Комбинаторика

Комбинаторика

- *Комбинаторика* – раздел математики, посвященный подсчету количеств разных комбинаций элементов некоторого, обычно конечного, множества

Го́тфрид Ви́льгельм Ле́йбниц
(21июня1646-14 ноября 1716) — немецкий философ, математик, логик, физик, юрист, языковед, историк, дипломат

Блез Паска́ль
(19 июня 1623 — 19 августа 1662) — французский математик, механик, физик, литератор и философ

Задачи

- 1) Сколькими способами 6 разных папок с документами можно расставить на полке?
- 2) При расследовании хищения установлено, что у преступника шестизначный номер телефона, в котором все цифры различны и нет нулей. Следователь, полагая, что перебор этих номеров достаточно будет одного - двух часов, доложил о раскрытии преступления. Прав ли он?
- 3) На иномарке, скрывшейся с места ДТП, был трехзначный номер, в котором первая цифра 2. Сколько номеров необходимо проверить по картотеке ГИБДД, чтобы найти нарушителя?

Принципы комбинаторики Принцип сложения

- *Основные принципы комбинаторики:*
- Принцип сложения.
- Принцип умножения.

Принцип сложения

- **Задача 1**: В группе 7 девушек и 8 юношей. Сколькими способами можно выбрать 1 человека для работы у доски?

  Решение: 7+8=15

- **Задача 2:** В группе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек – «5» по философии. В сессии 2 экзамена. Известно, что 4 человека сдали сессию отлично. Сколько человек имеют хотя бы одну пятерку в сессии?

  Решение: 7+9-4=12

Принцип сложения

- Принцип сложения: Если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами, то объект «***a или b***» можно получить ***n+m-k*** способами, где ***k*** – это количество повторяющихся способов.

- Теоретико-множественная формулировка

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Принцип умножения

- **Задача**: На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее?
- **Решение:** 5·5=25.
- Принцип умножения: если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами, то объект ***«a и b»*** можно получить ***m·n*** способами.
- Теоретико-множественная формулировка

$$\left|A \times B\right| = \left|A\right| \cdot \left|B\right|$$

Задачи

- Из 3 экземпляров учебника алгебры, 5 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника истории нужно выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. По принципу умножения

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Задачи

- От дома до школы существует 6 маршрутов. Сколькими способами можно дойти до школы и вернуться, если дорога «туда» и «обратно» идет по разных маршрутам?

Решение. По принципу умножения

$$6 \cdot 5 = 30$$

Задачи

- В корзине лежат 7 различных яблок и 5 апельсинов. Яша выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Полина берет яблоко и апельсин. В каком случае Полина имеет большую свободу выбора: если Яша взял яблоко или если он взял апельсин?

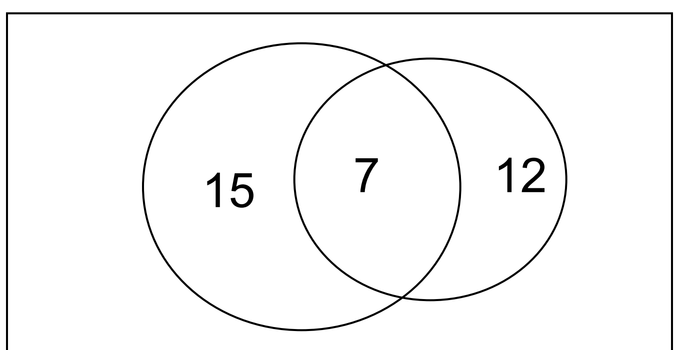
Решение. Если Яша взял яблоко, то по принципу умножения Полина может осуществить свой выбор $6 \cdot 5 = 30$ способами. Если Яша взял апельсин, то - $7 \cdot 4 = 28$ способами.

В первом случае у Полины свобода выбора большая.

Задачи

- В классе 24 человека. Из них 15 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, 7 – оба языка. сколько человек не изучают ни одного языка?
- Решение. По принципу сложения 2 получим количество людей, изучающих английский или немецкий 15+12-7=20. Из общего числа учеников класса вычтем полученное количество людей.

24-20=4. 4 человека не изучает ни одного языка.



Замечание

$n!$ читается «n факториал» и вычисляется по формуле

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

- Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

- Считают, что 0!=1

Перестановки без повторений

- **Определение 1**
- Перестановкой ***n*** элементного множества называется упорядоченный набор неповторяющихся элементов этого множества длины ***n.***

- **Пример:**

$A = \{a; b; c;\}$

- перестановки: $(a;b;c);(b;a;c);(a;c;b);(b;c;a);(c;a;b);(c;b;a)$
- Число размещений ***n*** – элементного множества обозначают $\boldsymbol{P_n}$ и вычисляется по формуле:

$$P_n = n!$$

- **<u>Задача</u>**: В команде 6 человек. Сколькими способами можно осуществить построение?

$$P_6 = 6! = 720$$

Перестановки с повторениями

- **Определение 2**

- Число перестановок n – элементов, в котором n_i элементов *i* –того типа ($i = \overline{1,k}$) вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! n_2! ... . n_k!}$$

<u>**Задача**</u>**:** Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен», а в слове «математика»?

Решение:

$$7! = 5040$$

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

Размещение без повторений

- **Определение 3**

k -размещением без повторений *n*–элементного множества называется упорядоченный набор длины ***k*** попарно различных элементов данного множества.

Пример: $A=\{a;b;c\}$ - 2 размещения: $(a;b);(a;c);(b;c);(b;a);(c;a);(c;b)$

Число k- размещений n элементного множества обозначается A_n^k и вычисляется по формуле:

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>Задача</u>: В соревновании участвуют 12 команд, сколькими способами они могут занять призовые места?

$$A_{12}^3=\frac{12!}{9!}=12\cdot 11\cdot 10=1320$$

Размещения с повторениями

- **Определение 4**
- k – размещением с повторениями n–элементного множества называется упорядоченный набор длины k элементов данного множества.

- **Пример**

$A=\{a;b;c\}$

- 2- размещения с повторениями:

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b);(a;a);(b;b);(c;c)$$

Число k – размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

<u>**Задача**</u>: Сколько существует номеров машин?

$$\overline{A}_{10}^3 \cdot \overline{A}_{12}^3 = 12^3 \cdot 10^3$$

Решение задач

Задачи

- 1)Сколькими способами можно составить список из 8 студентов, если нет полного совпадения ФИО?
- **Решение**

$$P_8 = 8! = 40320$$

Задачи

- 2)Сколькими способами можно составить список 8 студентов, так, чтобы два указанных студента располагались рядом?
- **Решение**

Можно считать двоих указанных студентов за один объект и считать число перестановок уже 7 объектов, т.е.

$$P_7 = 7! = 5040$$

Так как этих двоих можно переставлять местами друг с другом, необходимо умножить результат на 2!

$$P_7 \cdot 2! = 7! \cdot 2! = 5040 \cdot 2 = 10080$$

Задачи

- 3) Сколькими способами можно разделить 11 спортсменов на 3 группы по 4, 5 и 2 человека соответственно?
- **Решение.** Сделаем карточки: четыре карточки с номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3. Будем раздавать эти карточки с номерами групп спортсменам, и каждый способ раздачи будет соответствовать разбиению спортсменов на группы. Таким образом нам необходимо посчитать число перестановок 11 карточек, среди которых четыре карточки с одинаковым номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3.

$$P(4,5,2) = \frac{11!}{4!5!2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 6930$$

Задачи

- 4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

Задачи

- 5)Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры различны?
- **Решение.** В разряде единиц тысяч не может быть нуля, т.е возможны 9 вариантов цифры.

  В остальных трех разрядах не может быть цифры, стоящей в разряде единиц тысяч (так как все цифры должны быть различны), поэтому число вариантов вычислим по формуле размещений без повторений из 9 по 3

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

По правилу умножения получим $9 \cdot A_9^3 = 4536$

Задачи

- 6)Сколько существует двоичных чисел, длина которых не превосходит 10?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений с повторениями из двух элементов по 10

$$\overline{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$$

Задачи

- 7)В лифт 9 этажного дома зашли 7 человек. Сколькими способами они могут распределиться по этажам дома?
- **Решение.** Очевидно, что на первом этаже никому не надо выходить. Каждый из 7 человек может выбрать любой из 8 этажей, поэтому по правилу умножения получим

$$\underbrace{8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8}_{7} = 8^7 = 2097152$$

- Можно так же применить формулу для числа размещений с повторениями из 8 (этажей) по 7(на каждого человека по одному этажу)

$$\overline{A}_8^7 = 8^7$$

Задачи

- 8)Сколько чисел, меньше 10000 можно написать с помощью цифр 2,7,0?
- **Решение.** Так как среди цифр есть 0, то, например запись 0227 соответствует числу 227, запись 0072 соответствует числу 72, а запись 0007 соответствует числу 7. Таким образом, задачу можно решить, используя формулу числа размещений с повторениями

$$\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$$