ВЫРАЖЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ.

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа *a* называется само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a<0$. Модуль числа *a* обозначается $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрически модулем числа *a* называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки $A(a)$.

Свойства модулей:

1. $|a| \geq 0.$
2. $|a| = |-a|.$
3. $|ab| = |a| \cdot |b|.$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0.$
5. $|a|^2 = a^2.$

МОДУЛЬ В ВЫРАЖЕНИЯХ

Задание №1

Раскроем модуль в выражении $|2x - 4|$.

Рассуждаем так:

Если $2x-4 \geq 0$, т.е. $x \geq 2$, то $|2x - 4| = 2x - 4$

Если $2x-4 < 0$, т.е. $x < 2$, то $|2x - 4| = 4 - 2x$.

Эти рассуждения записываем коротко с помощью формулы:

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, \text{если } x \geq 2, \\ 4 - 2x, \text{если } x < 2. \end{cases}$$

Задание №2

Упростим выражение:

$$\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

Решение.

Воспользуемся тождеством $\sqrt{x^2}=|x|$.

$$\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|\sqrt{2}+1|-|1-\sqrt{2}|=$$

$\sqrt{2}+1+1-\sqrt{2}=2$

(т. к. $\sqrt{2}+1>0$, а $1-\sqrt{2}<0$) .

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

Решим уравнение: $|x - 2| = 3$.

Аналитическое решение

I способ «Определение модуля»

Рассуждать будем, исходя из определения модуля.

Если $x-2 \geq 0$, то уравнение примет вид: $x-2=3$

Если $x-2 < 0$, то уравнение примет вид: $x-2=-3$

Таким образом, получаем, либо $x-2=3$, либо $x-2=-3$

Решение уравнения можно записать так:

$$|x-2| = 3 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=3 \\ x-2=-3, \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=5$, $x_2=-1$.

II СПОСОБ «МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ»

1. Установим при каких значениях х модуль равен нулю:
   х-2=0, х=2
2. Получим два промежутка: $(-\infty; 2]$ и $(2; +\infty)$, на каждом из которых решим уравнение. Получим две смешанных системы:

1) $\begin{cases} x \leq 2 \\ -x + 2 = 3, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x > 2 \\ x - 2 = 3 \end{cases}$

Решив первую систему, получим $x=-1 \in (-\infty; 2]$.

Решив вторую систему, получим $x=5 \in (2; +\infty)$.

Ответ: $x_1=5$, $x_2=-1$.

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ

Решим графически уравнение $|x-2|=3$.

Строим графики функций:$y=|x-2|$ и $y=3$.

а) для построения графика функции $y=|x-2|$, построим график функции $y=x-2$- это прямая, пересекающая ось OX в точке (2; 0) а ось OY в точке

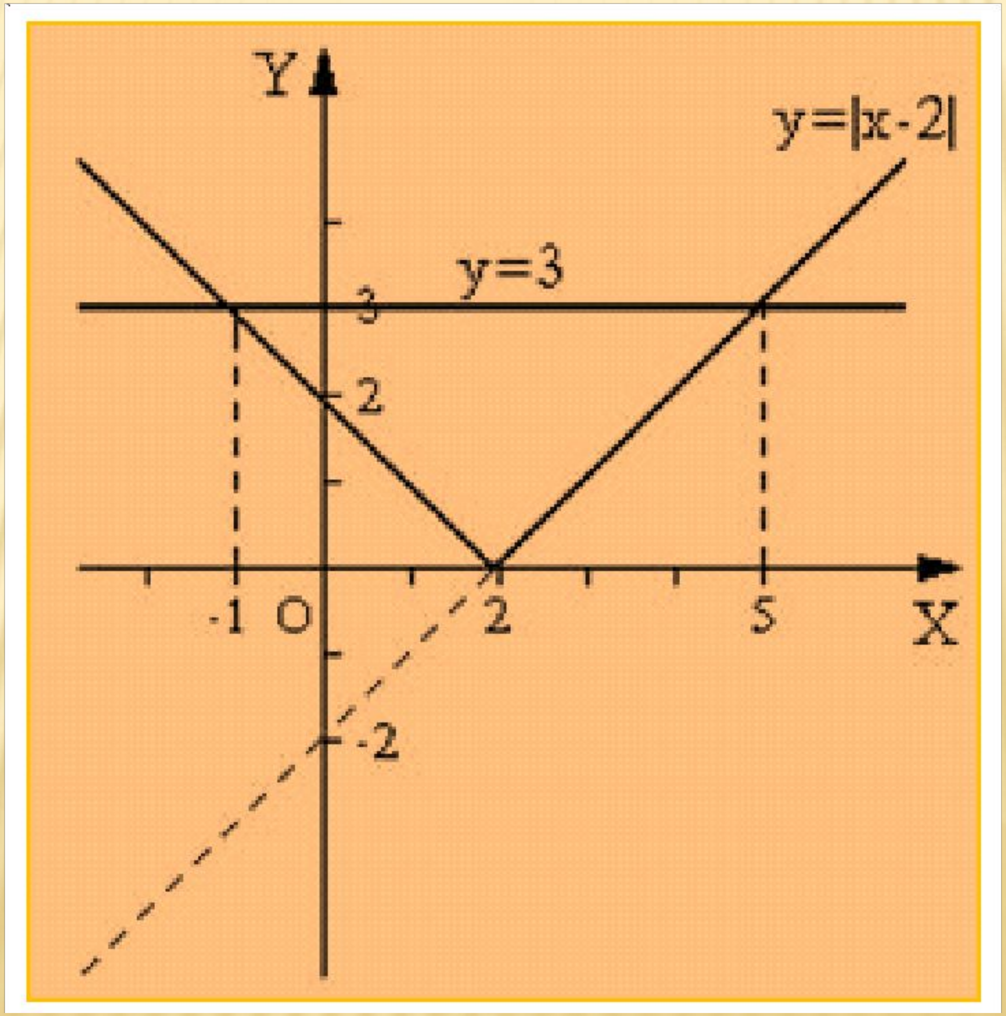
(0; 2). Затем часть прямой, лежащую ниже оси OX зеркально отобразим относительно оси OX.

б) график функции $y=3$- прямая, параллельная оси OX и проходящая через точку (0; 3) на оси OY.

Абсциссы точек пересечения графиков функций дадут решения уравнения. Прямая $y=3$ пересеклась с графиков функции $y=|x-2|$ в точках с

координатами (-1; 3) и (5; 3), следовательно, решениями уравнения будут абсциссы точек: $x=-1, x=5$.

Ответ: $x_1=5$, $x_2=-1$



Y
y=|x-2|
y=3
3
2
-2
-1
O
2
5
X

РЕШИМ УРАВНЕНИЕ:

$$|5x + 2| = 3 - 3x$$

Поскольку в левой части модуль, а в правой части – выражение, содержащее переменную, необходимо потребовать чтобы это выражение было неотрицательным. Получим две смешанных системы:

$$\begin{cases} 5x + 2 = 3 - 3x \\ 3 - 3x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -5x - 2 = 3 - 3x \\ 3 - 3x \geq 0. \end{cases}$$

Решим каждую систему:

1) $\begin{cases} 5x + 2 = 3 - 3x \\ 3 - 3x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8x = 1 \\ -3x \geq -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ x \leq 1 \end{cases}$, $x=\frac{1}{8}$.

2) $\begin{cases} 5x + 2 = 3x - 3 \\ 3 - 3x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = -5 \\ x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$,

$x=-2\frac{1}{2}$

Ответ: $x_1 = -2\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{8}$.

РЕШИМ УРАВНЕНИЕ

$$\left|2-\left|3-2|x|\right|\right|=1$$

Справа 1-const. Раскрываем последовательно внешний модуль:

$$\left|2-\left|3-2|x|\right|\right|=1$$

$$2-\left|3-2|x|\right|=1$$
$$\left|3-2|x|\right|=1$$

$$3-2|x|=1$$
$$|x|=1$$
$$x=\pm1$$

$$3-2|x|=-1$$
$$|x|=2$$
$$x=\pm2$$

$$2-\left|3-2|x|\right|=-1$$
$$\left|3-2|x|\right|=3$$

$$3-2|x|=3$$
$$|x|=0$$
$$x=0$$

$$3-2|x|=-3$$
$$|x|=3$$
$$x=\pm3$$

Ответ: -3,-2,-1,0,1,2,3.

Итак,

мы рассмотрели уравнения трех типов:

I тип: $|f(x)| = a,$

II тип: $|f(x)| = g(x),$

III тип: $|f(x)| = |g(x)|.$

НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

Решение неравенств с модулем можно записать в виде следующей схемы:

РЕШИМ НЕРАВЕНСТВА:

Пример №1

$|2x - 1| < 3$

$$\begin{cases} 2x-1 < 3, \\ 2x-1 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Ответ: (-1;2)

Пример №2

$|2x - 1| > 3$

$$\left[\begin{array}{l} 2x-1 > 3, \\ 2x-1 < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x < -1, \quad x > 2$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

РЕШИМ НЕРАВЕНСТВО:

$$|2x - 1| \leq |3x + 1|$$

Возведем обе части неравенства в квадрат,
получим неравенство $(2x - 1)^2 \leq (3x + 1)^2$,
$4x^2-4x+1 \leq 9x^2+6x+1$,
$5x^2+10x \geq 0$,
$x(x+2) \geq 0$, откуда находим $x \leq -2, x \geq 0$.
Ответ: $x \leq -2, x \geq 0$.

Решим неравенство:

$$|x-3|+|x+2|-x>5.$$

1)Приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля

$x-3=0$, $x+2=0$,

$x=3.$ $x=-2.$

2)Решим неравенство на следующих промежутках: $(-\infty;-2)$, $[-2;3)$, $[3;+\infty)$.

а) Если $x<-2$, то неравенство примет вид $-x+3-x-2-x>5$, т. е. $x<-\frac{4}{3}$.

Из соотношений $x<-2$ и $x<-\frac{4}{3}$ следует, что $x<-2$ является решением данного неравенства.

б) Если $-2\leq x<3$, то неравенство примет вид $-x+3+x+2-x>5$, т.е. $x<0$.

Из соотношений $-2\leq x<3$ и $x<0$, следует, что $-2\leq x<0$ является решением данного неравенства.

в) Если $x\geq 3$, то неравенство примет вид $x-3+x+2-x>5$, т.е. $x>6$, что и является решением данного неравенства.

Объединив найденные решения данного неравенства на различных промежутках, получим решение неравенства: $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

Конец