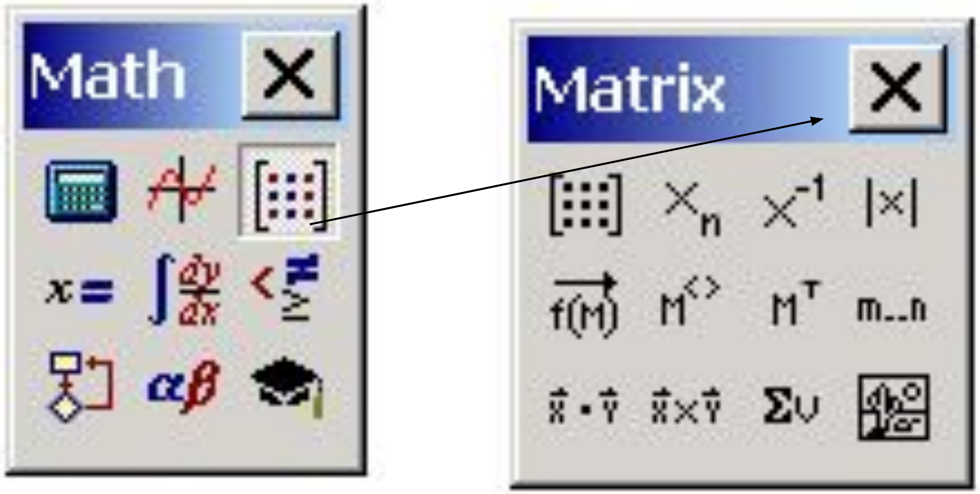
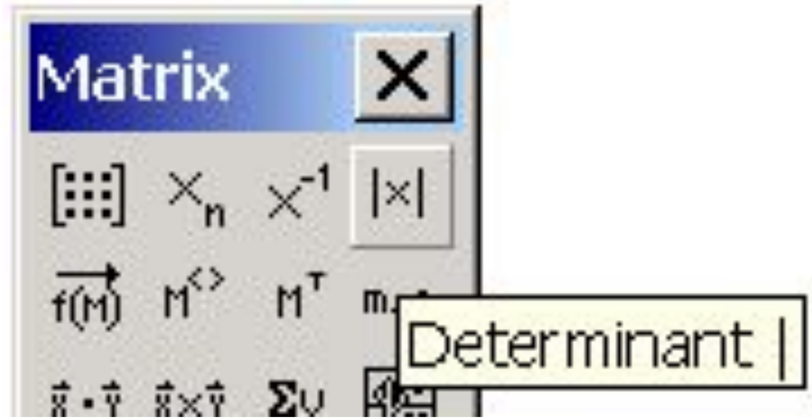
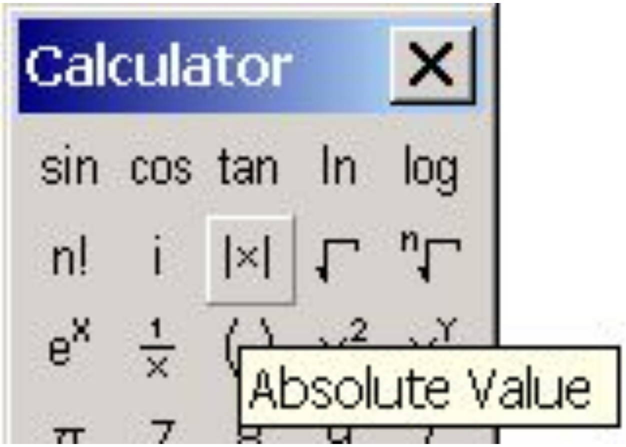
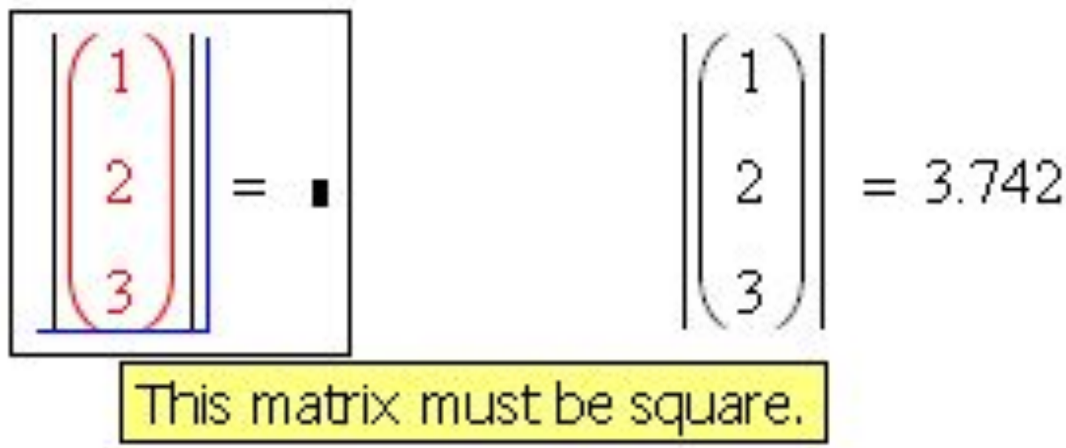
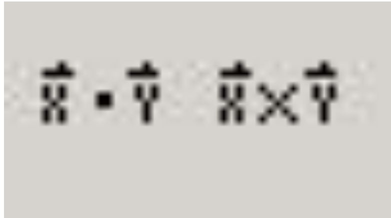
# Задачи линейной алгебры



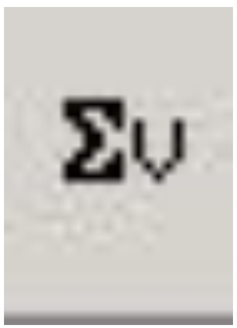





$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 32 \qquad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Скалярное призведение Векторное призведение



$$\sum\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 6$$

$$v := \begin{pmatrix}6\\7\\8\end{pmatrix} \qquad \sum v = 21 \qquad a := \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\7 & 2 & 3\\5 & 6 & 1\end{pmatrix} \qquad \sum a^{\langle 2\rangle} = 9 \qquad \sum\left(a^{T}\right)^{\langle 0\rangle} = 8$$

$\overrightarrow{f(M)}$

Обычное умножение

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=14$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&36&42\\66&81&96\\102&126&150\end{pmatrix}$$

Векторизация

$$\overrightarrow{\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]}=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\left[\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\right]}=\begin{pmatrix}1&4&9\\16&25&36\\49&64&81\end{pmatrix}$$

# Матричные функции

<u>Первая группа</u>

1. **matrix(m, n, f)**
2. **diag(v)**
3. **identity(n)**
4. **augment(A, B)**
5. **stack(A, B)**
6. **submatrix(A, ir, jr, ic, jc)**

$f(x,y) := x + y$

$f1(x,y) := x \cdot y$

$m := \text{matrix}(2,3,f)$ $\quad m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$m1 := \text{matrix}(2,3,f1)$ $\quad m1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad mg := \text{diag}(v)$ $\quad mg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$me := \text{identity}(3)$ $\quad me = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad mo := \text{augment}(A,B)$ $\quad mo = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad ms := \text{stack}(A,B)$ $\quad ms = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad mb := \text{submatrix}(A,2,3,1,2)$ $\quad mb = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

Вторая группа

1. **last(v)**
2. **length(v)**
3. **min(v), max(v)**
4. **Re(v)**
5. **Im(v)**
6. **sort(V)**
7. **reverse (sort(v))**
8. **csort (A,n)**
9. **rsort (A,n)**
10. **rows(A)**
11. **cols(A)**
12. **max(A), min(A)**
13. **tr(A)**
14. **mean(A)**

# Третья группа

1. **rref(A)**
2. **rank(A)**
3. **eigenvals(A)**
4. **eigenvecs (A)**
5. **eigenvec(A,e)**
6. **normi(A)**
7. **lsolve (A,b)**

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rref}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \mathrm{eigenvals}(A) \quad MS := \mathrm{eigenvecs}(A) \quad V1 := \mathrm{eigenvec}\left(A, \lambda_0\right) \quad V2 := \mathrm{eigenvec}\left(A, \lambda_2\right)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 5.439 \\ 0.271 \\ -2.71 \end{pmatrix} \quad MS = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.76 & -0.415 \\ 0.321 & -0.611 & -0.432 \\ 0.711 & 0.222 & 0.801 \end{pmatrix} \quad V1 = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.321 \\ 0.711 \end{pmatrix} \quad V2 = \begin{pmatrix} -0.415 \\ -0.432 \\ 0.801 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \lambda \cdot E \cdot X$$

Проверка

$$X := MS^{\langle 0 \rangle} \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot X = \begin{pmatrix} 3.401 \\ 1.744 \\ 3.87 \end{pmatrix} \qquad \lambda_0 \cdot E \cdot X = \begin{pmatrix} 3.401 \\ 1.744 \\ 3.87 \end{pmatrix}$$

## Решение систем линейных алгебраических уравнений

*Неоднородная* система уравнений

$$A \cdot X = B$$

Определитель матрицы не равен нулю, тогда
три способа решения: 1) Метод обратной матрицы
2) Метод Гаусса
3) Метод Крамера

# Метод Гаусса

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = -29 \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C := \text{augment}(A, B) \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C1 := \text{rref}(C) \qquad C1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2.379 \\ 0 & 1 & 0 & -1.172 \\ 0 & 0 & 1 & 3.138 \end{pmatrix} \qquad X := C1^{\langle 3 \rangle} \qquad X = \begin{pmatrix} -2.379 \\ -1.172 \\ 3.138 \end{pmatrix} \qquad A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{lsolve}(A, B) \qquad X = \begin{pmatrix} -2.379 \\ -1.172 \\ 3.138 \end{pmatrix}$$

# Метод Крамера

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = -29 \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A1 := \mathrm{augment}(B, \mathrm{submatrix}(A, 0, 2, 1, 2))$$

$$A2 := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A, 0, 2, 0, 0), B, \mathrm{submatrix}(A, 0, 2, 2, 2))$$

$$A3 := \mathrm{augment}(B, \mathrm{submatrix}(A, 0, 2, 0, 1))$$

$$x1 := \frac{|A1|}{|A|} \quad x2 := \frac{|A2|}{|A|} \quad x3 := \frac{|A3|}{|A|} \quad X := \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} -2.379 \\ -1.172 \\ 3.138 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай, когда определитель матрицы равен нулю. Решение проводится методом Гаусса

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad B2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad |A| = 0$$

$$Ar1 := \mathrm{augment}(A, B1)$$

$$Ar2 := \mathrm{augment}(A, B2)$$

$$\mathrm{rank}(A) = 3 \quad \mathrm{rank}(Ar1) = 4 \quad \mathrm{rank}(Ar2) = 3$$

Система $A \cdot X = B1$ не имеет решения

Система $A \cdot X = B2$ имеет решение

$$\mathrm{rref}(Ar2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу Ar2 к ступенчатому виду

за базисные переменные примем - x1, x2, x3
за свободные переменные примем - x4, x5

Given

$$x1 - x4 - x5 = 2$$

$$x2 + x4 + x5 = -1$$

$$x3 = 3$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{pmatrix} x4 + x5 + 2 \\ -x4 - x5 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$X(x4, x5) := \begin{pmatrix} x4 + x5 + 2 \\ -x4 - x5 - 1 \\ 3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot X(x4, x5) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Частные решения

$$X(1,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X(0,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A \cdot X(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad A \cdot X(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

# Решение дифференциальных уравнений в MathCAD

**Решение Обыкновенных Дифференциальных Уравнений (ОДУ)**

*ОДУ первого порядка*

F(x,y,y')=0 F(x,y(x),y'(x))=0 y'=f(x,y)

*ОДУ высших порядков*

F(x,y,y',y'', …,y(n))=0

F(x, y(x), y'(x), y''(x),…, y(n)(x))=0

Y(n) =f(x, y, y', …, y(n-1))

Y' = F(x, Y), Y(x0) = Y0

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x0) = Y0$$

$$\begin{cases} y = y_1 \\ y' = y_1' = y_2 \\ y'' = y_2' = y_3 \\ y''' = y_3' = y_4 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n \\ y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \dots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \dots \\ y_n \\ f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{bmatrix}$$

Замена Вектор первых производных

Вектор правых частей

## 1) *Вычислительный блок Given / Odesolve*

Уравнение первого порядка

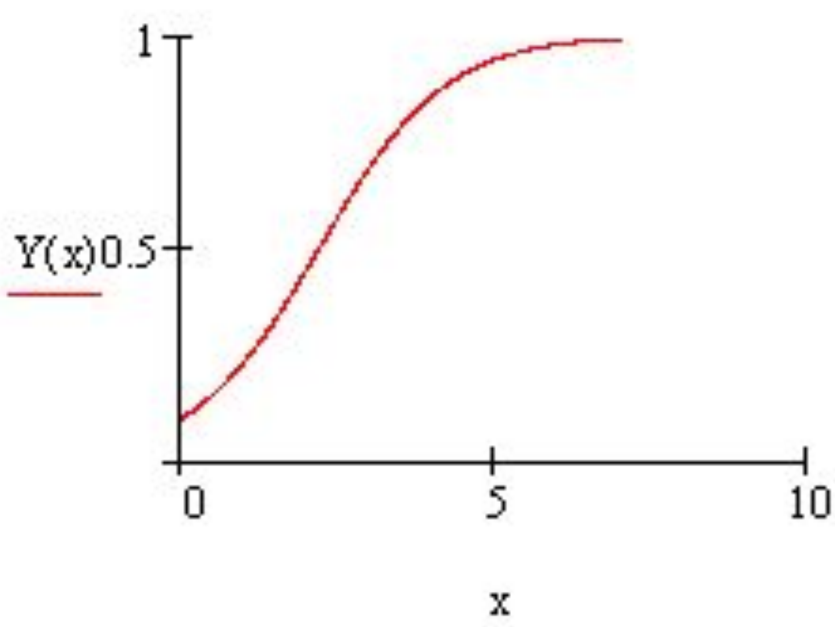
метод Рунге-Кутта

given

$y'(x) = y(x) - y(x)^2$ $\quad y(0) = 0.1$

$Y := \mathrm{odesolve}(x, 10)$

$x := 0, 0.01 .. 10$




$Y(1) = 0.232$

$Y(3) = 0.691$

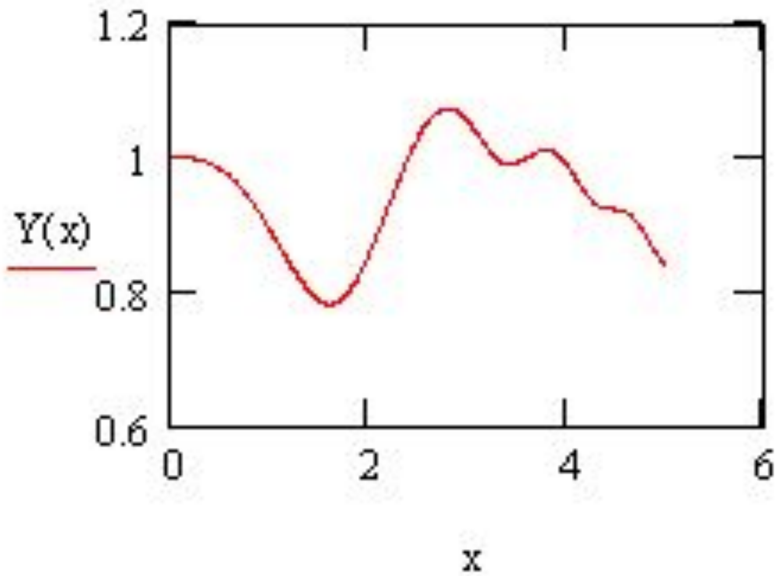
# Уравнение второго порядка

given

$$y''(x) = \sin\left(y'(x) - x\cdot y(x) + x^2\right) \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

$$Y := \mathrm{odesolve}(x, 5)$$

$$x := 0, 0.01 .. 5$$




$$Y(1) = 0.892$$

$$Y(3) = 1.053$$

2) *Альтернативный метод* решения ОДУ с помощью встроенных функций : rkfixed, Rkadapt, или Bulstoer

rkfixed – метод Рунге-Кутта с фиксированным шагом интегрирования.

Rkadapt – метод Рунге-Кутта с переменным шагом интегрирования.

Bulstoer – метод Булирша – Штера

# Уравнение первого порядка

$ORIGIN := \mathbf{1}$

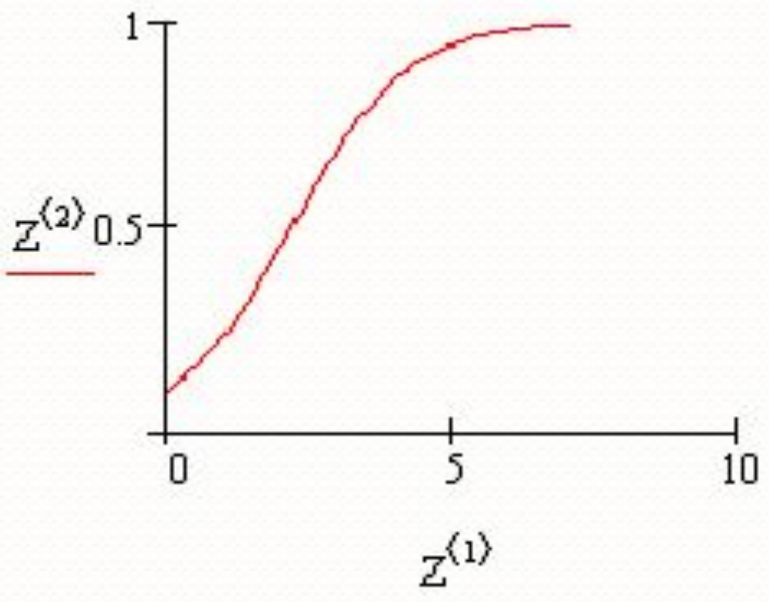
$a := 0$ $\quad$ $b := 10$ $\quad$ $n := 100$ $\quad$ $\mathbf{y} := 0.1$

$f(x, y) := y - y^2$

$F(x,y) := f\left(x, y_1\right)$ $\quad$ $Z := rkfixed(y, a, b, n, F)$

$Z =$

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.1 | |
| 1 | 0.1 | 0.109 | |
| 2 | 0.2 | 0.119 | |
| 3 | 0.3 | 0.13 | |
| 4 | 0.4 | 0.142 | |
| 5 | 0.5 | 0.155 | |
| 6 | 0.6 | 0.168 | |
| 7 | 0.7 | 0.183 | |
| 8 | 0.8 | 0.198 | |



## Уравнение второго порядка

$ORIGIN := 1$

$a := 0$ $\quad b := 5$ $\quad n := 100$ $\quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

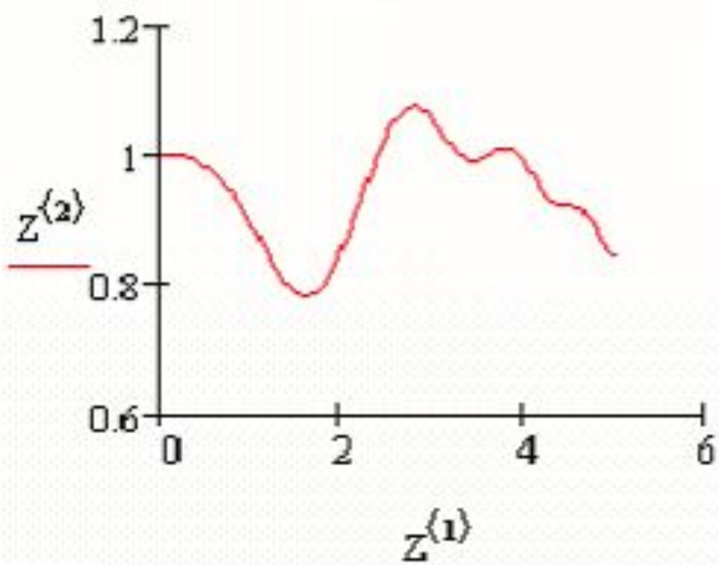
$f(x, y, y') := \sin\left(y' - x \cdot y + x^2\right)$

$F(x, y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ f\left(x, y_1, y_2\right) \end{pmatrix}$

$Z := rkfixed(y, a, b, n, F)$

$Z =$

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0.05 | 1 | $-1.229 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 | 0.1 | 1 | $-4.825 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 0.15 | 0.999 | -0.011 |
| 4 | 0.2 | 0.999 | -0.019 |
| 5 | 0.25 | 0.998 | -0.028 |
| 6 | 0.3 | 0.996 | -0.04 |
| 7 | 0.35 | 0.994 | -0.053 |
| 8 | 0.4 | 0.991 | -0.067 |



## *Решение систем ОДУ*

1) Блок Given / Odesolve

2) Встроенные функции rkfixed, Rkadapt и Bulstoer

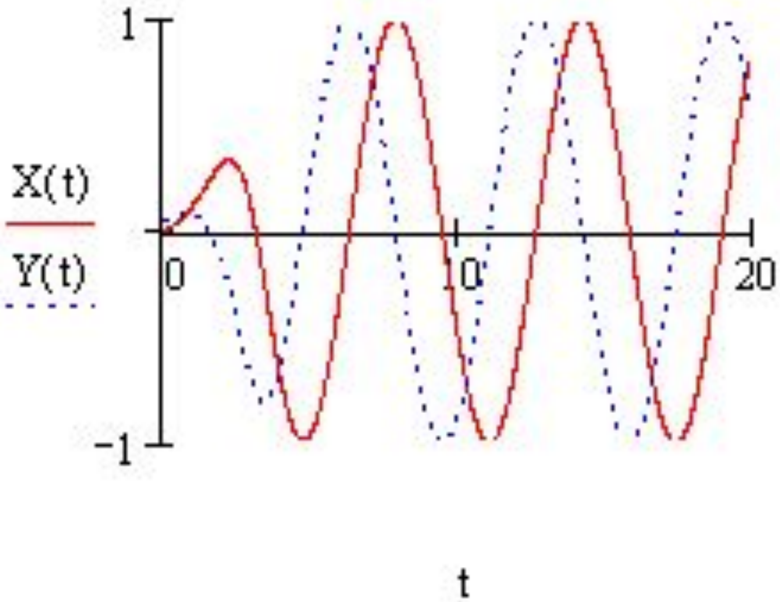
$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

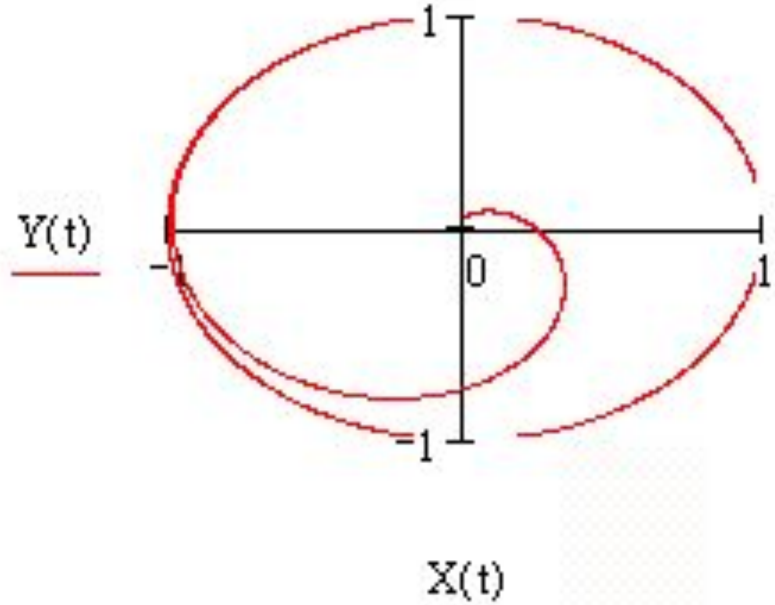
given

$$x'(t) = y(t) + \left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right)\cdot x(t)$$

$$y'(t) = -x(t) + \left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right)\cdot y(t) \qquad x(0) = 0 \qquad y(0) = 0.05$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \mathrm{odesolve}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t, 20\right] \qquad t := 0, 0.01 .. 20$$



ORIGIN := 1

$$x'(t) = y(t) + \left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right) \cdot x(t)$$

$$y'(t) = -x(t) + \left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right) \cdot y(t)$$

$a := 0$ $b := 20$ $n := 100$ $y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.05 \end{pmatrix}$

$$F(t,y) := \begin{bmatrix} y_2 + \left[1 - \left(y_1\right)^2 - \left(y_2\right)^2\right] \cdot y_1 \\ -y_1 + \left[1 - \left(y_1\right)^2 - \left(y_2\right)^2\right] \cdot y_2 \end{bmatrix}$$

$Z := \text{rkfixed}(y, a, b, n, F)$