

Тема урока № 64

Возрастание и убывание (монотонность) функции

Цели обучения:

10.3.1.15 - знать и применять необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале

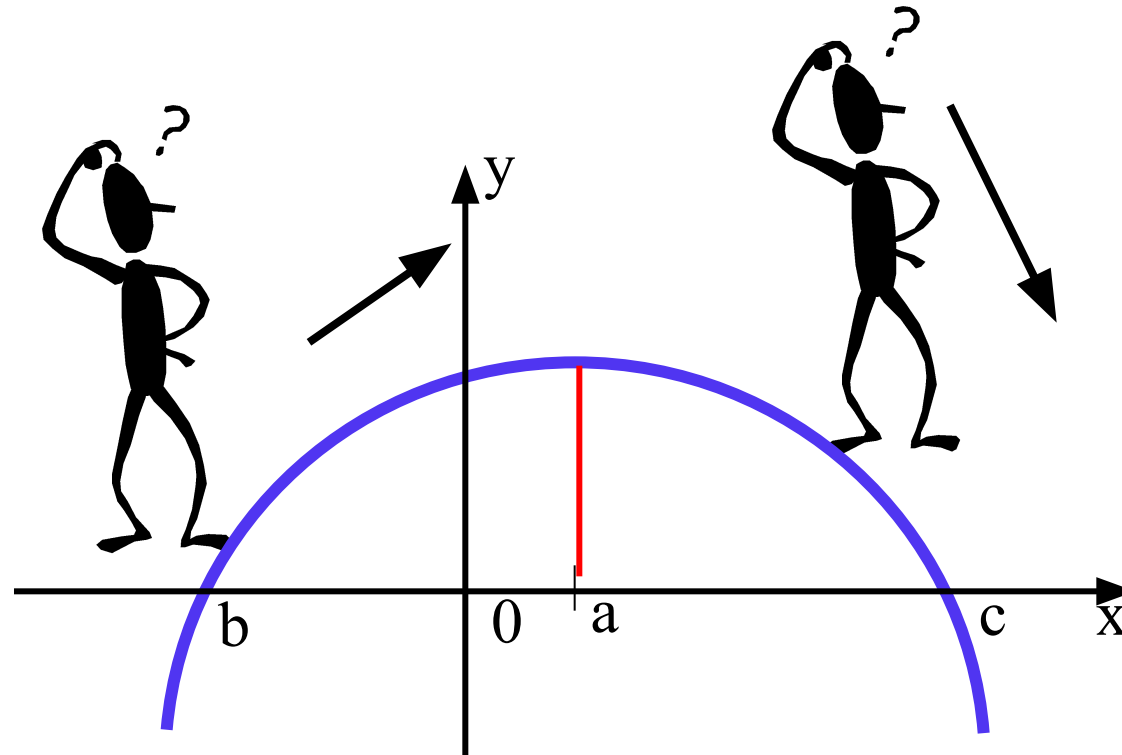
Критерии успеха

- знает необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции на интервале
- умеет определять промежутки возрастания и убывания функции различными способами

Возрастание и убывание функции

Подняться на гору.
Функция возрастает
на интервале $[b; a]$

При спуске с горы.
Функция убывает на
интервале $[a; c]$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (неубывающей)* на интервале $(a; b)$ если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$ таких, что $x_1 < x_2$ значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ удовлетворяют неравенству

$$f(x_1) < f(x_2)^1 \quad (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей (невозрастающей)* на интервале $(a; b)$ если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$ таких, что $x_1 < x_2$ значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ удовлетворяют неравенству

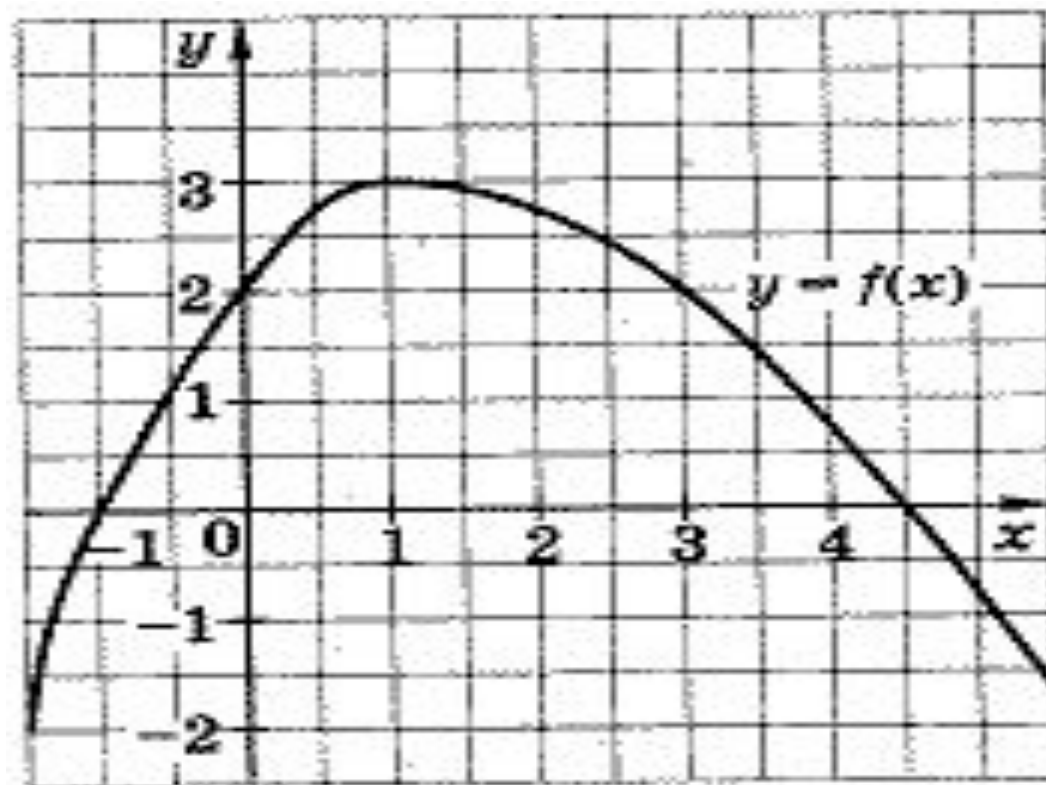
$$f(x_1) > f(x_2)^2 \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности функции*.

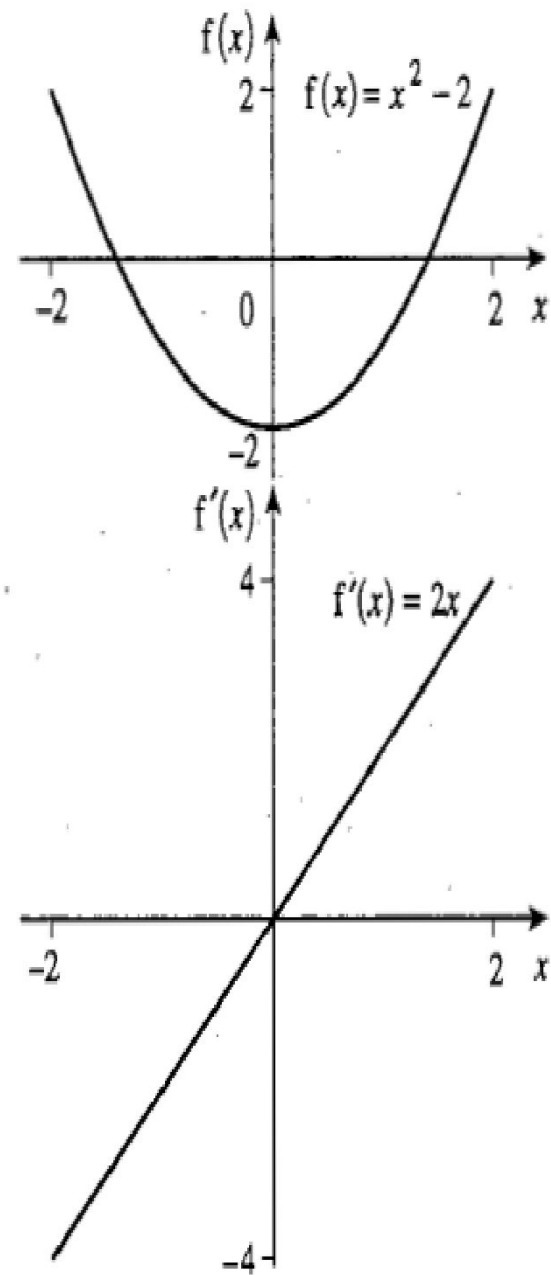
¹ Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется возрастающей на интервале $(a; b)$, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции.

² Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется убывающей на интервале $(a; b)$, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует меньшее значение функции.

Промежутки **возрастания** и **убывания** называют промежутками **монотонности** функции.



Рассмотрим связь между графиком функции $f(x) = x^2 - 2$ и ее производной $f'(x) = 2x$



Выводы:

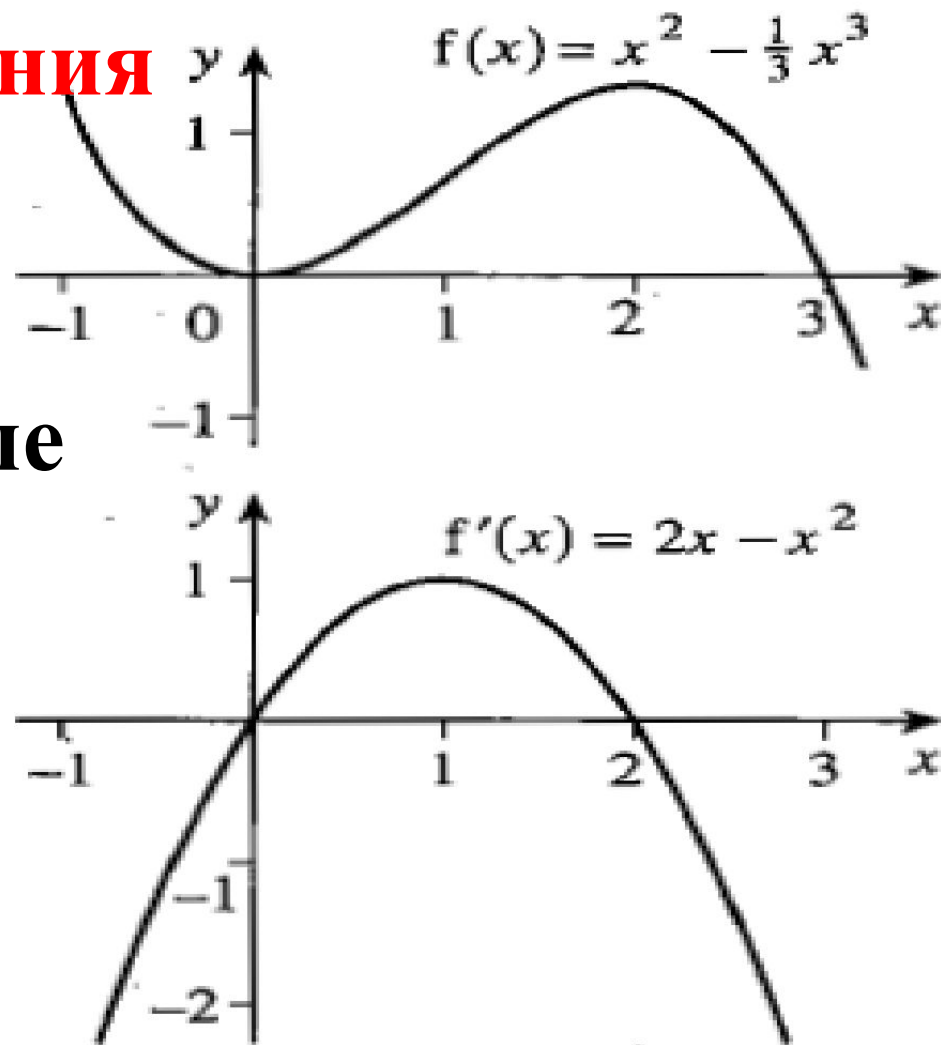
1. Множество точек x , где график производной функции располагается выше оси Ox , соответствует множеству точек x , где график функции **возрастает**.
2. Множество точек x , где график производной функции располагается ниже оси Ox , соответствует множеству точек x , где график функции **убывает**.

Пример.

Установите связь между графиком функции и графиком ее производной.

Необходимое условие возрастания и убывания функции

При **возрастании** функции, значение ее производной **больше** нуля;
при **убывании** функции, значение ее производной **меньше** нуля



Достаточное условие возрастания и убывания функции

- ✓ Если производная некоторой непрерывной функции $f(x)$ на некотором промежутке положительна ($f'(x) > 0$), то на этом промежутке функция возрастает.
- ✓ Если производная некоторой непрерывной функции $f(x)$ на некотором промежутке отрицательна ($f'(x) < 0$), то на этом промежутке функция убывает.

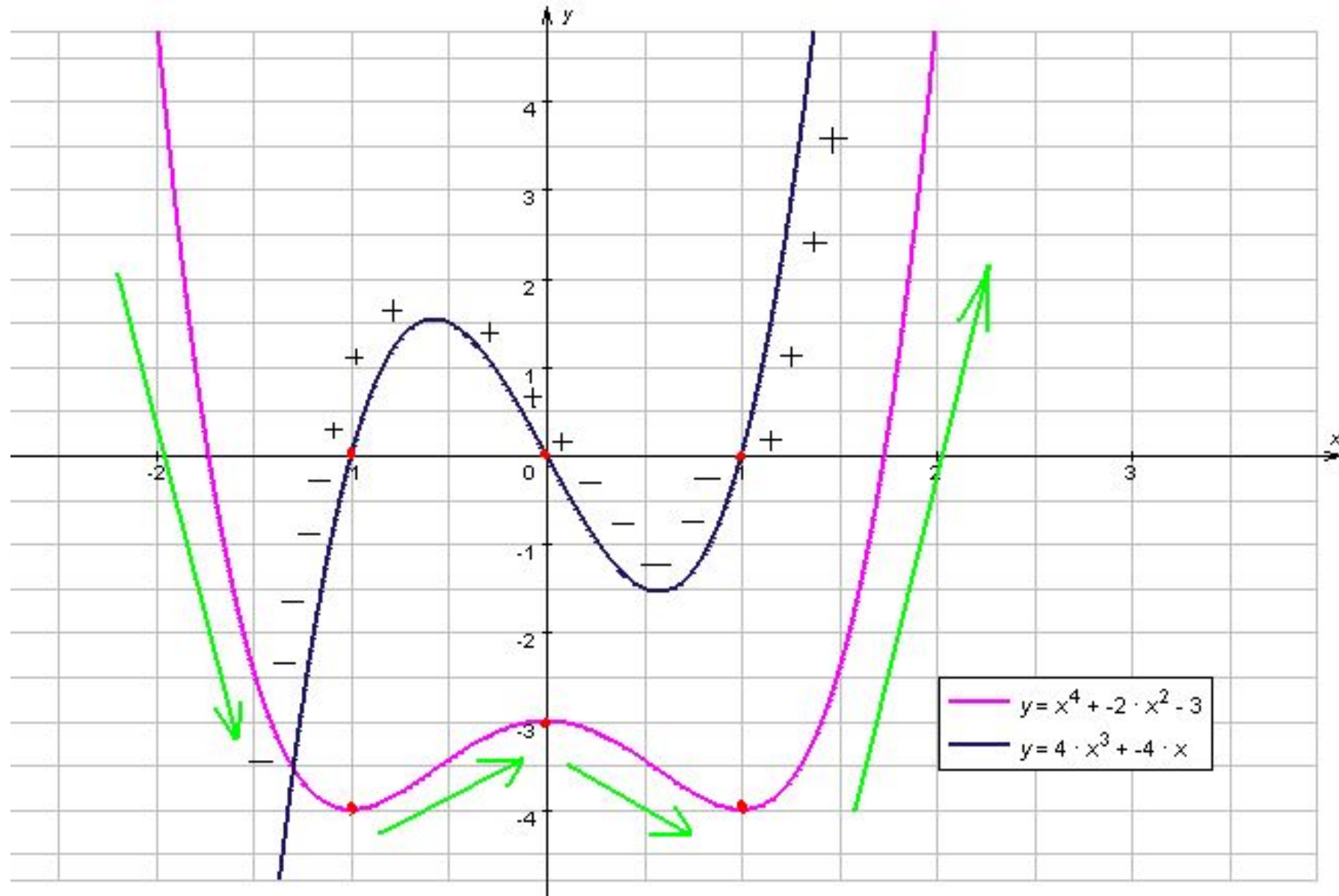
Способы исследования функции на МОНОТОННОСТЬ:

1 способ. По определению возрастающей (убывающей) функции.

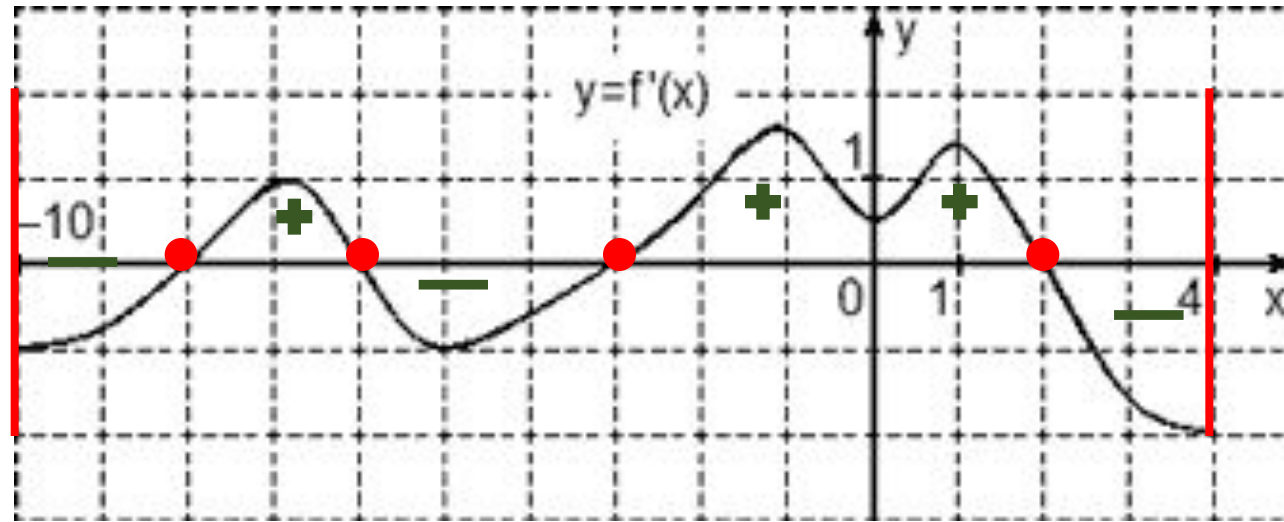
2 способ. По графику функции.

3 способ. По производной функции.

По графику функции и ее производной определить промежутки возрастания и убывания

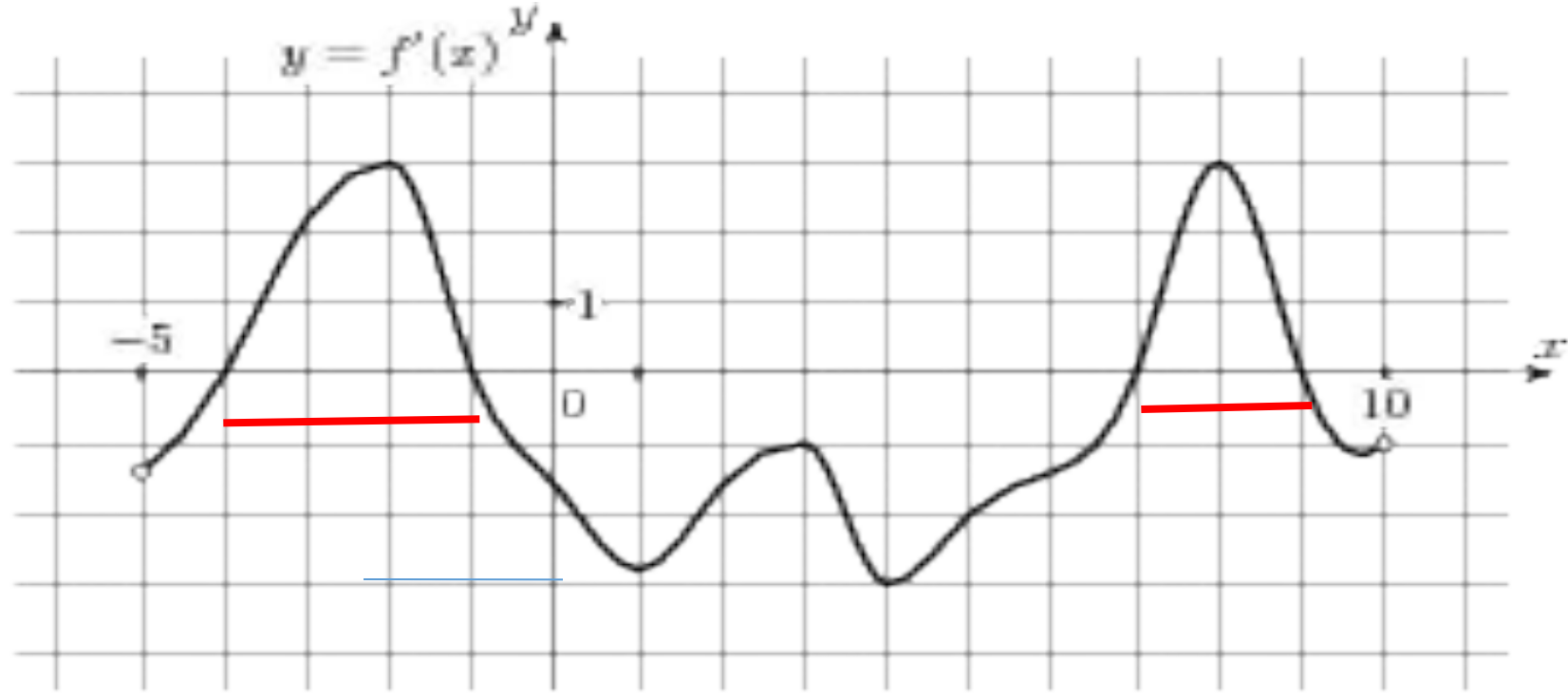


На рисунке изображен непрерывный график производной функции $y = f'(x)$ на промежутке $[-10; 4]$. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f'(x)$.



1. Покажем что на промежутке $[-10; 4]$ функция непрерывная
2. Обозначим нули производной
3. Находим знаки производной на каждой промежутке:
 - 3.1. $f'(x) > 0$ (график расположен выше оси Ox)
 - 3.2. $f'(x) < 0$ (график расположен ниже оси Ox)
4. Определим промежутки монотонности:
 - 4.1. Если $f'(x) > 0$, то функция возрастает на этом промежутке.
 - 4.2. Если $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом промежутке.

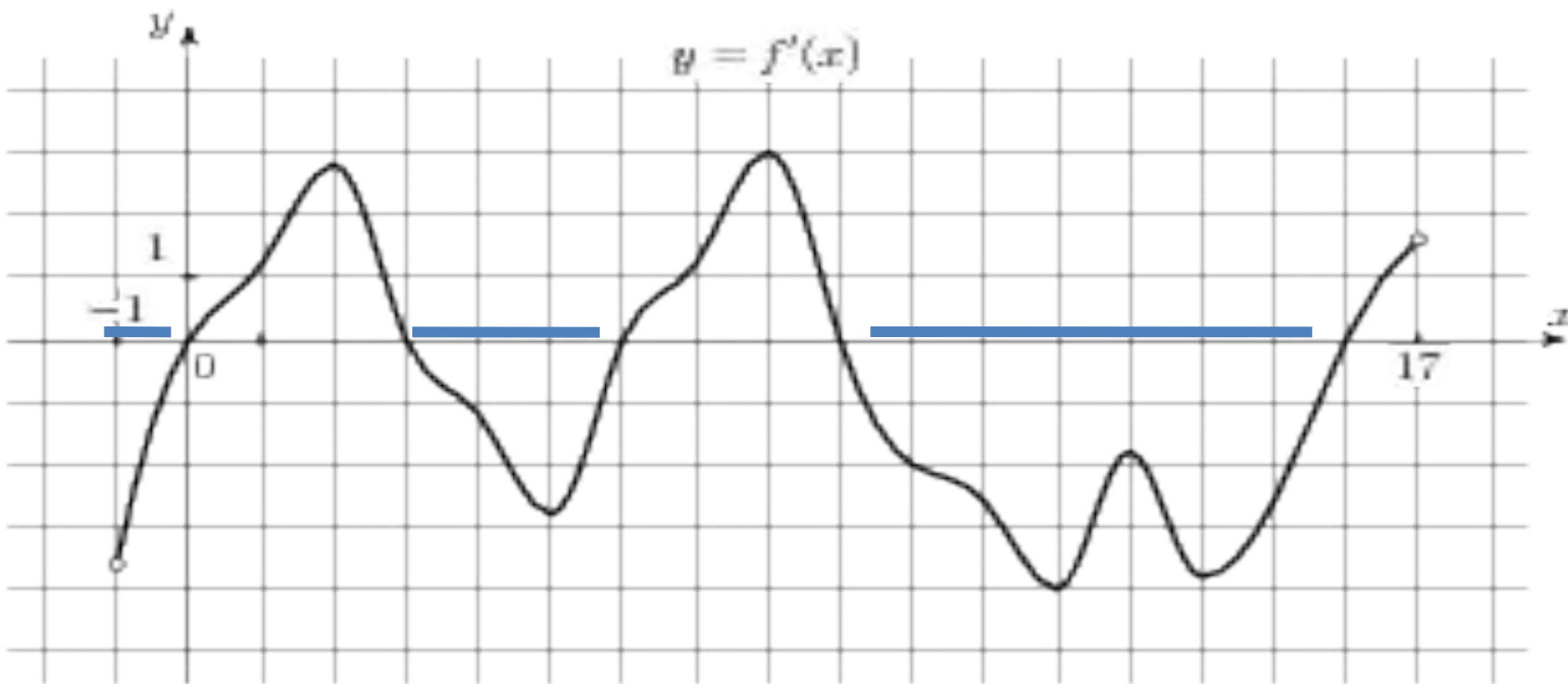
Задача 1 На рисунке изображен график производной функции на промежутке $(-5; 10)$. Найти промежутки возрастания и дать в ответе длину наибольшего промежутка.



Ответ: 3

Задача 2

На рисунке изображен график производной функции на промежутке $(-1; 17)$. Найти промежутки убывания и дать в ответе длину наибольшего промежутка.



Ответ: 7

Алгоритм нахождения промежутков монотонности

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную функции.
3. Решить неравенства $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$.
4. Записать промежутки возрастания и убывания функции.

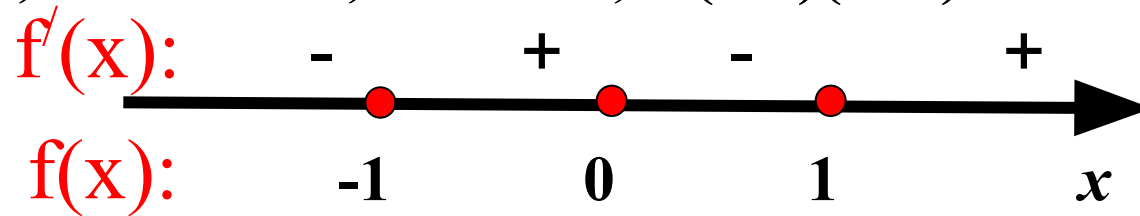
Решение по алгоритму

Задача 3 Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = x^4 - 2x^2$

1. $D(f) = \mathbb{R}$

2. $f'(x) = 4x^3 - 4x,$

3. $f'(x) > 0, 4x^3 - 4x > 0, x^3 - x > 0, x(x-1)(x+1) > 0$



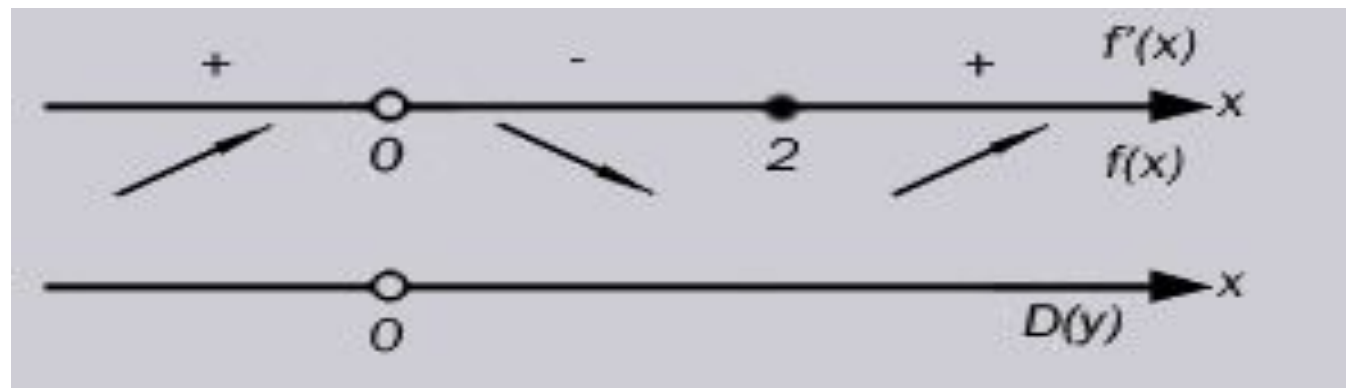
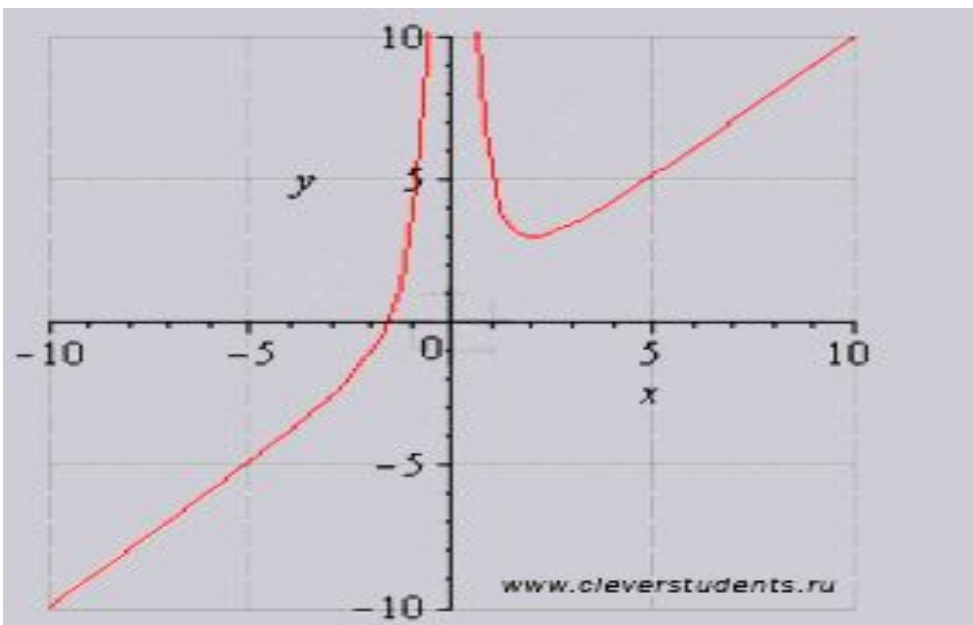
4. Функция $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ на интервале убывает.

Функция $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ на интервале возрастает.

Задача 4

Найдите промежутки монотонности функции

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$



Таким образом, $\begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^3} > 0 \\ D(y) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и $\begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^3} < 0 \\ D(y) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

Ответ:

функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$, убывает на интервале $(0; 2]$.