференции)




$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx)\end{aligned}\right\} \quad \xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$$

или $\xi = A^*\cos\omega t$ **уравнение стоячей волны**

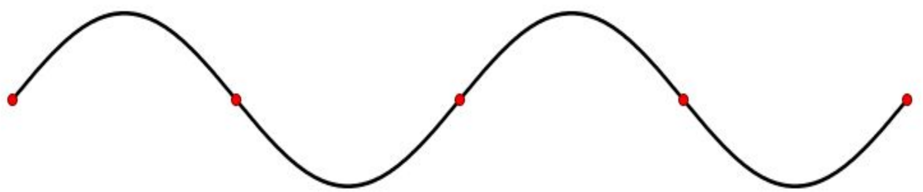
$$A^* = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$ суммарная амплитуда

Если $A^* = 2A$ координаты пучностей $x_{пуч} = \pm n\lambda / 2$ ($n$=0, 1, 2..)

Если $A^* = 0$ координаты узлов $x_{узл} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ ($n$=0, 1, 2..)

# СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

В направлении распространения **бегущей волны переносится энергия** колебательного движения.



В случае **стоячей волны переноса энергии нет**, т.к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях

Энергия одной частицы волны массой *m*

$$W_1 = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$$