

**Московский государственный университет путей
сообщения**

Лекция №11

**Математические модели
сейсмоизолирующих устройств**

Курбацкий Евгений Николаевич

профессор кафедры “Мосты и тоннели”,

д.т.н.



Линейная математическая модель резинометаллических опорных частей из натуральной и синтетической резины

Линейное поведение резинометаллических опорных частей моделируется линейной пружиной с постоянной эффективной жёсткостью и линейным демпфером с постоянным коэффициентом демпфирования .



Расчёт на сейсмические воздействия должен выполняться для трех ортогональных (двух горизонтальных и одного вертикального) компонентов движений при землетрясениях.

Ортогональные оси должны, в целом, совпадать с главными осями конструкции.



1. Динамический метод расчёта во времени

Общие требования

(а) Динамический расчёт конструкций, подверженных динамическим сейсмическим воздействиям, может быть выполнен с использованием как линейного, так и нелинейного методов.

Динамические расчёты при использовании любого из выше указанных методов основываются на решении системы совместных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями и силами.



В случаях, когда в качестве исходных данных используется два или несколько уравнений движения одной и той же опоры, результаты расчёта должны быть усреднены как в линейном, так и в нелинейном решении.

Временной шаг (ΔT) при получении решения для точного определения действующих динамических сил и для обеспечения стабильности и устойчивости решения должен быть достаточно малым.



Приемлемым правилом является допущение о том, что шаг ΔT должен быть настолько малым, что использование шага, равного $\frac{1}{2} \Delta T$, не изменит реакцию более, чем на 10%.

Для наиболее часто применяемых методов значения ΔT приведены в Таблице 11.1

Метод	Доля от наименьшего, представляющего интерес периода
Houbolt (Хуболт)	1/15
Newmark (Ньюмарк)	1/10
Wilson (Вильсон)	1/10
Nigam-Jennings (Нигам-Дженингс)	1/5

1.1 Линейные системы

(а) Реакция линейной системы с конечным числом степеней свободы, подверженная сейсмическому воздействию, определяется следующим дифференциальным уравнением движения:

$$[M]\{\dot{X}\} + [C]\{X\} + [K]\{X\} = -[M]\{U_b\}\dot{u}_g \quad [11.1]$$

$[M]$ - матрица масс ($n \times n$); $[C]$ - матрица демпфирования ($n \times n$);

$[K]$ - матрица жесткости ($n \times n$);

$\{X\}$ = вектор столбец относительных смещений ($n \times 1$);

$\{\dot{X}\}$ - вектор столбец относительных скоростей ($n \times 1$);

$\{\ddot{X}\}$ - вектор столбец относительных ускорений ($n \times 1$);

$\{U_b\}$ - вектор влияния; вектор смещения точек конструкции при перемещении опоры на единицу длины в направлении сейсмического движения ($n \times 1$);

n - число динамических степеней свободы;

\dot{u}_g - ускорение грунта;

Уравнение (11.1) может быть решено методом разложения по собственным векторам или методом прямого интегрирования уравнений движения

Разложение по собственным векторам (Метод модальной суперпозиции)

Метод разложения по собственным формам может быть использован в случаях, когда уравнения движения (Уравнения 11.1) могут быть разделены на независимые уравнения путём преобразования:

$$\{Y\} = [\Phi]\{X\} \quad (11.22)$$

где

$[\Phi]$ - нормированная матрица форм колебаний;

$[\Phi]^T [M][\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ - единичная матрица размера $(m \times m)$;

$\{Y\}$ = вектор нормальных или обобщенных координат $(m \times 1)$;

Преобразование системы уравнений (11.2)

разделит уравнения движения на независимые уравнения в тех случаях, когда величины $\{\Phi\}^T [C] \{\Phi_j\}$, $i \neq j$, являются малыми, и ими можно пренебречь.

Это приближение используется во многих практических случаях, включая механические системы с композитным демпфированием.

Если опыт показывает, что подобное приближение является неподходящим или желателен более точный анализ, может быть использован метод, который учитывает не классически демпфированные системы.



Независимое дифференциальное уравнение движения для каждой формы колебания может быть записано следующим образом:

$$\ddot{Y}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = -\Gamma_j \ddot{u}_k \quad (11.3)$$

где

Y_j - обобщенные координаты j - той формы колебаний;

ξ_j - коэффициент демпфирования для j - той формы колебаний, выраженный как часть критического демпфирования.

ω_j - круговая частота j - той формы колебания системы (rad/s);

Γ_j - модальный коэффициент участия для j - той формы колебания;



Дифференциальное уравнение колебаний
механической системы с одной степенью
свободы при сейсмическом воздействии
(см. лекцию №4)

$$\dot{m}u_a(t) + \dot{c}u_r(t) + ku_r(t) = 0$$

$$\dot{m}u_r(t) + \dot{c}u_r(t) + ku_r(t) = -\dot{m}u_g$$

$$\dot{u}_r(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}_r(t) + \omega_0^2u_r(t) = -\dot{u}_g$$

$$\ddot{Y}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j + \omega_j^2Y_j = -\Gamma_j\ddot{u}_k$$



Модальный коэффициент участия Γ_j j – той формы колебания определяется выражением:

$$\Gamma_j = \frac{\{\Phi_j\}^T [M] \{U_b\}}{\{\Phi_j\}^T [M] \{\Phi_j\}} = \{\Phi_j\}^T [M] \{U_b\} \quad (11.3)$$

(масса нормирована таким образом, чтобы знаменатель был равен единице)

Независимые дифференциальные уравнения движения, имеющие форму уравнений движения системы с одной степенью свободы, должны быть проинтегрированы с помощью проверенных и известных методик. Некоторые из них приведены в выше в Таблице 11.1.



Способы решения дифференциальных уравнений с использованием численных методов, которые легко реализуются в пакете программ Matlab:

- интеграл Дюамеля
- метод прямого (пошагового) интегрирования,
- θ -метод Вильсона,
- β -метод Ньюмарка,
- метод Рунге – Кутта,
- метод решения с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье



Прямое интегрирование

При определении решений уравнения

$$[M]\{\dot{X}\} + [C]\{X\} + [K]\{X\} = -[M]\{U_b\}\dot{u}_g$$

может быть использовано прямое интегрирование дифференциальных уравнений движения.

Используются как неявные, так и явные методы численного интегрирования.



Нелинейные методы

При выполнении нелинейных расчётов должны быть учтены следующие факторы:

1. Геометрические нелинейности, которые существенно изменяют геометрию системы - большие перемещения и значительные зазоры;

2. Нелинейные свойства материалов, такие как пластичность или трение, в диапазоне рассматриваемых реакций.

3. Прямое интегрирование и модальная суперпозиция (когда это возможно) являются приемлемыми методами для получения решения и для нелинейных систем.

Нелинейные расчёты должны, в основном, учитывать все три компоненты сейсмических движений, которые должны рассматриваться одновременно, если не может быть доказано, что реакции, соответствующие различным компонентам являются независимыми.

Вообще, должно быть использовано более одного набора акселерограмм, по результатам расчётов должно быть произведено усреднение.



11.2 Метод спектров ответа

Линейные методы

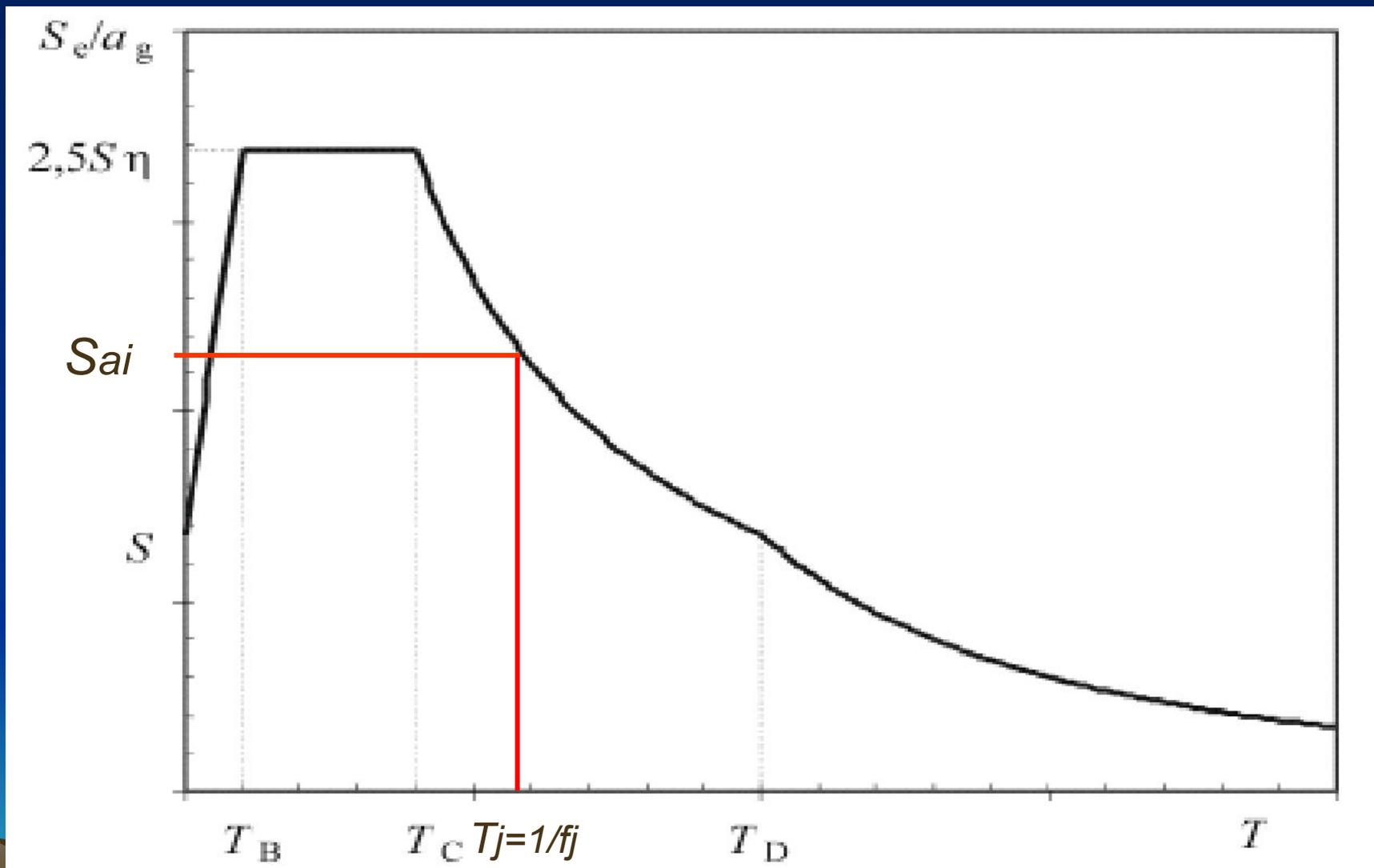
При использовании метода спектров ответа, основные уравнения движения должны быть разделены путём применения линейного преобразования координат (11.2) и представлены в виде независимых уравнений для каждой собственной формы колебаний (уравнения 11.3).

Обобщенная реакция, соответствующая каждой собственной форме колебаний, должна определяться из уравнения:

$$Y_j(\max) = \Gamma_j \left(\frac{S_{aj}}{\omega_j^2} \right); Y_j(\max) = \Gamma_j \left(\frac{S_{aj}}{(2\pi f_j)^2} \right) \quad (11.4)$$

где S_{aj} – амплитуда спектра ускорения, соответствующая частоте ω_j (f_j)

Спектры откликов EUROCODE 8



Максимальное перемещение i -го узла относительно основания, соответствующие j -той форме колебаний определяются из уравнения:

$$X_{ij}(\max) = \Phi_{ij} Y_j(\max) \quad (11.5)$$

При выполнении расчётов с использованием уравнений 11.4 и 11.5, а также при подсчете величин реакции, знак коэффициента участия формы Γ_j , максимальное значение обобщенной координаты $Y_i(\max)$, максимального смещение i -го узла по отношению к основанию, соответствующее j -ой форме колебаний $X_{ij}(\max)$, а также знаки величин других реакции должны быть учтены.



11.3 Метод комплексных спектров ответа

При использовании метода комплексных спектров ответа при расчёте на сейсмические воздействия, должны быть соблюдены следующие требования:

1. Временной интервал исходных уравнений движения должен быть подобран таким образом, чтобы сохранялось максимальное число частот, представляющих интерес.

2. Частотный интервал для определения передаточных функций должен быть выбран из расчёта точного представления передаточных функций на частотах, равных собственным частотам конструкции.



Метод комплексных спектров ответа (Продолжение)

3. Исходные сейсмические уравнения движения должны быть добавлены нулевыми отсчётами.

4. Зона нулевых отсчётов должна быть достаточно длинной, чтобы исключить влияние переходного процесса, т.е. для обеспечения нулевых начальных условий.



Метод комплексных спектров ответа (продолжение)

При использовании метода комплексных спектров ответа при расчёте на сейсмические воздействия, должны быть соблюдены следующие требования:

1. Временной интервал исходных уравнений движения должен быть подобран таким образом, чтобы сохранялось максимальное число частот, представляющих интерес.

2. Частотный интервал для определения передаточных функций должен быть выбран из расчёта точного представления передаточных функций на частотах, равных собственным частотам конструкции.

При использовании метода комплексных спектров ответа зависимость реакция от времени $R(t)$, определяется с использованием преобразования Фурье:

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

где $R(\omega)$ – реакция в области частот (комплексная реакция), определяемая следующим уравнением:

$$R(\omega) = T(\omega) \dot{u}_g(\omega)$$

где $T(\omega)$ - передаточная функция для конструкции при круговой частоте, равной ω ;

$\dot{u}_g(\omega)$ - преобразование Фурье функции, описывающей колебания грунта.

$$\dot{u}_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_g(t) e^{-i\omega t} dt$$


Передаточные функции перемещений $T(\omega_k)$, могут быть получены для каждой, представляющей интерес частоты, ω_k , путём решения уравнения:

$$[-(\omega_k)^2 M + i\omega_k C + K]\{T(\omega_k)\} = -MU_b$$

Передаточные функции можно так же получить, применив преобразование Фурье к дифференциальным уравнениям, полученным в результате разложения по собственным формам колебаний

$$\ddot{Y}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = -\Gamma_j \ddot{u}_k$$



Динамические степени свободы

Модель моста и выбранные динамические степени свободы должны адекватно представлять распределения жесткостей и масс таким образом, чтобы были учтены все существенные формы колебаний и силы инерции при расчетном сейсмическом воздействии.

В определенных случаях для анализа достаточно использовать две разные модели: одну для моделирования реакции моста в продольном направлении и одну для поперечного направления.

Модель отдельной мостовой опоры

В некоторых случаях сейсмическому воздействию в поперечном направлении моста противодействуют только мостовые опоры без существенного взаимодействия между собой.

В таких случаях, сейсмическая нагрузка, действующая на i -ую мостовую опору, может быть определена посредством приложения на нее эквивалентной статической силы:

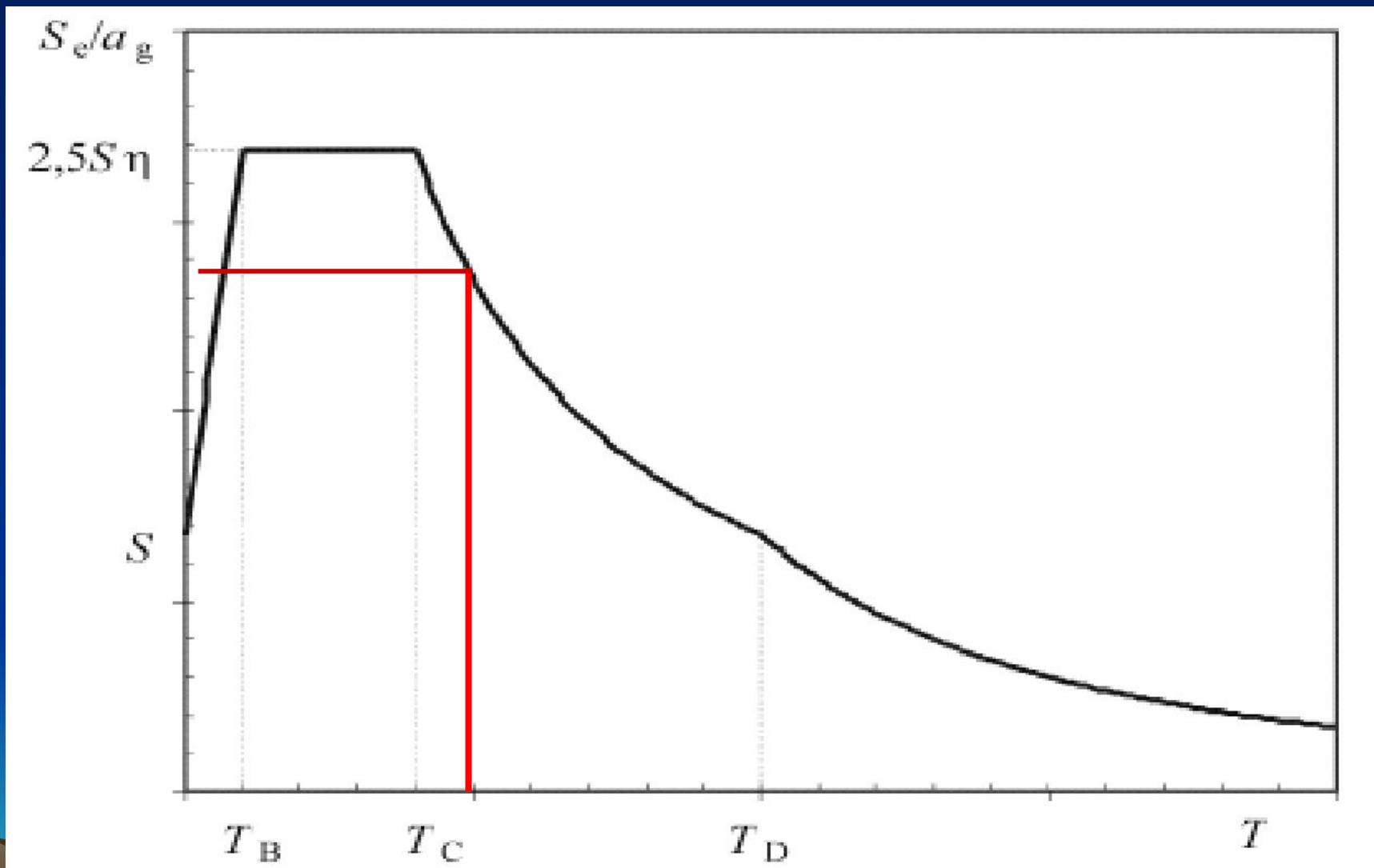
$$F = MS_d(T),$$

M_i — эффективная масса, приписываемая мостовой опоре i ,
период мостовой опоры, рассматриваемой независимо от остальной части моста.

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{M_i}{K_i}}$$

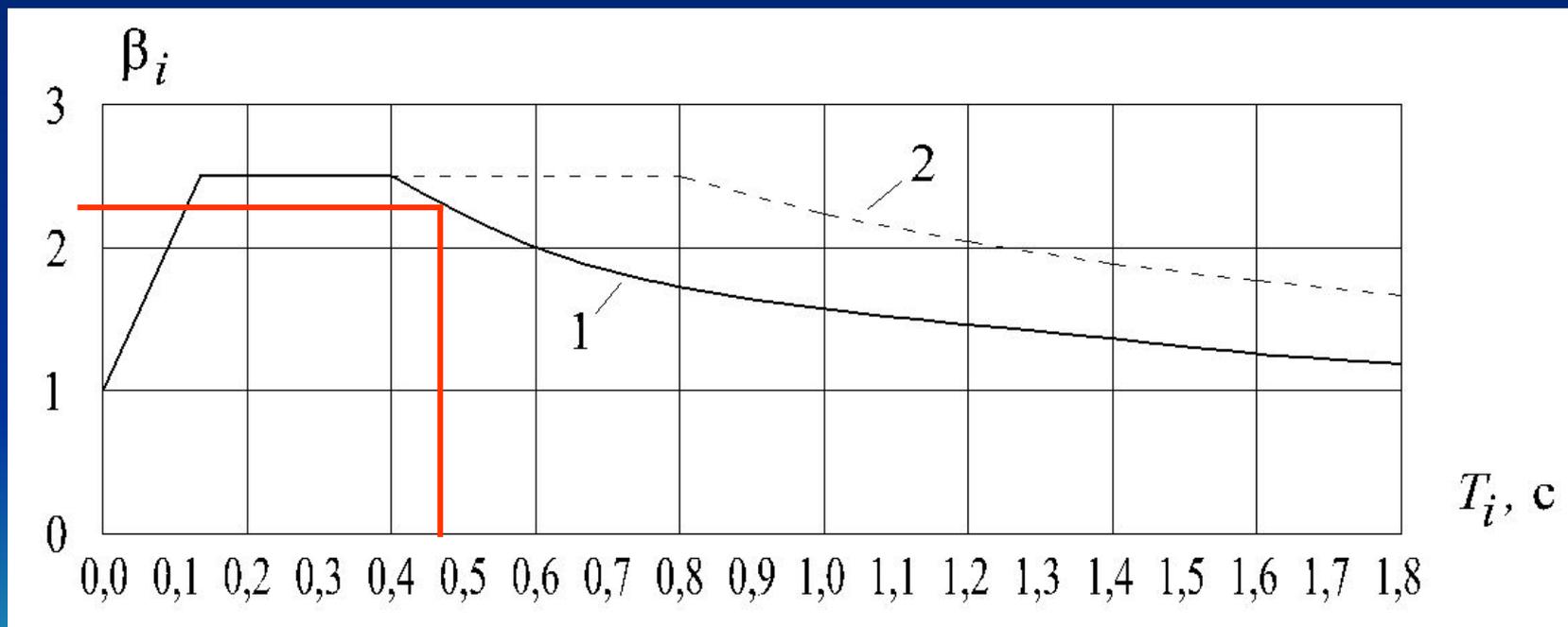


Спектры откликов EUROCODE 8



Значения коэффициента динамичности β_i
в зависимости от расчетного периода
собственных колебаний T_i здания или
сооружения по i -й форме

СП 14.13330.2012



12 Системы с многоточечными опираниями

Общие требования

Системы, опоры которых подвержены отличающимся воздействиям, расчёты могут осуществляться с помощью как динамического метода расчёта во времени, так и метода спектров отклика.

(а) дифференциальные уравнения движения одноопорной системы

$$[M]\{\dot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = -[M]\{U_b\}\dot{u}_g \quad (11.1)$$

(б) дифференциальные уравнения движения многоопорных системы

$$[M]\{\dot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = -\sum_{s=1}^{ns} [M]\{U_{bs}\}\dot{u}_s \quad (12.1)$$

$[M]$ - матрица масс ($n \times n$); $[C]$ - матрица демпфирования ($n \times n$);

$[K]$ - матрица жесткости ($n \times n$);

$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix}$ - вектор столбец относительных смещений ($n \times 1$);

$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X} \end{Bmatrix}$ - вектор столбец относительных скоростей ($n \times 1$);

$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \ddot{X} \end{Bmatrix}$ - вектор столбец относительных ускорений ($n \times 1$);

$\{U_{bs}\}$ - вектор влияния; вектор смещения точек конструкции при единичном перемещении опоры s на единицу длины в то время как остальные опоры остаются неподвижными ;

n - число степеней свободы; s - номер опоры,

- ускорение грунта у основания опоры;

n_s - общее число опор.

Уравнение (12.1) может быть решено при помощи метода прямого интегрирования или с помощью метода модальной суперпозиции таким же образом, как выполняется решение уравнения (11.1) для одноопорной конструкцией.

При решении с использованием метода модальной суперпозиции уравнение:

$$\dot{Y}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = -\Gamma_{jk} \ddot{u}_k \quad (11.3)$$

заменяется уравнением:

$$\dot{Y}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = -\sum_{s=1}^{bs} \Gamma_{sj} \ddot{u}_s \quad (12.3)$$

где

$\Gamma_{sj} = \{\Phi_j\}^T [M] \{U_{bs}\}$, коэффициент участия опоры с номером s , в j -той форме собственных колебаний.



Метод спектров ответа

Спектры ответов определяются для движения каждой опоры и величины демпфирования. Два метода расчёта спектров ответа при задании движения многоопорных систем представлены ниже в пунктах (а) и (b).

а) **Метод огибающего спектра.** Огибающий спектр для всех опор для заданной величины демпфирования и направления движения используется как входной спектр для всех опор. Максимальная реакция системы определяется с помощью метода спектра ответов так же как для одноопорной конструкции.

(b) **Многоспекторный метод.** Этот метод может быть использован, когда известны относительные фазовые характеристики, соответствующие отличающимся движениям каждой из опор. Производится расчёт спектра ответа при движении каждой опоры. Реакции от движений всех опор складываются с учётом фазовых сдвигов.

Модальные и покомпонентные составляющие реакции, полученные с использованием огибающего спектра, а также реакции, полученные при задании движения каждой опоры с помощью многоспекторного метода, суммируются по определённым правилам.

Действие относительных смещений опор определяется при использовании наиболее неблагоприятных комбинаций пиковых смещений опор или при соответствующем представлении относительных фазовых характеристик, связанных со смещениями различных опор.

Реакции, найденные с помощью любого из двух методов спектрального анализа, складываются с реакциями, вызванными относительными смещениями опор, с использованием правила (ККСК).



Суммирование модальных и компонентных откликов

• Основное правило модального суммирования

Приемлемым методом суммирования откликов всех собственных форм колебаний для l -той компоненты движения является формула:

$$R_l = \pm \sqrt{\sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} R_{li} R_{lj}} \quad (12.4)$$

где

R_l - значение модального отклика для l -той компоненты движения;

R_{ij} , R_{lj} – алгебраическое (с учётом знака) значение модального отклика i -той (j -той) формы колебаний.



В формуле (11.4) параметр ε_{ij} определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(1 - \bar{\alpha}_i^2)(1 - \alpha_j^2)} \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_j$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{2\sqrt{\xi_i \xi_j}}{\xi_i + \xi_j} \left[1 + \left(\frac{f_i - f_j}{\xi_i f_i + \xi_j f_j} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\ln(f_2 / f_1)}{\ln(f_1 / f_1)}, 0 \leq \bar{\alpha}_i \leq 1; \quad f_1 = \frac{S_{a \max}}{2\pi S_{v \max}}$$

где f_i - собственная частота i -той формы колебаний;

ξ_i - коэффициент модального демпфирования для i - формы колебаний;

$S_{a\max}$ - максимальное значение спектра ускорения;
 $S_{v\max}$ - максимальное значение спектра скорости;

$$f_2 = f_r \quad f_1 = \frac{S_{a\max}}{2\pi S_{v\max}}$$

f_r - частота среза или частота ускорения нулевого периода

Примечание. Частота ускорения нулевого периода (УНП): наименьшая частота, при которой спектр ускорения становится практически независимым от демпфирования (и приблизительно равен максимуму исходного ускорения).

Суммирование реакций от воздействия пространственных компонент

В тех случаях, когда реакции от каждой из трёх компонент землетрясения рассчитываются отдельно, суммарная реакция от землетрясения может быть получена по формуле:

$$R = \pm \sqrt{\sum_l R_l^2}$$

где

R определяемая реакция, а R_l ($l = 1, 2$ и 3) реакции при воздействии двух горизонтальных и одной вертикальной компоненты сейсмических движений.

Такое правило называется «корнем квадратным из суммы квадратов» ККСК.

Альтернативное правило суммирования реакций от воздействия пространственных компонент

В качестве альтернативы реакции могут быть просуммированы на основании предположения о том, что, когда достигается максимальная реакция от одной из компонент, реакции от двух других составляют 40% от максимальных реакций.

В данном методе все возможные сочетания этих трех компонент, R_1 , R_2 и R_3 , с учётом вариации знаков (плюс или минус), должны быть просчитаны.

$$R = \pm[R_1 \pm 0.4R_2 \pm 0.4R_3] \text{ или}$$

$$\text{или } \pm[R_2 \pm 0.4R_3 \pm 0.4R_1]$$

Данные правила суммирования применяются при определении реакций в каком либо направлении от различных компонент движения.



Суммирование пространственных компонент при динамическом расчёте во времени

(а) При динамическом расчёте во времени расчёты могут выполняться для каждой компоненты сейсмического движения отдельно или может выполняться одновременный расчёт на все три компоненты, если они статистически независимы.

(б) В тех случаях, когда расчёты в линейной постановке осуществляются отдельно для каждой компонент, суммарная реакция от трех компонент может быть получена по правилу ККСК, позволяющему суммировать максимальные реакции на каждую компоненту землетрясения:

Суммирование пространственных компонент при динамическом расчёте во времени

(а) При динамическом расчёте во времени расчёты могут выполняться для каждой компоненты сейсмического движения отдельно или может выполняться одновременный расчёт на все три компоненты, если они статистически независимы.

(б) В тех случаях, когда расчёты в линейной постановке осуществляются отдельно для каждой компонент, суммарная реакция от трех компонент может быть получена по правилу ККСК, позволяющему суммировать максимальные реакции на каждую компоненту землетрясения:

$$R = \pm \sqrt{\sum_I R_I^2}$$

Суммирование пространственных компонент при динамическом расчёте во времени (2)

В качестве альтернативы, в тех случаях, когда линейные динамические расчёты во времени выполняются отдельно для каждой компоненты, суммарные реакции от трёх компонент могут быть получены по правилу суммирования «100-40-40», позволяющего суммировать максимальные реакции каждой компоненты землетрясения.

Реакции могут быть получены прямым способом, при допущении, что, если реакция достигает максимального значения от одной компонент, то реакции от двух других составляют 40% от их максимальных значений. В этом случае все возможные сочетания трёх компонент R_1 , R_2 и R_3 , включая вариации знаков (плюс или минус), должны быть рассмотрены и наибольшие из них приняты в расчёт.



Суммирование пространственных компонент при динамическом расчёте во времени (2)

При линейном динамическом расчёте во времени, в тех случаях, когда три компоненты сейсмических движения являются статистически независимыми, зависящие от времени реакции могут быть получены индивидуально для каждой из трех компонент, а затем алгебраически просуммированы на каждом временном шаге:

$$R = \pm \sqrt{\sum_I R_I^2}$$

В нелинейных расчётах три компоненты сейсмических движений должны учитываться одновременно, за исключением случаев, когда может быть обосновано, что реакция от одной или более одной компоненты сейсмического движения может быть определена независимо.

