Задания С2

Методы решения задач

1. Поэтапно-вычислительный метод
2. Координатный метод
3. Координатно-векторный метод
4. Векторный метод
5. Метод объемов
6. Метод ключевых задач

Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле

$$\rho(A;B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ ,$$ где

$A(x_1;y_1;z_1),\ \ B(x_2;y_2;z_2)$;

3) по формуле $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Пример 1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \frac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.

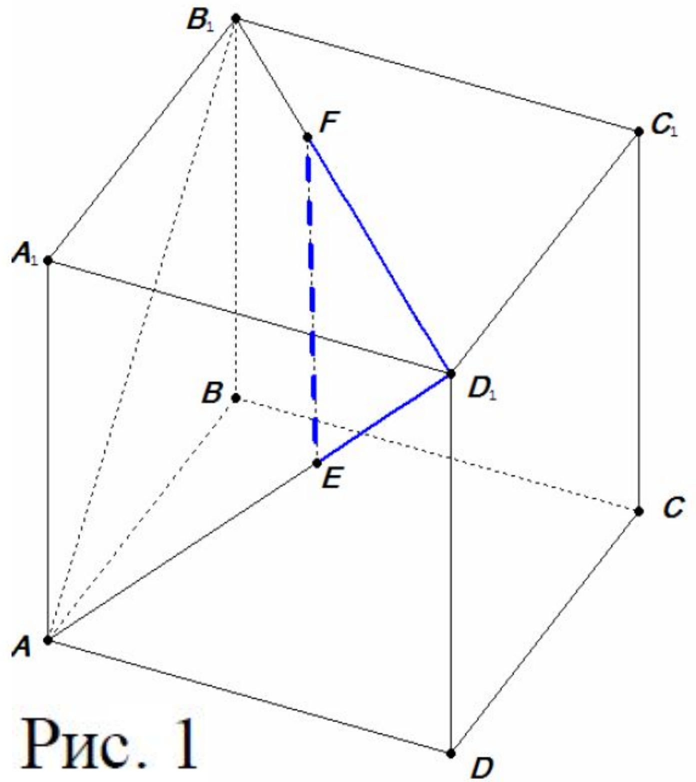


Рис. 1

Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника D_1EF (рис. 1), в котором $D_1F = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $D_1E = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\angle FD_1E = \frac{\pi}{3}$ (треугольник AB_1D_1 является равносторонним). Имеем

$$EF^2 = D_1E^2 + D_1F^2 - 2D_1E \cdot D_1F \cdot \cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{8}{9} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } EF = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой можно вычислить:

1) как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот;
2) используя векторный метод;
3) используя координатно-векторный метод.

Пример 2. При условиях примера 1 найдите расстояние от точки D_1 до прямой EF.

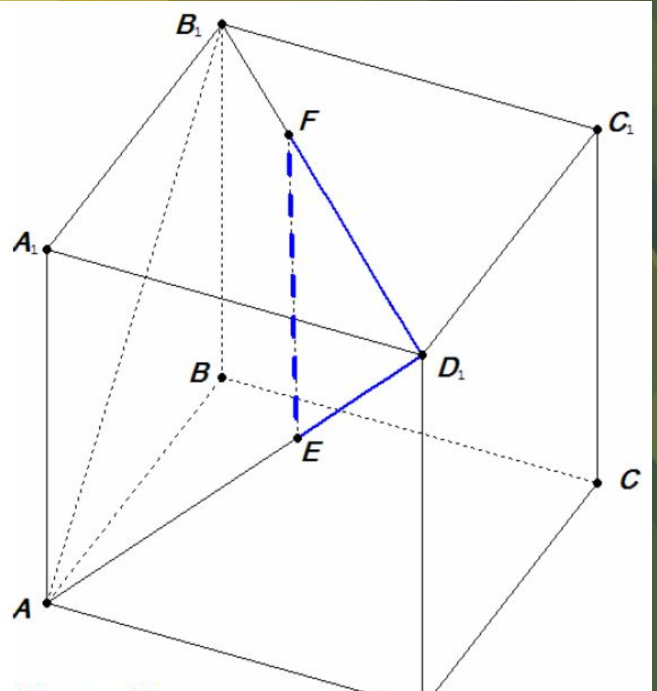


Рис. 2

Решение. Пусть h – длина высоты треугольника D_1EF, опущенной из точки D_1. Найдем h, используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}D_1F \cdot D_1E \cdot \sin\angle FD_1E =$ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$. С другой стороны площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}FE \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{6}h$. Из уравнения $\frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{6}h$ находим искомое расстояние $h = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2 + D_1E^2 = D_1F^2$, то есть треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Расстояние от точки до плоскости

- *Расстояние от точки до плоскости*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.
- *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью* равно длине их общего перпендикуляра.
- *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью* равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.
- *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно длине их общего перпендикуляра.
- *Расстояние между двумя параллельными плоскостями* равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки M до плоскости α

1) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α;

2) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на плоскости β, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α;

3) вычисляется по формуле $\rho = \rho_1 \frac{r}{r_1}$, где

$\rho = \rho(M;\alpha)$, $\rho_1 = \rho(M_1;\alpha)$, $OM = r$, $OM_1 = r_1$, $MM_1 \cap \alpha = O$; в частности, $\rho = \rho_1$, если $r = r_1$:

прямая m, проходящая через точку M, пересекает плоскость α в точке O, а точка M_1 лежит на прямой m;

4) вычисляется по формуле

$\rho(M;\alpha) = \rho(M;ABC) = \frac{3V_{ABCM}}{S_{ABC}}$, где треугольник ABC расположен на плоскости α, а объем пирамиды $ABCM$ равен V_{ABCM};

5) вычисляется по формуле

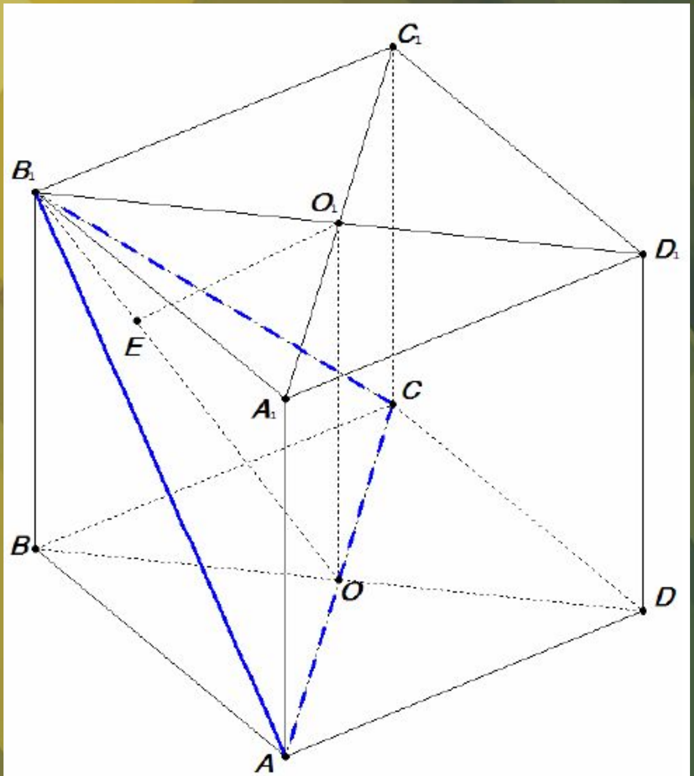
$\rho(M;\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где

$M(x_0;y_0;z_0)$, плоскость α задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$;

6) находится с помощью векторного метода;

7) находится с помощью координатно-векторного метода.

Пример 3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C.



Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую B_1O, где O – центр квадрата $ABCD$. Прямая O_1E лежит в плоскости BB_1D_1D, а прямая AC перпендикулярна этой плоскости. Поэтому $O_1E \perp AC$ и O_1E - перпендикуляр к плоскости AB_1C, а $O_1E = h$.

Так как $B_1O_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1O = 1$, то $OB_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2} + 1} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Выражая двумя способами площадь треугольника B_1O_1O, получим $h \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1$, откуда $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между скрещивающимися прямыми
1) равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой;
2) равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые;
3) равно $\rho(a;b)=\rho(A;b_1)$, где $A=a_\alpha$, $b_1=b_\alpha$: если ортогональная проекция на плоскость α переводит прямую a в точку A, а прямую b в прямую b_1, то расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от точки A до прямой b_1;
4) вычисляется по формуле $\rho(AB;CD)=\dfrac{6V_{ABCD}}{AB\cdot CD\cdot\sin\varphi}$ где A и B – точки на одной прямой, C и D – точки на другой прямой, φ - угол между данными прямыми;
5) определяется с помощью векторного метода;
6) определяется с помощью координатно-векторного метода.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и SA.

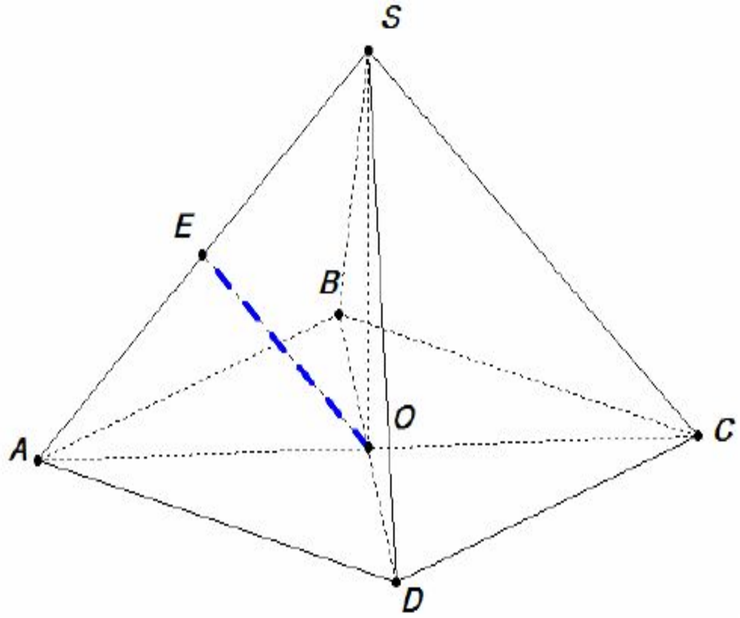


Рис. 3

Решение. Пусть E – основание перпендикуляра (рис. 3), опущенного из точки O на ребро SA. Так как прямая BD перпендикулярна плоскости AOS, то $BD \perp OE$.

Таким образом, OE – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым BD и SA.

Найдем его длину, вычислив двумя способами площадь треугольника AOS.

Из равенства $AO \cdot SO = AS \cdot OE$, где $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AS = 1$, $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следует, что $OE = \frac{1}{2}$.

Угол между двумя прямыми

- *Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
- $0^\circ < \angle(a;b) \le 90^\circ$.
- *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.
- Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.
- *Угол между параллельными прямыми* считается равным нулю.

Угол между двумя прямыми

- При нахождении угла между прямыми используют:

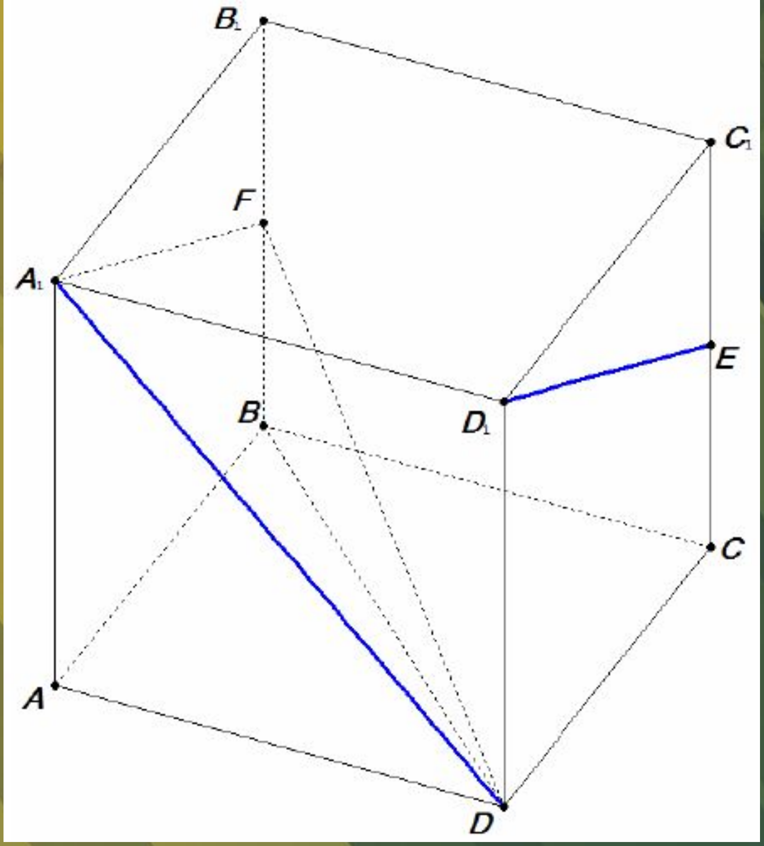
1) формулу $\cos\varphi = \dfrac{\left|b^2 + c^2 - a^2\right|}{2bc}$ для нахождения угла φ между прямыми m и l, если стороны a и b треугольника ABC соответственно параллельны этим прямым;

2) формулу $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overline{p}\cdot\overline{q}\right|}{\left|\overline{p}\right|\cdot\left|\overline{q}\right|}$ или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

для нахождения угла φ между прямыми m и l, если векторы $\overline{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{q}(x_2; y_2; z_2)$ параллельны соответственно этим прямым; в частности, для того чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{p}\cdot\overline{q} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$;

Пример 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1D и D_1E, где E – середина ребра CC_1.



Решение. Пусть F – середина ребра BB_1, a – ребро куба, φ - искомый угол.

Так как $A_1F \parallel D_1E$, то φ - угол при вершине A_1 в треугольнике A_1FD.

Из треугольника BFD имеем

$FD^2 = BD^2 + BF^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$, а из треугольника A_1B_1F получаем

$A_1F^2 = A_1B_1^2 + B_1F^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, откуда

$A_1F = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Далее в треугольнике A_1FD используем теорему косинусов

$FD^2 = A_1D^2 + A_1F^2 - 2A_1D \cdot A_1F\cos\varphi$,

$\frac{9a^2}{4} = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} - 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}\cos\varphi$, откуда

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Угол между прямой и плоскостью

- *Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой* называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
- $0^\circ < \angle(a;\alpha) < 90^\circ$.
- Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°.
- Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0°.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить:

1) если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов;

2) по формуле $\sin\varphi = \sin\angle(l;\alpha) = \dfrac{\rho(M;\alpha)}{AM}$, где $M \in l$, $l \cap \alpha = A$;

3) по формуле $\sin\varphi = \dfrac{\left|\overline{n}\cdot\overline{p}\right|}{\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{p}\right|}$ или в координатной форме

$$\sin\varphi = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$ где

$\overline{n}(x_1;y_1;z_1)$ - вектор нормали плоскости α,

$\overline{p}(x_2;y_2;z_2)$ - направляющий вектор прямой l;

- прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$;

4) используя векторный метод;

5) используя координатно-векторный метод;

Пример 6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

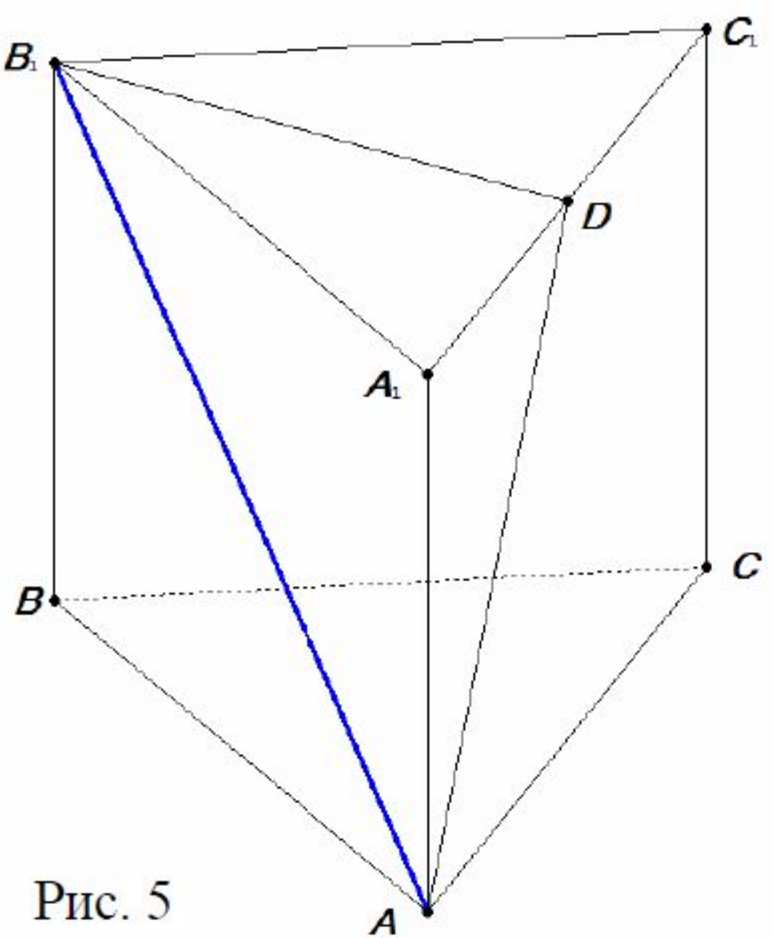


Рис. 5

Решение. Пусть D – середина A_1C_1, тогда B_1D - перпендикуляр к плоскости AA_1C_1C, а D – проекция точки B_1 на эту плоскость (рис. 5).

Если φ - искомый угол, то $\sin\varphi = \dfrac{B_1D}{AB_1}$, где $AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1D = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, и поэтому $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$, $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Угол между плоскостями

- *Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.*
- *Величина двугранного угла принадлежит промежутку* $\left(0^\circ;180^\circ\right)$.
- *Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку* $\left(0^\circ;90^\circ\right]$.
- *Угол между двумя параллельными плоскостями* считается равным 0°.

Угол между плоскостями

Угол между пересекающимися плоскостями можно вычислить:

1) как угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;

2) как угол треугольника, если удается включить линейный угол в некоторый треугольник;

3) по формуле $\sin\angle(\alpha;\beta)=\dfrac{\rho(M;\beta)}{\rho(M;l)}$, где $M\in\alpha;\ \ \alpha\cap\beta=l$;

4) по формуле $\cos\angle(\alpha;\beta)=\dfrac{S'}{S}$, где S – площадь фигуры Φ, расположенной в плоскости α, S' - площадь проекции фигуры Φ на плоскость β;

5) как угол между перпендикулярными им прямыми;

6) по формуле $\cos\angle(\alpha;\beta)=\dfrac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}$ или в координатной форме $\cos\angle(\alpha;\beta)=$

$$=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

где $\overline{n_1}(A_1;B_1;C_1)$ - вектор нормали плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\overline{n_2}(A_2;B_2;C_2)$ - вектор нормали плоскости $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$;

7) используя ключевые задачи.

Пример 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол между основанием и боковой гранью.

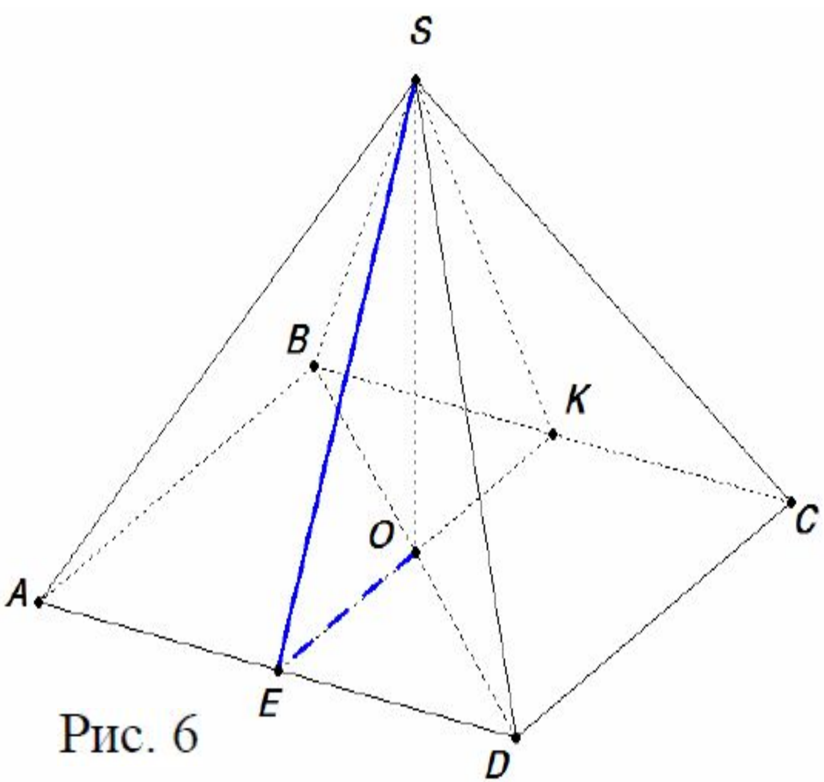


Рис. 6

Решение. Пусть E и K – середины ребер AD и BC соответственно, O – центр основания $ABCD$ (рис. 6). Тогда $SE \perp AD$, $EK \perp AD$ и поэтому $\angle SEK = \varphi$ - линейный угол данного двугранного угла.

Так как $AD = 1$, $OE = \dfrac{1}{2}$, $SD = 1$, то

$$SE = \sqrt{SD^2 - ED^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{OE}{SE} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Координатный метод

Для применения пространственного метода координат требуется:

- Знание определённых формул
- Умение вычислять координаты вершин многогранников и точек, расположенных на их рёбрах и гранях
- Умение составлять уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Координатный метод

1. Угол между прямыми. Вектор $\vec{a}\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$ лежит на прямой a, вектор $\vec{b}\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$ лежит на прямой b. Косинус угла φ между прямыми a и b определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (1)$$

($\cos\varphi \geq 0$, так как угол φ — острый).

2. Угол между прямой и плоскостью. Прямая l образует с плоскостью α угол φ ($\varphi \leq 90°$). Вектор $\vec{l}\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$ — направляющий вектор прямой l. Плоскость α задана уравнением

$$ax + by + cz + d = 0,$$

и $\vec{n}(a;\, b;\, c)$ — вектор нормали. Синус угла φ определяется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot a + y_1 \cdot b + z_1 \cdot c|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (2)$$

3. Угол между двумя плоскостями. Плоскость α задана уравнением $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$, и ее вектор нормали $\vec{n}_\alpha\,(a_1;\, b_1;\, c_1)$; плоскость β задана уравнением $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$, ее вектор нормали $\vec{n}_\beta\,(a_2;\, b_2;\, c_2)$. Для угла φ между плоскостями α и β справедлива формула

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \qquad (3)$$

($\cos\varphi \geq 0$, так как угол φ — острый).

Координатный метод

4. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние h от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, определяется по формуле

$$h = \frac{\left| a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (4)$$

5. Деление отрезка в заданном отношении. Пусть точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ являются концами отрезка AB и точка C делит его так, что $AC : CB = m : n$. Тогда координаты точки C вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{n \cdot x_1 + m \cdot x_2}{m+n}; \quad y_0 = \frac{n \cdot y_1 + m \cdot y_2}{m+n}; \quad z_0 = \frac{n \cdot z_1 + m \cdot z_2}{m+n}. \qquad (5)$$

6. Расстояние между двумя точками. Расстояние d между двумя точками, $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, равно

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координатный метод

Пусть в некоторой плоскости даны два неколлинеарных вектора

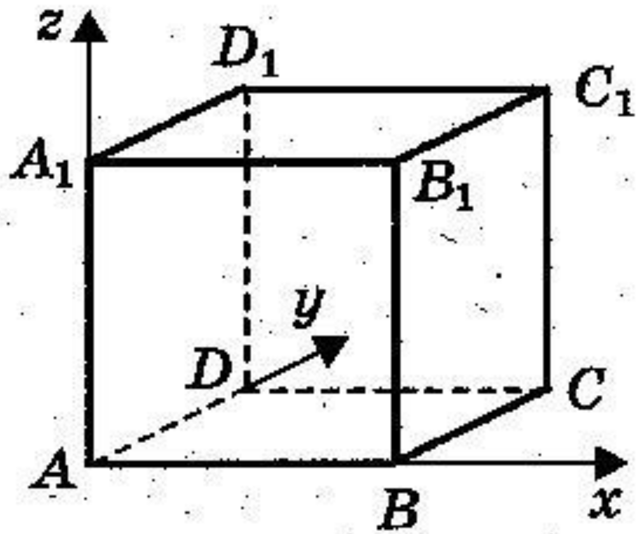
$$\vec{v}_1(x_1;\ y_1;\ z_1) \text{ и } \vec{v}_2(x_2;\ y_2;\ z_2).$$

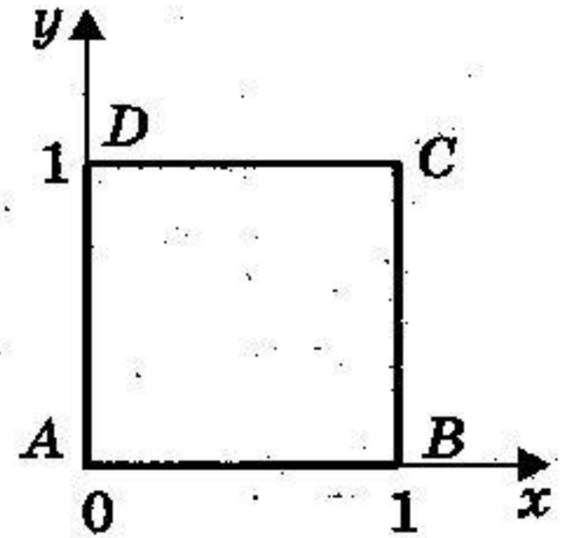
Тогда вектор нормали к этой плоскости задается формулой

$$\vec{n}(y_1 z_2 - z_1 y_2;\ z_1 x_2 - x_1 z_2;\ x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Координатный метод

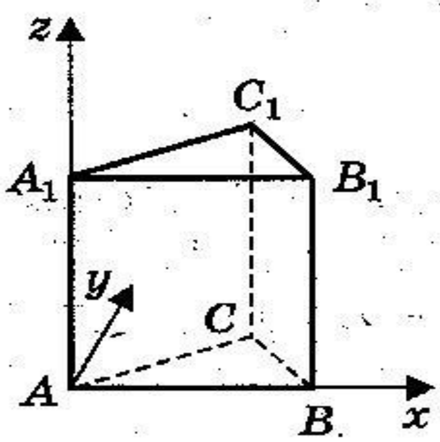
1. **Единичный куб** $A...D_1$. Начало координат — в точке A; прямая AB — ось x, прямая AD — ось y, прямая AA_1 — ось z. Тогда вершины куба имеют координаты: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$, $D_1(0; 1; 1)$.

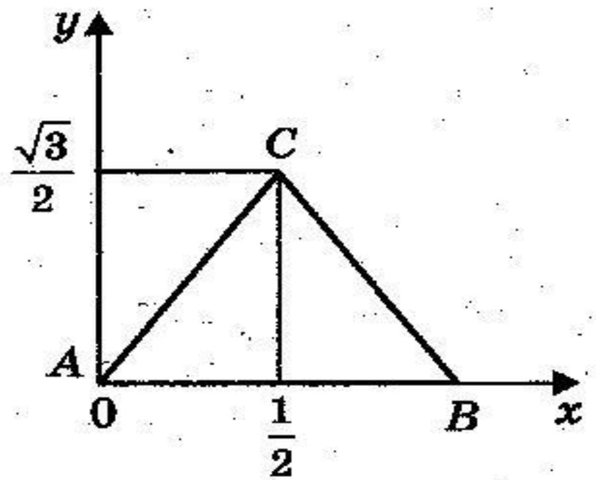




Координатный метод

2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1. Начало координат — в точке A; прямая AB — ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB, — ось y; прямая AA_1 — ось z. Тогда вершины призмы имеют координаты: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A_1(0;\ 0;\ 1)$, $B_1(1;\ 0;\ 1)$, $C_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.



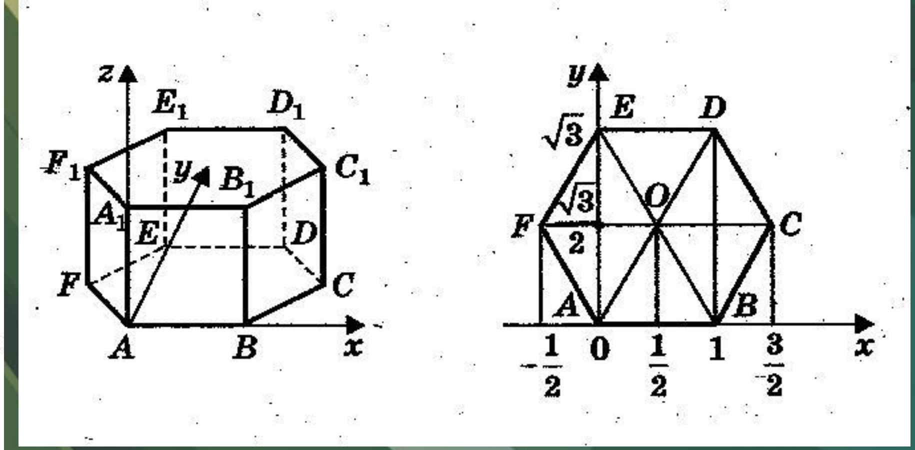


Координатный метод

3. Правильная шестиугольная призма $A...F_1$, все ребра которой равны 1. Начало координат — в точке A; прямая AB — ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB, — ось y; прямая AA_1 — ось z. Тогда вершины призмы имеют координаты: $A(0;\,0;\,0)$, $B(1;\,0;\,0)$, $C\left(\frac{3}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2};\,0\right)$, $D\left(1;\,\sqrt{3};\,0\right)$, $E\left(0;\,\sqrt{3};\,0\right)$, $F\left(-\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2};\,0\right)$, $A_1(0;0;1)$, $B_1(1;0;1)$, $C_1\left(\frac{3}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2};\,1\right)$, $D_1\left(1;\,\sqrt{3};\,1\right)$, $E_1\left(0;\,\sqrt{3};\,1\right)$, $F_1\left(-\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2};\,1\right)$.

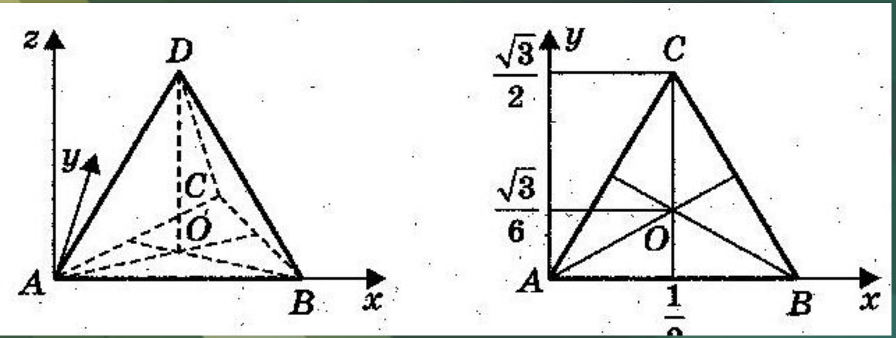
На выносном чертеже основания $AD = BE = CF = 2R = 2$; R — радиус окружности, описанной вокруг правильного шестиугольника; $R = 1$;

$AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{3}.$



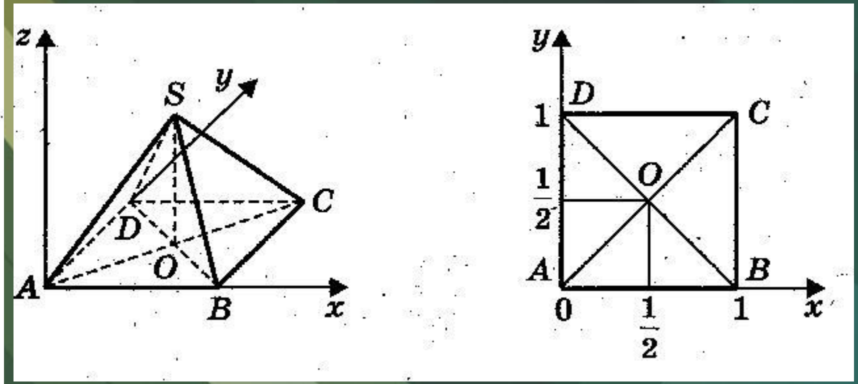
Координатный метод

4. Правильная треугольная пирамида (тетраэдр) $ABCD$, все ребра которой равны 1. Начало координат — в точке A; прямая AB — ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB, — ось y; прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC, — ось z. Тогда вершины тетраэдра имеют координаты: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Точка D проектируется в точку O — точку пересечения медиан треугольника ABC, которая делит медианы в отношении $2:1$, считая от вершин треугольника. Высота тетраэдра DO выражается из прямоугольного треугольника AOD: $DA = 1$, $AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $DO = \sqrt{DA^2 - AO^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



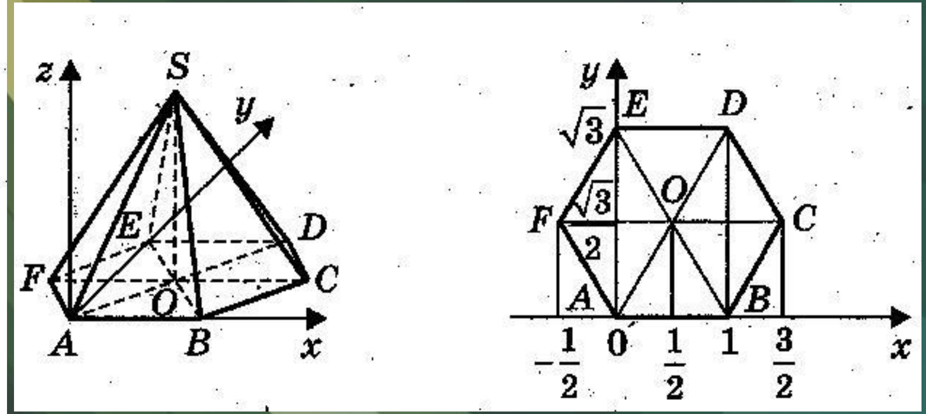
Координатный метод

5. Правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, все ребра которой равны 1. Начало координат — в точке A; прямая AB — ось x; прямая AD — ось y; прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC, — ось z. Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Точка S проектируется на плоскость ABC в точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ — точку O. Высота пирамиды SO выражается из прямоугольного треугольника AOS: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}$, $SA=1$, $AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $SO=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Координатный метод

6. Правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2. Начало координат — в точке A; прямая AB — ось x; прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB, — ось y; прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC, — ось z. Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $D\left(1; \sqrt{3}; 0\right)$, $E\left(0; \sqrt{3}; 0\right)$, $F\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Точка S проектируется на плоскость ABC в точку O — точку пересечения диагоналей шестиугольника $ABCDEF$. Высота пирамиды SO выражается из прямоугольного треугольника AOS: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$, $SA = 2$, $AO = 1$, $SO = \sqrt{3}$.



Пример 8. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K - середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найдите расстояние между точками Q и L, где Q – середина отрезка EM, а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 7. Тогда $E\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$, $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $B_1(0;1;1)$, $D_1(1;0;1)$. Для нахождения координат точки M используем формулу координат точки, делящей отрезок B_1D_1 в отношении 2:1. Имеем $M\left(\frac{0+2\cdot 1}{1+2};\frac{1+2\cdot 0}{1+2};\frac{1+2\cdot 1}{1+2}\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1\right)$. Аналогично получим координаты точки L, делящей отрезок MK в отношении 2:1. Имеем $L\left(\frac{\frac{2}{3}+2\cdot 1}{1+2};\frac{\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2};\frac{1+2\cdot 0}{1+2}\right)=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right)$. Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому

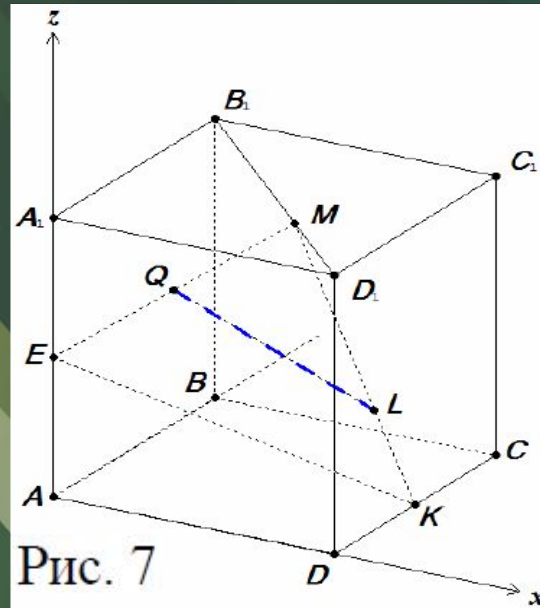


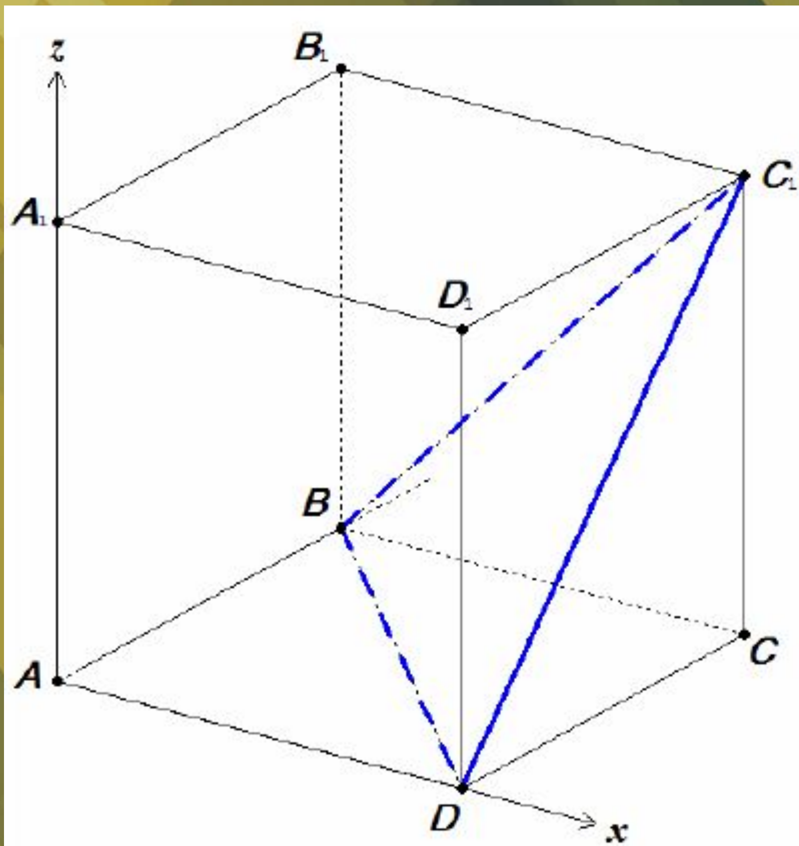
Рис. 7

$Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right)$. Применим формулу для расстояния между точками с заданными координатами

$$QL=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{725}{36^2}}=\frac{5\sqrt{29}}{36}.$$

Пример 9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1.



Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$ и $C_1(1;1;1)$. Для этого подставим координаты этих точек в общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} B+D=0 \\ A+D=0 \\ A+B+C+D=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} B=-D \\ A=-D \\ C=D \end{cases}$$

Отсюда находим уравнение $-Dx-Dy+Dz+D=0$ или $x+y-z-1=0$. По формуле находим расстояние от точки $A_1(0;0;1)$ до плоскости $\beta = BDC_1$:

$$\rho(A_1;\beta)=\frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Координатно-векторный метод

Пример 10. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1.

Пусть EF – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD_1 и AB_1, то есть $EF \perp AB_1$, $EF \perp BD_1$, причем $E \in AB_1$ и $F \in BD_1$. Обозначим $\lambda = \dfrac{AE}{B_1E}$, $\mu = \dfrac{BF}{D_1F}$ и воспользуемся формулами для координат точки, которая делит данный отрезок в заданном отношении. Получим $E\left(0; \dfrac{\lambda}{1+\lambda}; \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, $F\left(\dfrac{\mu}{1+\mu}; \dfrac{1}{1+\mu}; \dfrac{\mu}{1+\mu}\right)$.

Пусть $\dfrac{\lambda}{1+\lambda} = p$, $\dfrac{\mu}{1+\mu} = q$, тогда $E(0; p; p)$, $F(q; 1-q; q)$. Так как вектор $\overline{EF} = (q;\ 1-q-p;\ q-p)$ должен быть перпендикулярным векторам $\overline{AB_1} = (0;1;1)$ и $\overline{BD_1} = (1; -1;\ 1)$, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{AB_1} \cdot \overline{EF} = 0 \\ \overline{BD_1} \cdot \overline{EF} = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1-q-p+q-p=0 \\ q-1+q+p+q-p=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

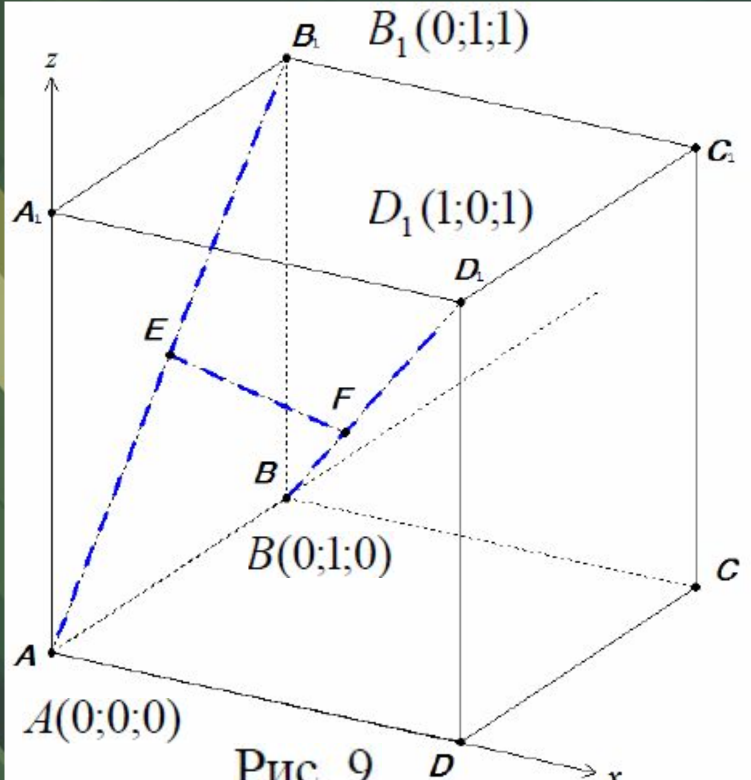


Рис. 9

$$\begin{cases} p = \dfrac{1}{2} \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Отсюда $\overline{EF} = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{6}\right)$,

$$EF = \left|\overline{EF}\right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Пример 11. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AE и DF, где E и F – точки, расположенные на ребрах CD и C_1D_1 так, что $DE = \frac{1}{3}DC$, $C_1F = \frac{1}{3}C_1D_1$.

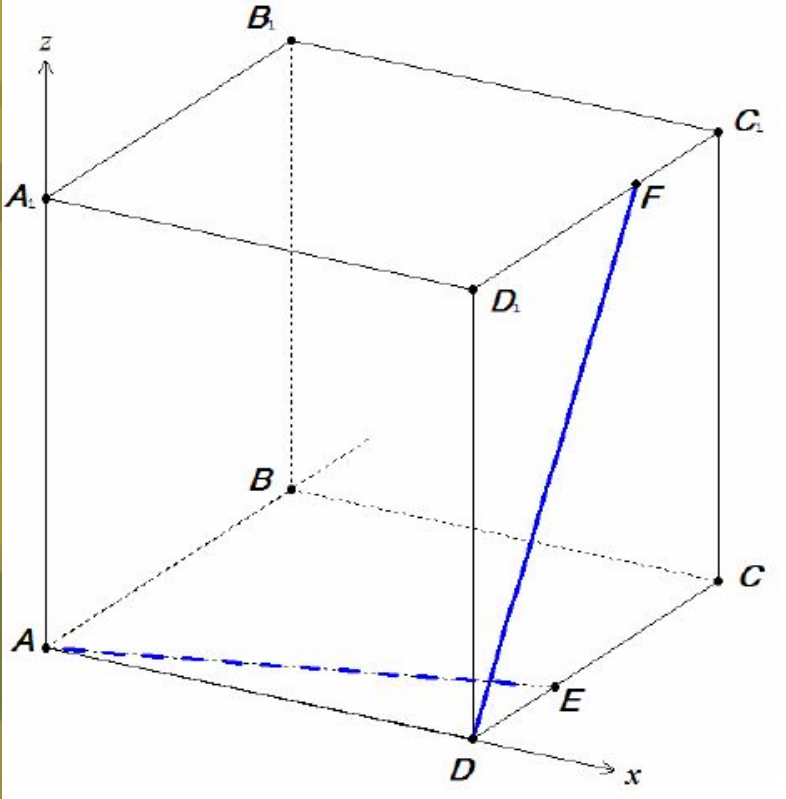


Рис. 10

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 10. Тогда

$A(0;0;0)$, $D(1;0;0)$, $E\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $F\left(1;\frac{2}{3};1\right)$,

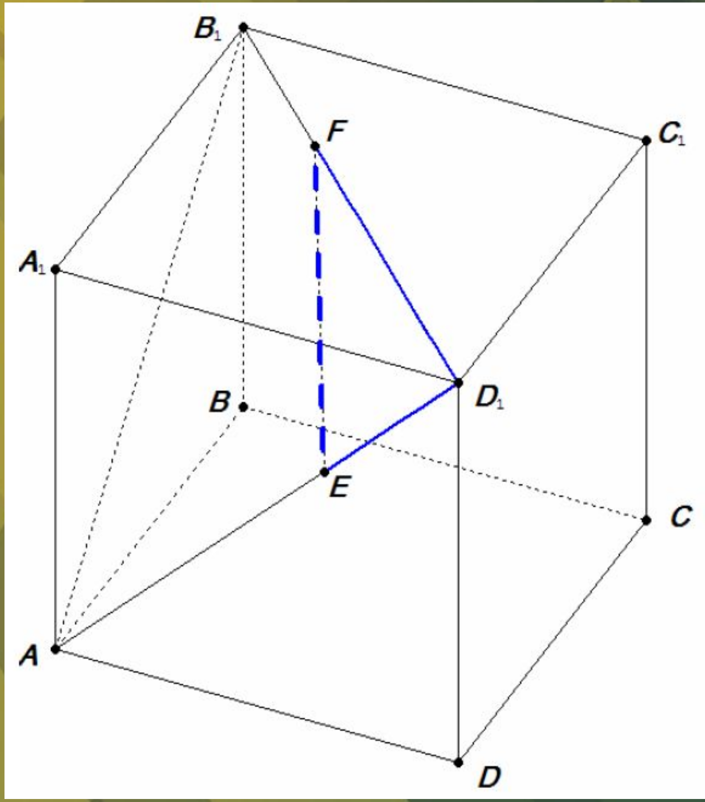
$\overline{AE} = \left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $\overline{DF} = \left(0;\frac{2}{3};1\right)$,

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overline{AE}\cdot\overline{DF}\right|}{\left|\overline{AE}\right|\cdot\left|\overline{DF}\right|} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{130}},$$

$\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{130}}$, где α - искомый угол.

Векторный метод

Пример 15. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \frac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.



Решение. Пусть $\overline{AD} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AA_1} = \overline{c}$ (рис. 1), тогда $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$, $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot\overline{c} = \overline{b}\cdot\overline{c} = 0$.

Выразим вектор $\overline{FE}$ через базисные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$:

$$\overline{FE} = \overline{EA} + \overline{AB_1} + \overline{B_1F} = -\frac{2}{3}(\overline{a}+\overline{c}) + (\overline{b}+\overline{c}) + \frac{1}{3}(\overline{a}-\overline{b}) =$$

$$= -\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}.$$ Тогда

$$|\overline{FE}| = \sqrt{\overline{FE}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Метод объёмов

- При составлении уравнения используется объем фигуры, выраженный двумя независимыми способами.

Метод объёмов

Пример 22. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние от точки C до плоскости BDC_1.

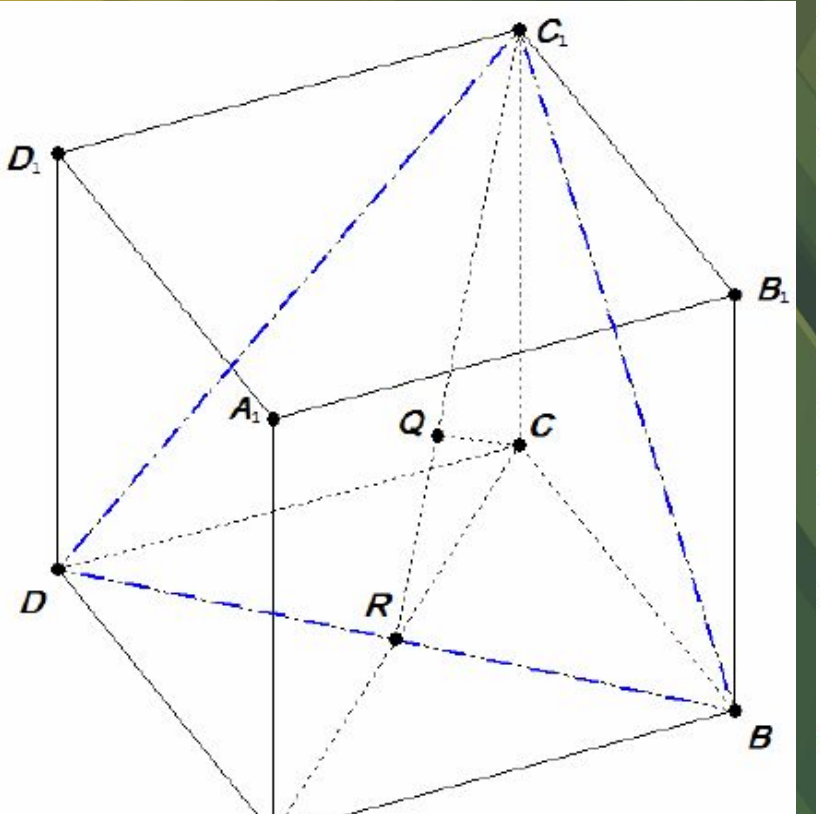


Рис. 19

Решение. Искомое расстояние x равно высоте CQ (рис. 19), опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1.

Объем этой пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot CC_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD\cdot CC_1=\frac{a^3}{6}$. С другой стороны, так как треугольник BDC_1 равносторонний со стороной $a\sqrt{2}$, объем пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{BC_1D}\cdot CQ=\frac{1}{3}\cdot\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot x=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot x$. Отсюда получаем уравнение $\frac{a^3}{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot x$, из которого находим $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Метод ключевых задач

Ключевая задача № 1

• Если S – площадь фигуры Φ, расположенной в плоскости α , S' - площадь проекции фигуры Φ на плоскость β, то справедлива формула $\cos\angle(\alpha;\beta)=\dfrac{S'}{S}$.

Ключевая задача № 2 (теорема о трех синусах)

• Пусть в одной из граней двугранного угла, величина которого равна α, проведена прямая, составляющая с ребром двугранного угла угол β ($0^\circ<\beta<90^\circ$), γ - величина угла между этой прямой и другой гранью. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta .$$

Метод ключевых задач

Ключевая задача № 3 (теорема о трех косинусах)

• Пусть α - величина угла между наклонной l и ее проекцией на некоторую плоскость, β - величина угла между проекцией наклонной l и прямой, проведенной через основание той же наклонной в плоскости проекции, и γ - величина угла между наклонной l и прямой, проведенной через ее основание в плоскости проекции. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta .$$

Ключевая задача № 4 (теорема косинусов для трехгранного угла)

• Пусть для трехгранного угла плоские углы равны α, β и γ и двугранный угол при ребре, противолежащий плоскому углу γ, равен φ. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} .$$

Метод ключевых задач

Ключевая задача № 5

• Если некоторая прямая образует углы α, β и γ с тремя попарно перпендикулярными прямыми, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Ключевая задача № 6

• Если AB и CD – скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды $ABCD$, r – расстояние между ними, $AB = a$, $CD = b$, φ - угол между AB и CD, V – объем пирамиды $ABCD$, то

$$r = \frac{6V}{ab\sin\varphi}.$$

Пример 26. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и DM, где M – середина ребра D_1C_1.

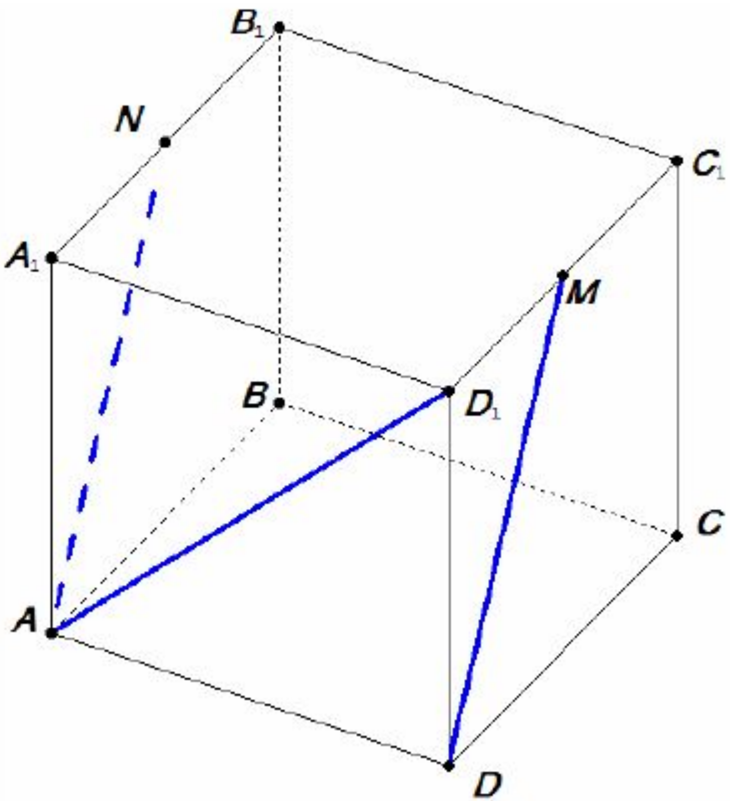


Рис. 22

Решение. Пусть ребро куба равно 1, N – середина ребра A_1B_1, тогда искомый угол γ равен углу между AD_1 и AN (рис. 22). Используем теорему косинусов для трехгранного угла с вершиной A, в котором $\angle A_1AD_1 = \alpha$, $\angle A_1AN = \beta$, $\angle NAD_1 = \gamma$. Так как $\varphi = 90^\circ$, то имеем $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Из треугольника A_1AD_1 находим $\cos\alpha = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, из треугольника A_1AN получаем $\cos\beta = \dfrac{AA_1}{AN} = 1 : \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Отсюда

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}},\ \gamma = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Литература

1. Смирнов В.А. Геометрия. Стереометрия: Пособие для подготовки к ЕГЭ/ под ред. А.Н. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2009
2. Газета «Математика – ПС», 2010 г., №8, №20
3. Материалы сети Internet: Корянов А.Г., г. Брянск «Математика ЕГЭ 2010. Задания С1 и С2».