Вы активировали гиперссылку для рассмотрения математическог моделирования игры в теннис

Теннис. Правила игры.

ИГРА

СЕТ (ПАРТИЯ)

Заканчивается при минимально выигранных 6 геймах с разницей в 2 гейма. Т.е. при счёте 6:0, 6:1, 6:2…7:5, 8:6 и т.д. За исключением системы тай-брейка

ГЕЙМ

Если одна из сторон после выигрыша первого мяча второй мяч проиграла, то 15 засчитывается противнику и т.п. => счёт в гейме может быть одним из следующих:

15:0, 30:0, 40:0, 0:15, 0:30, 0:40, 15:15, 30:15, 40:15, 15:30, 15:40, 30:30, 40:30, 30:40

Начальные понятия теории вероятностей

Испытание J

Событие A ***Событие B***

Мяч выигран → $\boxed{P(A)+P(B)=1 \quad (1)}$ ← Мяч проигран

m/n – частота события

m/n → P(A) (0≤P(A)≤1). Свойство т.н. статистической устойчивости частоты. При этом P(A) – вероятность события A

Теорема Бернулли

События A и B не совместимы. Их сумма A+B – достоверное событие: его вероятность P(A+B)=1, а P(AB)=0

(Вывод формулы полной вероятности)

Начальные понятия теории вероятностей

Формула (1) – частный случай *т. сложения вероятностей:* если исходы А и В испытания О несовместны, то вероятность суммы А+В исходов А и В равна сумме вероятностей исходов:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема сложения вероятностей обобщается на тот случай, когда испытание приводит к любому конечному числу $B_1,\dots B_k$ попарно несовместных исходов (т.е. каждое произведение B_iB_j при $i \neq j$) событие невозможное:

$$P(B_1+B_2+\dots B_k)=P(B_1)+P(B_2)+\dots+P(B_k)$$

Условная вероятность P(A/B – отношение числа тех исходов испытания J, приведших к А, которые приводят и к В, к числу всех исходов, приводящих к В)

$$P(A/B)=P(A)/P(B)$$

Событие А называется независимым от события В, если условная вероятность P(A/B) равна безусловной вероятности P(A), т.е.: $P(A/B)=P(A)$

Теорема умножения вероятностей: $P(AB)=P(A)P(B)$

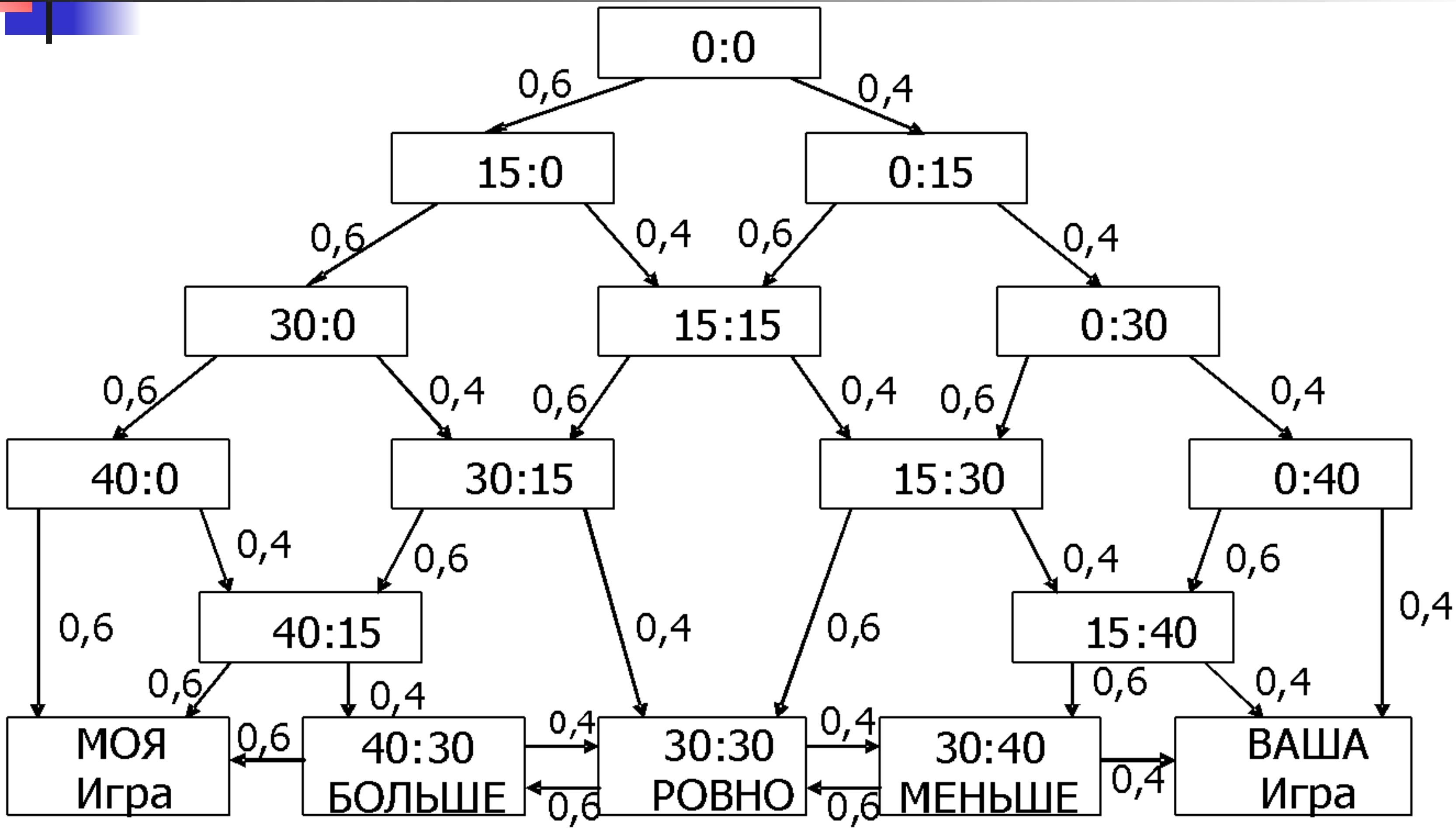
Для зависимых событий:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$$

Пусть события $B_1\dots B_k$ попарно несовместны и событие А имеет место,
Когда возникает по крайней мере одно какое-либо из событий $B_1\dots B_k$.
Тогда справедливо тождество: $A=A(B_1+\dots+B_k)=AB_1+\dots AB_k$.
Формула полной вероятности: $P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\dots+P(AB_k)$ или
$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+\dots+P(B_k)P(A/B_k)$

Модель игры

Схема 1



Начало гейма.

После розыгрыша 2 мячей

МОЯ подача.

30:0

0:30

15:15

Я выиграла 1 мяч
Вы - 2

Вы выиграли 1 мяч
Я - 2

H_1 – гипотеза, согласно которой Я выигрываю 1 мяч

$P(H_1)=0,6$

H_2 – гипотеза, согласно кот. ВЫ выигрываете 2 мяч

$P(H_2)=0,4$

Событие Q

$P(Q/H_2)=0,6$
$P(Q/H_1)=0,4$

$0,4*0,4=0,16$

$0,6*0,6=0,36$

$P(Q)=P(H_1)P(Q/H_1)+P(H_2)P(Q/H_2)=0,6*0,4+0,6*0,4=0,48$

…3 мячей

$P(40:0)=0,6*0,6*0,6\approx0,22$
$P(0:40)=0,4*0,4*0,4\approx0,06$

$P(30:15)=P(30:0)*0,4+P(15:15)*0,6\approx0,43$
$P(15:30)=P(15:15)*0,4+P(0:30)*0,6\approx0,29$

Вывод: для того чтобы найти вероятность счёта, отмеченного в каком-либо прямоугольнике схемы 1, надо составить сумму произведений вероятностей, проставленных у стрелок, входящих в этот прямоугольник, на вероятности счёта, указанные в соответствующих прямоугольниках, из которых эти стрелки выходят

Завершение гейма

…4 мячей

P(МОЯ игра) $=0,13$

$P(40:15)=0,35$

$P(30:30)=0,35$

$P(15:40)=0,15$

P(ВАША игра) $=0,15$

После розыгрыша 5 мячей

$P_1=P$(МОЯ игра) $=0,6^4(1+4*0,4)=0,33$

$P_3=P$(«ровно»)$=6*0,6^{2*}0,4^2=0,33$

$P_5=P$(ВАША Игра»)$=0,4^{4*}(1+4*0,6)=0,09$

$P_2=P$(«больше»)$=4*0,6^{3*}0,4^2=0,15$

$P_4=P$(«меньше»)$=4*0,6^{2*}0,4^3=0,1$

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0,6	0	0,4	0	0
3	0	0,6	0	0,4	0
4	0	0	0,6	0	0,4
5	0	0	0	0	1

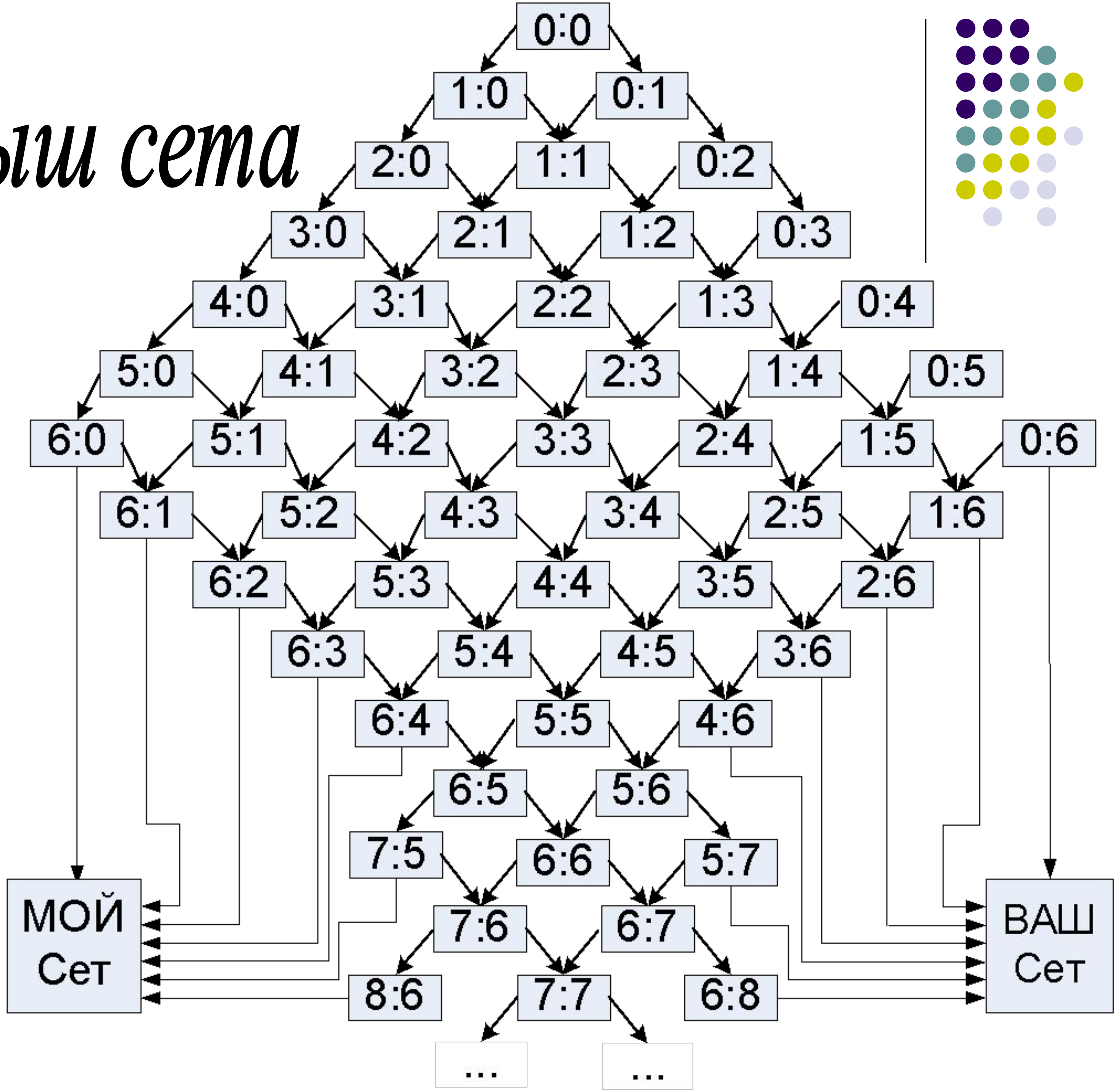
$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В таблице на пересечении i-й строки и j-го столбца указана вероятность перехода из сотояния i в состояние j.

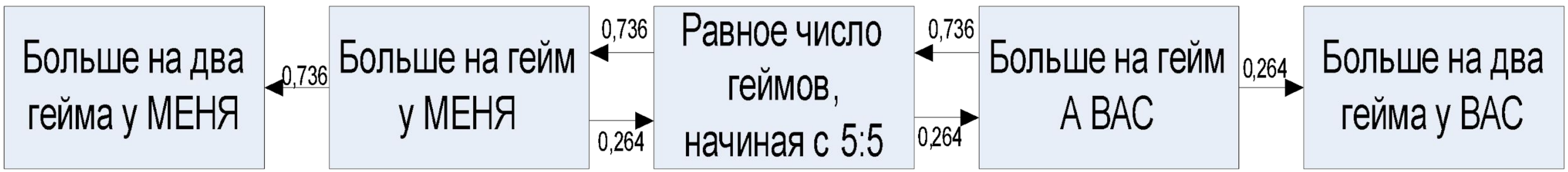
Например, единица на пересечении первой строки и второго столбца означает, что состояние «МОЯ игра» - поглощающее, т.е. гейм уже разыгран и счёт меняться в нем не будет. На пересечении третьей строки и второго столбца стоит 0,6, т.е. с вероятностью 0,6 счет из «ровно» станет больше и т.п.

Матрица T – матрица переходов марковской цепи. Вероятности состояний после розыгрыша пяти мячей примем в качестве компонент вектора $p^0=(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ и назовем его вектором начального распределения вероятностей соответствующих состояний. В данной игре числовые значения $p_i(i=1,\ldots,5)$ уже подсчитаны

Розыгрыш сета



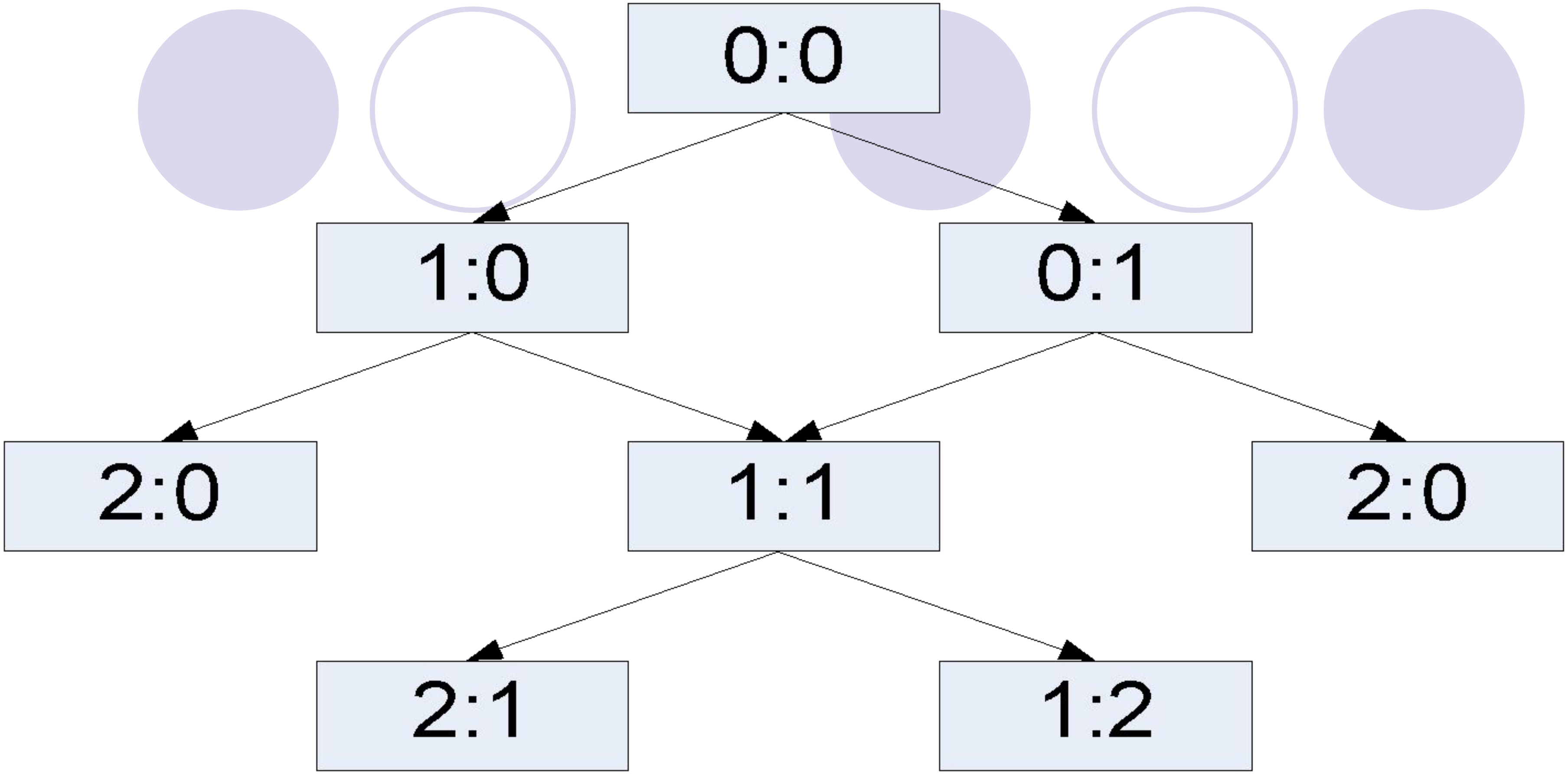
Завершение сета



P(ВАШ сет)=0,034

P(МОЙ сет)=0,966

Мы видим, что вероятность выигрыша мной сета близка к единице. Этого и следовало ожидать, ведь Я выигрываю первый мяч с вероятностью в 1,5 раза большей, чем ВЫ. Согласно подсчетам, Я выиграю матч из трех сетов с вероятностью 0,996; матч из пяти сетов – с вероятностью 0,9996, т.е. почти наверняка. В связи с чем играть более трех сетов нецелесообразно.



Пусть теперь класс игроков практически одинаков (вероятность выигрыша мяча МНОЙ – 0,51, ВАМИ – 0,49, т.е. Из 100 разыгранных мячей Я выигрываю в среднем на 2 мяча больше, чем ВЫ. В этом случае Р выигрыша сета МНОЙ составит 0,753; ВАМИ – 0,427. Т.об. Вероятность выигрыша сета возрастет в 7 раз! Вероятность выигрыша каждой стороной по одному сету, т.е. вероятность счёта 1:1 составляет 0,488

Заключение

- Мы построили математическую модель игры в теннис в пределах гейма и сета. По аналогии можно «достроить» модель полностью до трех (пяти) сетов.
- Так же математика находит своё применение в других видах спорта. Например, с помощью математики можно сформулировать оптимальный состав команды пловцов, разработать тактику ведения игры в хоккейных, футбольных, волейбольных и др. матчах.

Для перехода к заключительному слайду нажмите: