

# Демографический анализ

ЛЕКЦИЯ 3

СМЕРТНОСТЬ

# План лекции:

---

1. Краткая история разработки таблицы смертности
2. Демографический метод построения таблицы смертности

# КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ

---

История попыток вывести закон,  
связывающий возраст человека и уровень  
смертности

Появление аппарата таблиц смертности –  
результат

1. развития математики (теории вероятностей)
2. потребностей практики – развитие института ренты
3. появления данных о смертности в разных возрастах – **регистры рантье**

---

## **Запрет страхования жизни**

1570 г. – Испания

1598 г. – Голландия

1681 г. – Франция

**Смерть представлялась**

• как небесная кара  
или

• как проявление случайности

## 1662 год: Джон Граунт (*John Graunt*)

---



(1620-1674 )

- "Естественные и политические наблюдения, перечисленные в прилагаемом оглавлении и сделанные на основе бюллетеней о смертности по отношению к управлению, религии, торговле, росту, воздуху, болезням и другим изменениям названного города. Сочинение Джона Граунта гражданина Лондона»

<http://demoscope.ru/weekly/2006/0201/biblio05.php>

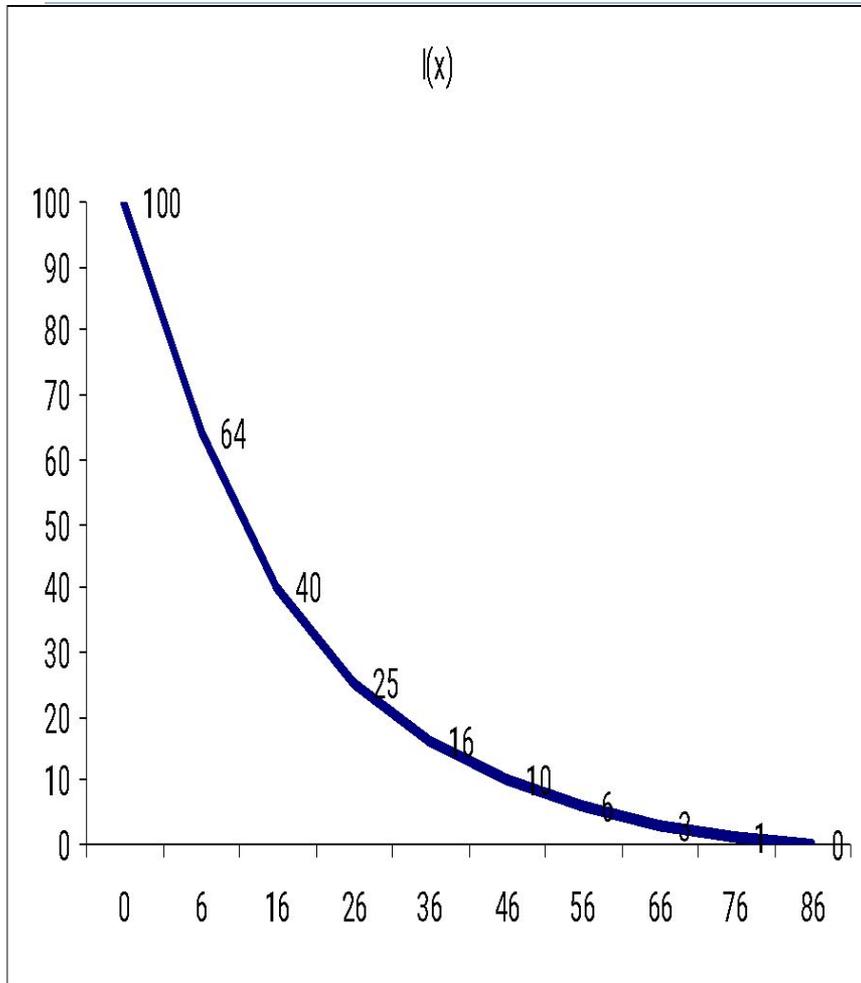
## Граунт: идея таблицы смертности

Из <b>100 зачатий</b> умирают в течение		Доживают до возраста
Первых 6 лет	36	6 лет – 64 человека
Следующих 10 лет	24	16 лет – 40
Следующих 10 лет	15	26 лет – 25
Следующих 10 лет	9	36 лет – 16
Следующих 10 лет	6	46 лет – 10
Следующих 10 лет	4	56 лет – 6
Следующих 10 лет	3	66 лет – 3
Следующих 10 лет	2	76 лет – 1
Следующих 10 лет	1	86 лет – 0

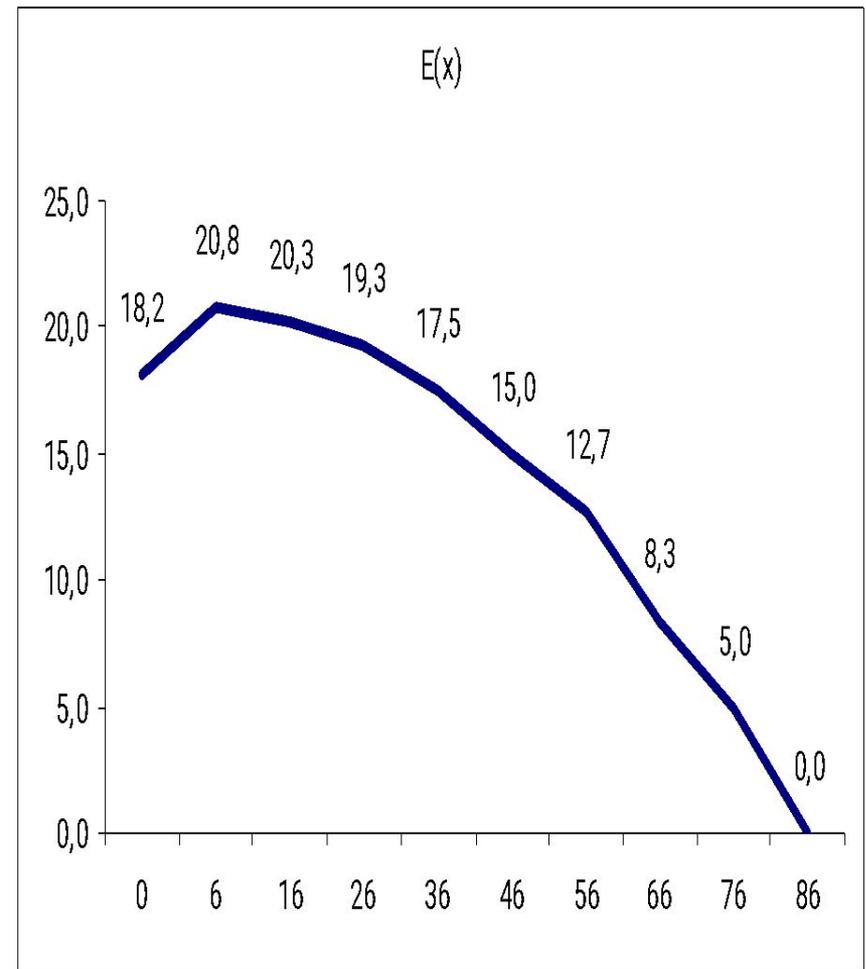
## Заслуги Граунта:

- Сама идея таблицы: сопоставление возраста и чисел умирающих
- Придумал корень таблицы – 100 зачатий
- Вывел понятие частоты и средней
- Впервые проанализировал качество данных
- Впервые осуществил:
  - анализ роста численности населения;
  - сравнение численности населения Лондона и Парижа;
  - оценку численности населения Англии;
  - анализ частоты убийств;
  - анализ летальности хронических болезней;
  - анализ смертности при родах и пр.

## Функция дожития



## Ожидаемая продолжительность жизни





1680 год: Г.В. Лейбниц

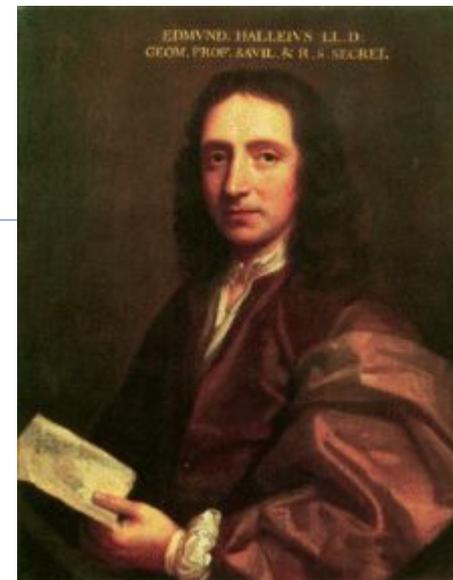
«Наброски некоторых новых соображений относительно человеческой жизни и числа людей»  
(опубликовано через 200 лет)

- Каждому возрасту соотнес вероятность умереть
- Рассчитал среднюю продолжительность жизни для возраста  $0$  лет и для  $x$  лет
- Выдвинул гипотезу стационарного населения:  
**«рождаемость людей всегда остается постоянной и настолько равна смертности, что общая численность людей остается практически неизменной, и даже число людей в каждом возрасте практически не меняется»**

1693 год: Э. Галлей

доклад в Королевском обществе:

«Оценка смертности человека на основе старых таблиц рождения и отпеваний г. Бреслау с попыткой рассчитать пожизненную ренту»



- Предложил **Метод смертных списков** для расчета таблиц смертности:

исходный показатель – числа умирающих

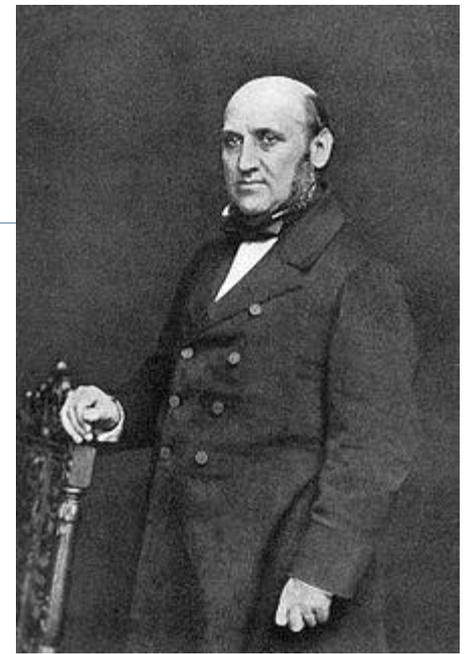
$${}_n d_x = \frac{{}_n M_x}{M}$$

- Рассчитал таблицу смертности для реального закрытого населения
- Предложил идею **закрытого населения**:  
«Изучение смертности требует, чтобы по возможности те люди, которых мы изучаем, не мигрировали и умирали там, где были рождены. То есть чтобы не было ни роста населения за счет иммиграции, ни убыли за счет эмиграции»
- Предложил методы расчета страховых тарифов

## 1842 год: У. Фарр

---

- Предложил демографический метод расчета таблиц смертности (одновременно с А.Кетле)
- Показал различия *коэффициента смертности* и **вероятности умереть**, их взаимосвязь
- Сравнил коэффициенты смертности по регионам и по профессиям



Формула Кетле-Фарра (исторически первая, положившая начало **демографическому методу** построения таблиц смертности), построена с допущением линейного изменения числа смертей в возрастных интервалах

Однолетние  
возрастные интервалы:

$${}_1q_x = \frac{2 \cdot {}_1m_x}{2 + {}_1m_x}$$

n-летние возрастные  
интервалы:

$${}_nq_x = \frac{2n \cdot {}_nm_x}{2 + n \cdot {}_nm_x}$$

$${}_nq_i \leq 1$$

---

В России первые таблицы смертности, рассчитанные современным, демографическим методом, появились только в начале XX века, после переписи 1897 года, поскольку впервые были получены данные для расчета знаменателя возрастных коэффициентов смертности:  ${}_n P_x$

# Построение таблиц смертности для условного поколения

---

- Главная проблема заключается в переходе от  ${}_n m_x$  к  ${}_n q_x$ . Решается с помощью следующего уравнения (Гревилл – 1943г., Чанг – 1968г.)

$${}_n q_x = \frac{{}_n \cdot {}_n m_x}{1 + (n - {}_n a_x) \cdot {}_n m_x}$$

${}_n a_x$

Время, прожитое до наступления смерти умершими в возрастном интервале, или доля возрастного интервала, прожитая до смерти умершими в данном интервале. В формуле Фарра-Кетле равно  $\frac{1}{2}$ .

# Формула Гревилла для построения кратких таблиц смертности

---

Одна из возможных формул перехода от  ${}_n m_x$  к  ${}_n q_x$ :

$${}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{\frac{1}{n} + {}_n m_x \cdot \left(0.5 + \frac{n}{12} \cdot ({}_n m_x - 0,095)\right)}$$

# Литература:

- Денисенко М.Б., Калмыкова Н.М. Демография, раздел 3
- Preston S., Heuveline P., Guillot M. Demography: Measuring and Modeling Population Processes, главы 2 и 3
- Дарский Л.Е., Тольц М.С. Демографические таблицы. М., 2013. Раздел II  
[http://www.demoscope.ru/weekly/knigi/darskij\\_tolc/darskij\\_tolts.pdf](http://www.demoscope.ru/weekly/knigi/darskij_tolc/darskij_tolts.pdf)
- The Human Mortality Database: <http://www.mortality.org/>
- База РЭШ [http://demogr.nes.ru/index.php/ru/demogr\\_indicat/data](http://demogr.nes.ru/index.php/ru/demogr_indicat/data)

# Демографический анализ

ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ

# План лекции:

1. Демографические таблицы: виды, требования к построению
2. Таблица смертности: построение, взаимосвязь показателей

# ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ -

- УПОРЯДОЧЕННЫЕ РЯДЫ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ТЕЧЕНИЕ ОДНОГО ИЛИ НЕСКОЛЬКИХ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КОГОРТЕ
- ЧИСЛОВЫЕ МОДЕЛИ, ОТРАЖАЮЩИЕ
  1. ИНТЕНСИВНОСТЬ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ КОГОРТЫ
  2. ИЗМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ САМОЙ КОГОРТЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

# Демографические таблицы – один из наиболее распространенных видов представления демографических процессов в реальной или условной когорте

- XVII век – таблицы смертности (Дж. Граунт)
- XVIII век – таблицы брачности (И. Мюре)
- XIX век – таблицы рождаемости (Р. Бек)

# Демографические таблицы

- **ОБЩИЕ** –

для повторяющихся демографических событий:

- рождения
- браки

**Основной показатель** – коэффициент

- **СПЕЦИАЛЬНЫЕ** –

для неповторяющихся демографических событий

- смерти
- рождения по очередности
- браки по очередности

**Основной показатель** – вероятность наступления события

# Демографические таблицы

- **ПРОСТЫЕ** –

один демографический процесс

таблицы единственного  
выбытия

(Single Decrement Table)

- **КОМБИНИРОВАННЫЕ** –

несколько демографических процессов

таблицы множественного  
выбытия

(Multiple-Decrement Table)

# Основные распределения любой таблицы

1. распределение **единственного выживания**  ${}_1q_i$ , т.е. число лиц в точном возрасте  $i$ , для которых не наступило изучаемое неповторяющееся событие
2. распределение вероятностей (рисков)  ${}_1q_i$  наступления события между точными возрастами  $i$  и  $i+1$ .

$${}_1q_i = \frac{{}_1e_i}{N_i}$$

3. распределение неповторяющихся событий  ${}_1e_i$ , наступивших в возрасте  $i$  исполнившихся лет (т.е. между точными возрастами  $i$  и  $i+1$ )

$${}_1e_i = N_i - N_{i+1}$$

Еще одно распределение можно вывести из предыдущих:

вероятность  $p_i$  ненаступления события между точными возрастaми  $i$  и  $i+1$ :  ${}_1p_i = \frac{N_{i+1}}{N_i} = 1 - {}_1q_i$

ТАБЛИЦА ЕДИНСТВЕННОГО ВЫБЫТИЯ –  
соотношение показателей

$${}_n q_i = {}_n e_i / N_i$$

$$N_i \cdot {}_n q_i = {}_n e_i$$

$$N_i - {}_n e_i = N_{i+1}$$

# Вероятность: дополнительные замечания

Вероятность наступления события в каждом интервале является средним (или усредненным) риском, относящимся ко всем членам когорты, дожившим до начала данного интервала

Если население гетерогенно (неоднородно) по отношению к изучаемому риску, то с теми, у кого более высокая вероятностью наступления данного события, событие случится в среднем раньше, чем с прочими.

В результате по мере отдаления от исходного события когорты выживающие все больше будут представлять собой индивидов с меньшим риском.

Этот процесс называют селекцией (survivor bias).

# Примеры селекции

*Иммигранты в среднем демонстрируют лучшее состояние здоровья по сравнению с коренным населением*

- ***Healthy migrant effect***

Селективность самого процесса иммиграции: мигрируют люди с лучшими характеристиками здоровья

- ***Salmon Bias***

В старости или заболев, мигранты возвращаются в страну выбытия, и лучшее состояние здоровья иммигрантов в принимающей стране может объясняться недорегистрацией смертей и заболеваний иммигрантов и, как следствие, – более низкими соответствующими коэффициентами

Если имеются агрегированные данные, заранее нельзя понять, с чем связано изменение риска по мере **отдаления** от исходного события когорты, поскольку возможны 2 варианта:

- влияние «возраста», то есть простое отдаление от момента исходного события (actual duration effect) меняет риск в когорте
- влияние селекции, вызванное гетерогенностью населения

Снижение вероятности со временем может быть вызвано любым из 2х факторов. Рост вероятности связан всегда с отдалением от исходного события (duration effect), т.к. гетерогенность повышает сопротивляемость населения к данному риску. Чтобы скорректировать влияние гетерогенности, нужно постараться понять ее причины и выделить **однородные** подгруппы населения. Другой способ учета гетерогенности - **биографический анализ (event history analysis)**

# ТАБЛИЦА СМЕРТНОСТИ (life tables, tables de mortalité)

Числовая МОДЕЛЬ смертности  
реального или условного поколения,  
отражающая

- общий уровень смертности
- возрастные особенности смертности

## Таблицы смертности для условного и реального поколения

- Для построения таблиц смертности **реального поколения** требуется собирать информацию в течение почти 100-летнего периода, она будет отражать закономерности вымирания определенной когорты, но с некоторым опозданием
- Таблицы условного поколения – оценки смертности **гипотетического поколения**. Они оперативно отражают изменение уровня смертности во времени и влияние на смертность

При построении таблицы  
используется **устойчивая**  
**система показателей,**  
рекомендованная в конце XIX  
века Лондонским институтом  
актуариев

Общий вид краткой таблицы смертности. Мужчины, Россия, 2001

$x$	$n m_x^{\text{табл}}$	$n q_x$	$n p_x$	$l_x$	$n d_x$	$n L_x$	$T_x$	$E_x$
0	0,0168	0,0167	0,9833	100000	1666	99178	5900545	59,0
1	0,0011	0,0044	0,9956	98334	432	392526	5801367	59,0
5	0,0006	0,0030	0,9970	97902	293	488835	5408841	55,2
10	0,0006	0,0030	0,9970	97609	292	487370	4920006	50,4
15	0,002	0,0100	0,9900	97316	969	484348	4432636	45,5
20	0,0045	0,0223	0,9777	96348	2146	476779	3948289	41,0
25	0,0058	0,0286	0,9714	94202	2696	464772	3471510	36,9
30	0,007	0,0344	0,9656	91506	3152	450231	3006738	32,9
35	0,0094	0,0460	0,9540	88355	4064	432339	2556507	28,9
40	0,0131	0,0636	0,9364	84291	5358	408974	2124168	25,2
45	0,0184	0,0882	0,9118	78933	6962	378372	1715193	21,7
50	0,0257	0,1212	0,8788	71971	8720	339314	1336821	18,6
55	0,0342	0,1582	0,8418	63251	10004	292512	997507	15,8
60	0,047	0,2112	0,7888	53247	11245	239248	704995	13,2
65	0,0607	0,2645	0,7355	42002	11110	183031	465748	11,1
70	0,0829	0,3439	0,6561	30892	10625	128167	282717	9,2
75	0,1034	0,4102	0,5898	20267	8314	80406	154550	7,6
80	0,1407	0,5153	0,4847	11953	6160	43780	74144	6,2
85+	0,1908	1	0	5793	5793	30364	30364	5,2

# ШКАЛА ТАБЛИЦЫ

X

- Единственная независимая переменная, которая как правило измеряется в годах, но может измеряться в днях, месяцах (например, при изучении младенческой смертности)
- Шкала таблицы: время, прошедшее с момента формирования когорты (от исходного события)
- В зависимости от шага шкалы (длины возрастного интервала) таблицы бывают:
  - полные (шаг = 1 году)
  - краткие (шаг = 5 или 10 годам)

# КОРЕНЬ ТАБЛИЦЫ

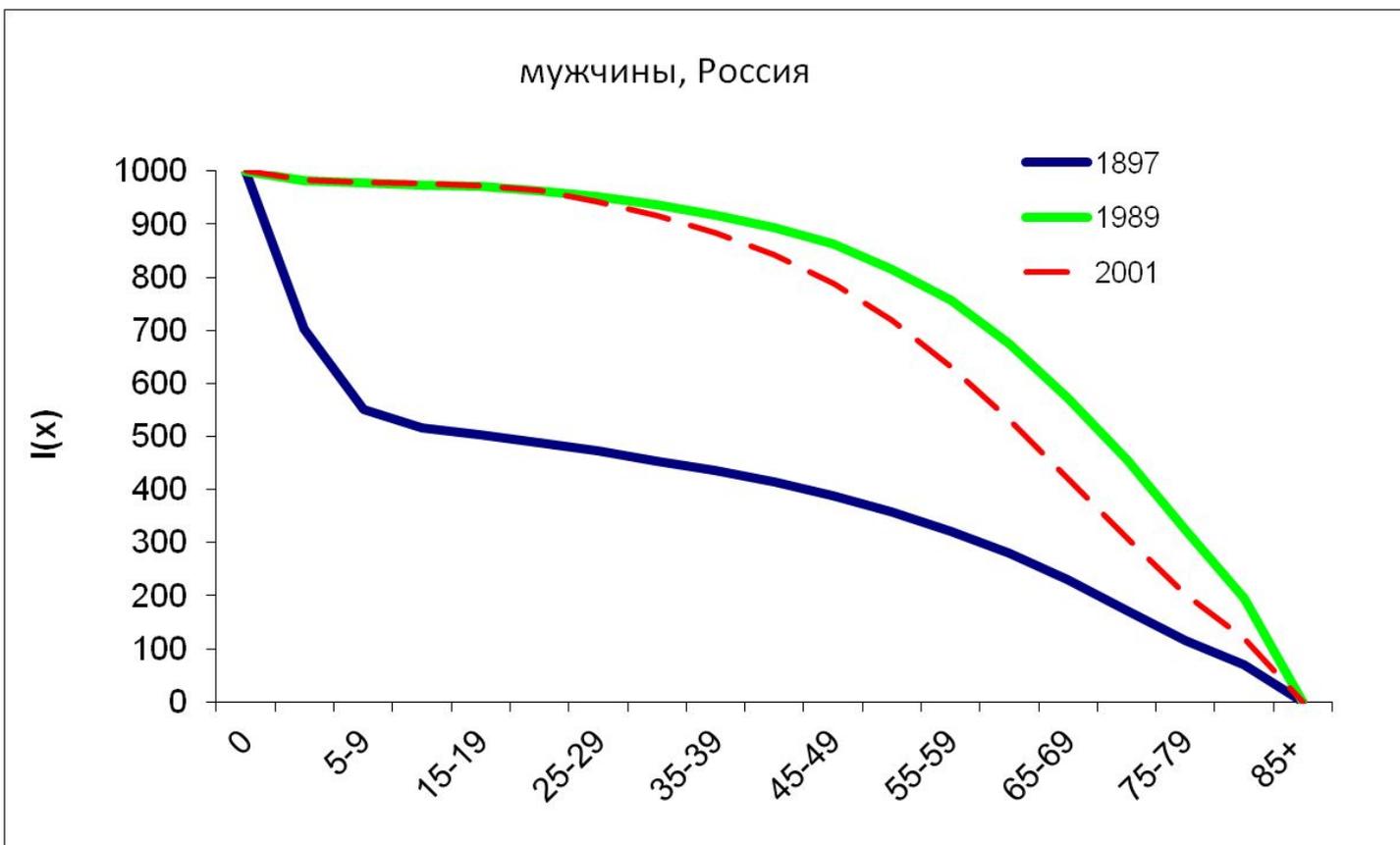
$I_0$

Все показатели таблицы рассчитываются в едином масштабе. Масштаб задается **КОРНЕМ ТАБЛИЦЫ** – условной исходной численностью когорты (число родившихся). Обычно 100 000 человек.

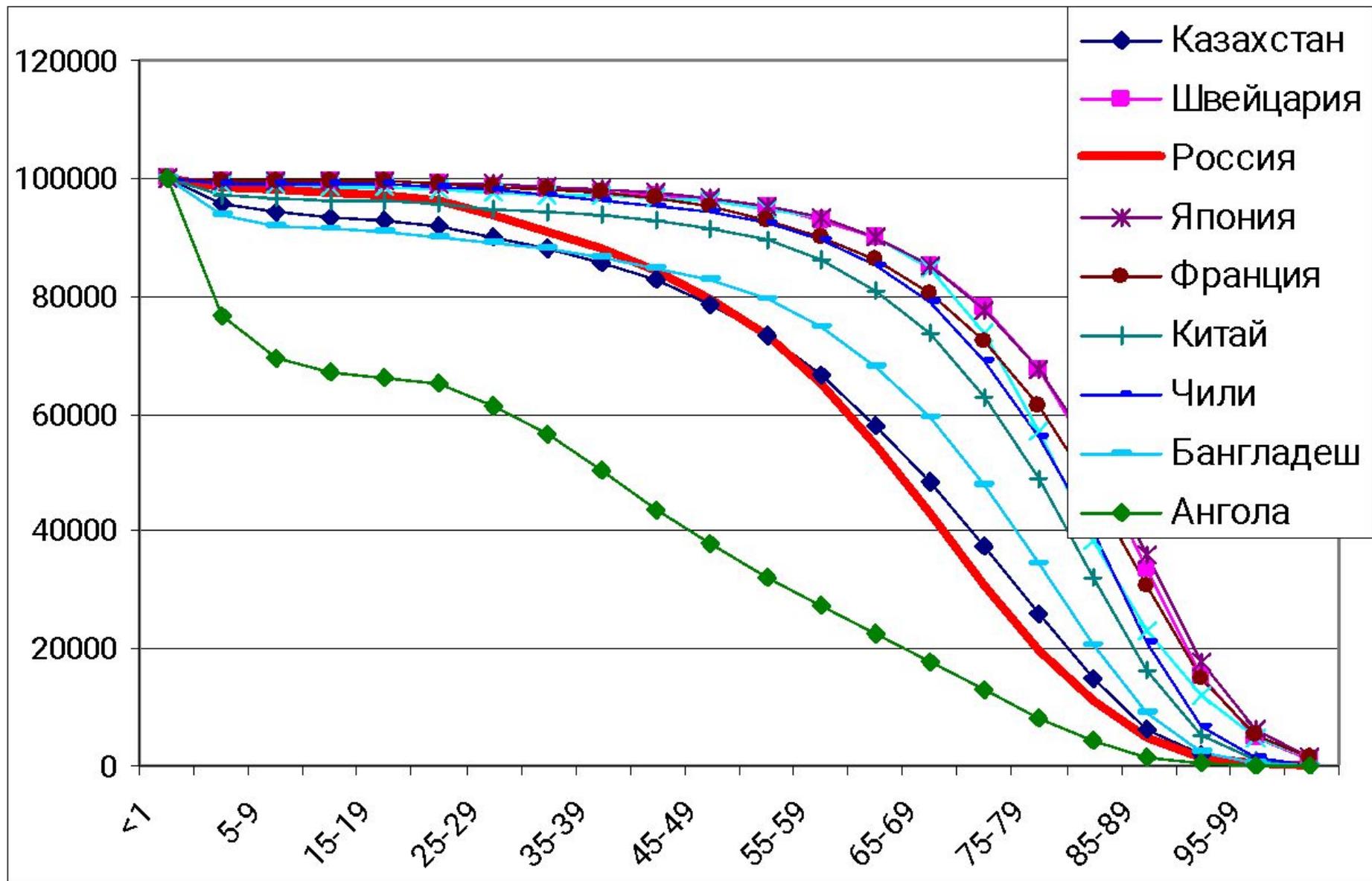
$l_x$  –

ЧИСЛО ДОЖИВАЮЩИХ ДО ТОЧНОГО ВОЗРАСТА  $x$

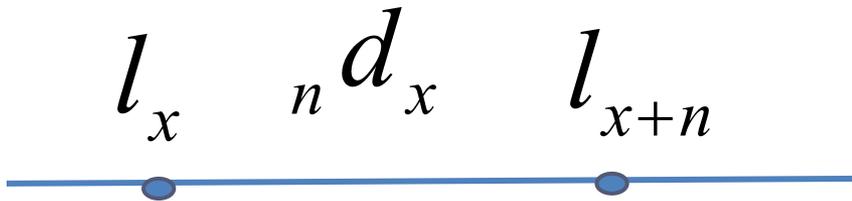
$l(x)$  – функция дожития



# $I(x)$



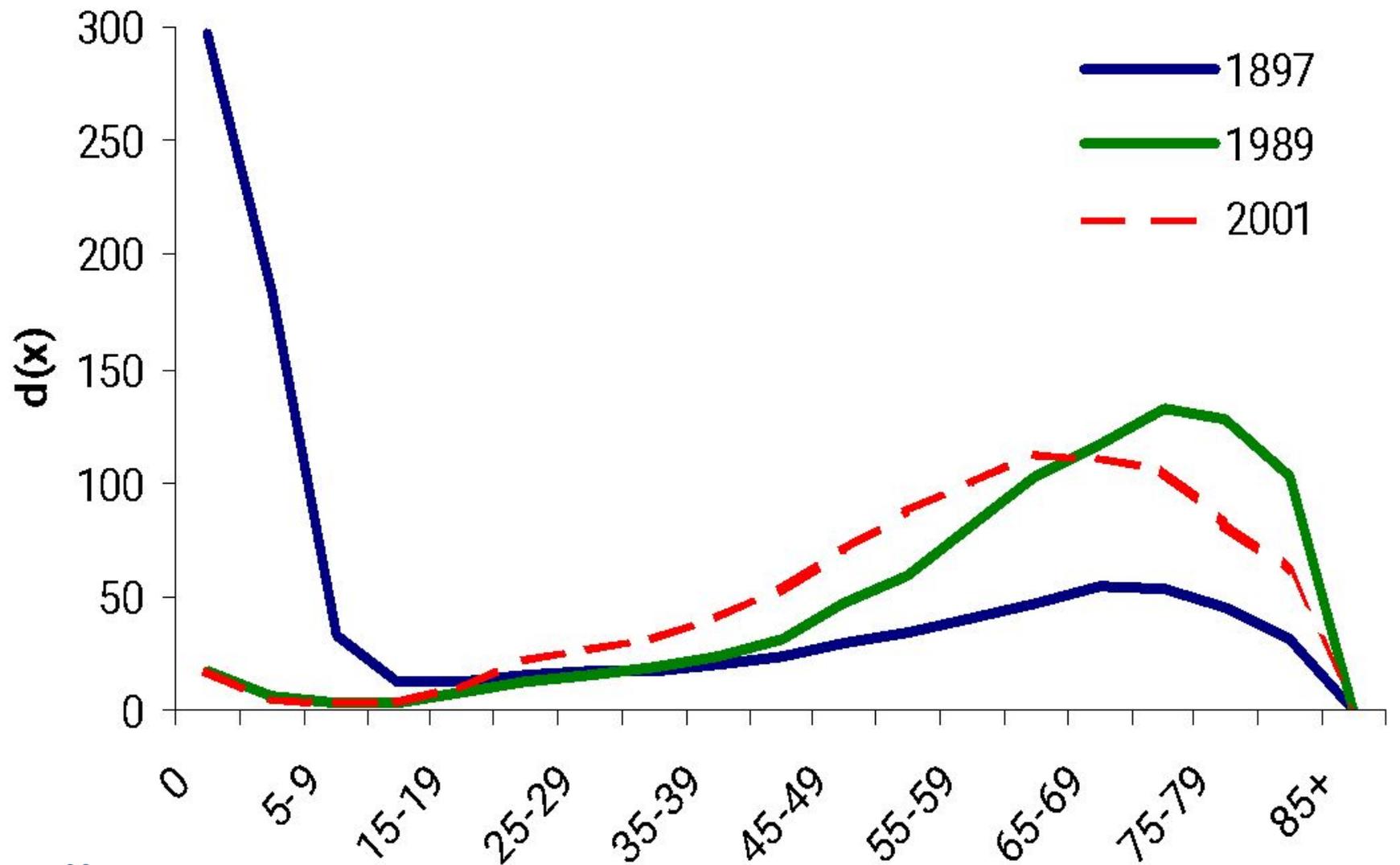
${}_n d_x$  – число умирающих в интервале  
возраста от  $x$  до  $x+n$



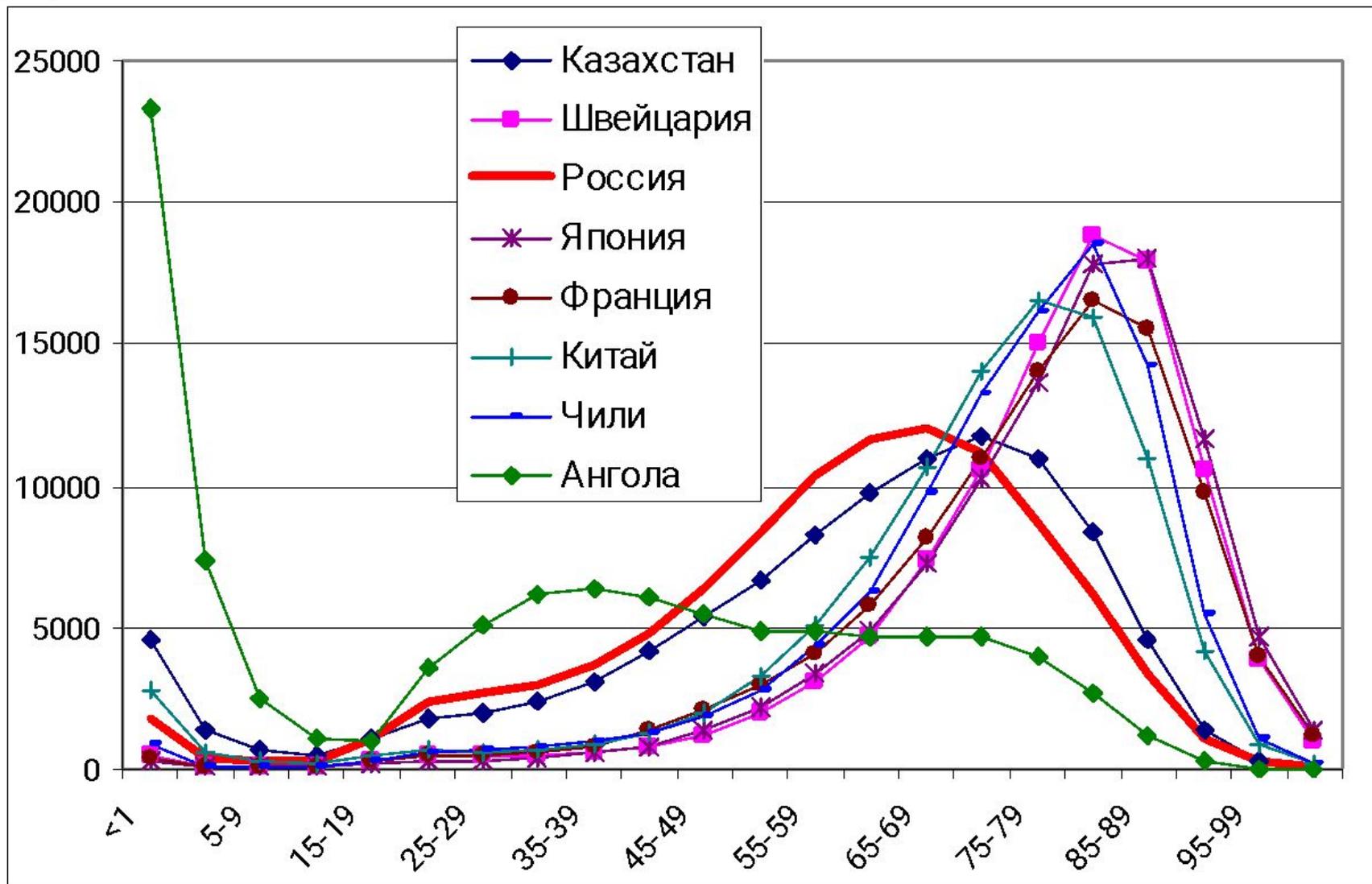
$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

$$\sum_0^w {}_n d_x = l_0$$

# Мужчины, Россия

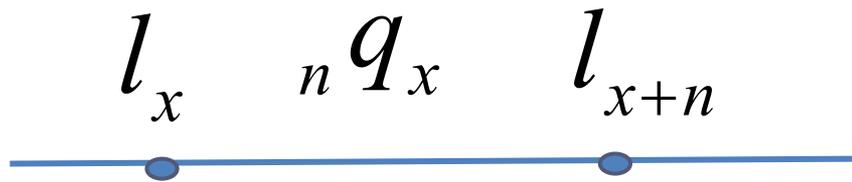


$d(x)$



${}_n p_x$  - вероятность выжить в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$

${}_n q_x$  - вероятность умереть в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$



$$\frac{l_x}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x} + \frac{{}_n d_x}{l_x} = {}_n p_x + {}_n q_x$$

$$1 = {}_n p_x + {}_n q_x$$

${}_n m_x$ 

– табличный  
коэффициент  
смертности в  
интервале возраста от  
 $x$  до  $x+n$

 ${}_n q_x$ 

– вероятность  
умереть в интервале  
возраста от  $x$  до  $x+n$

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$$

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x}$$

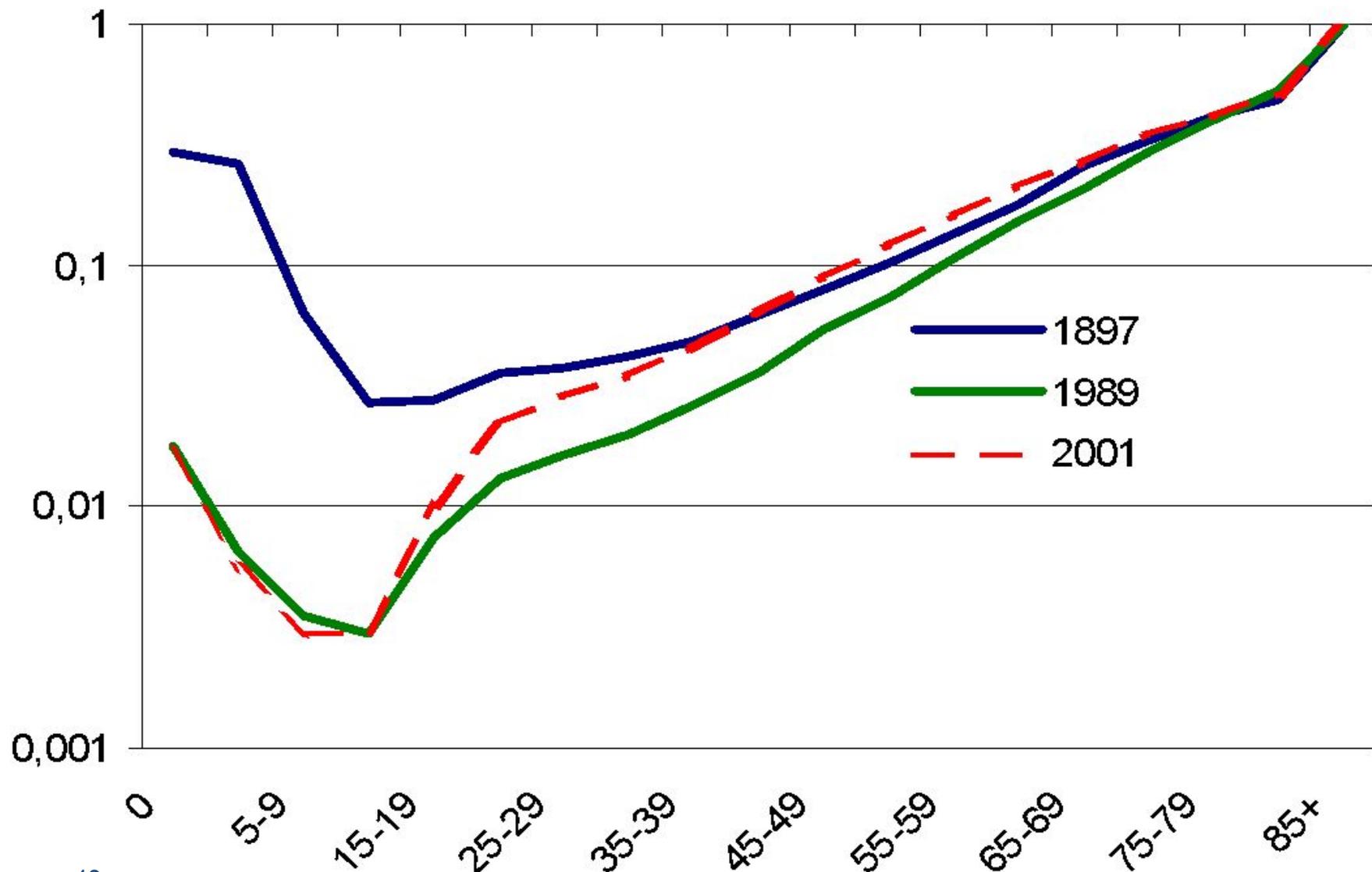
Величина коэффициента не  
зависит от длины

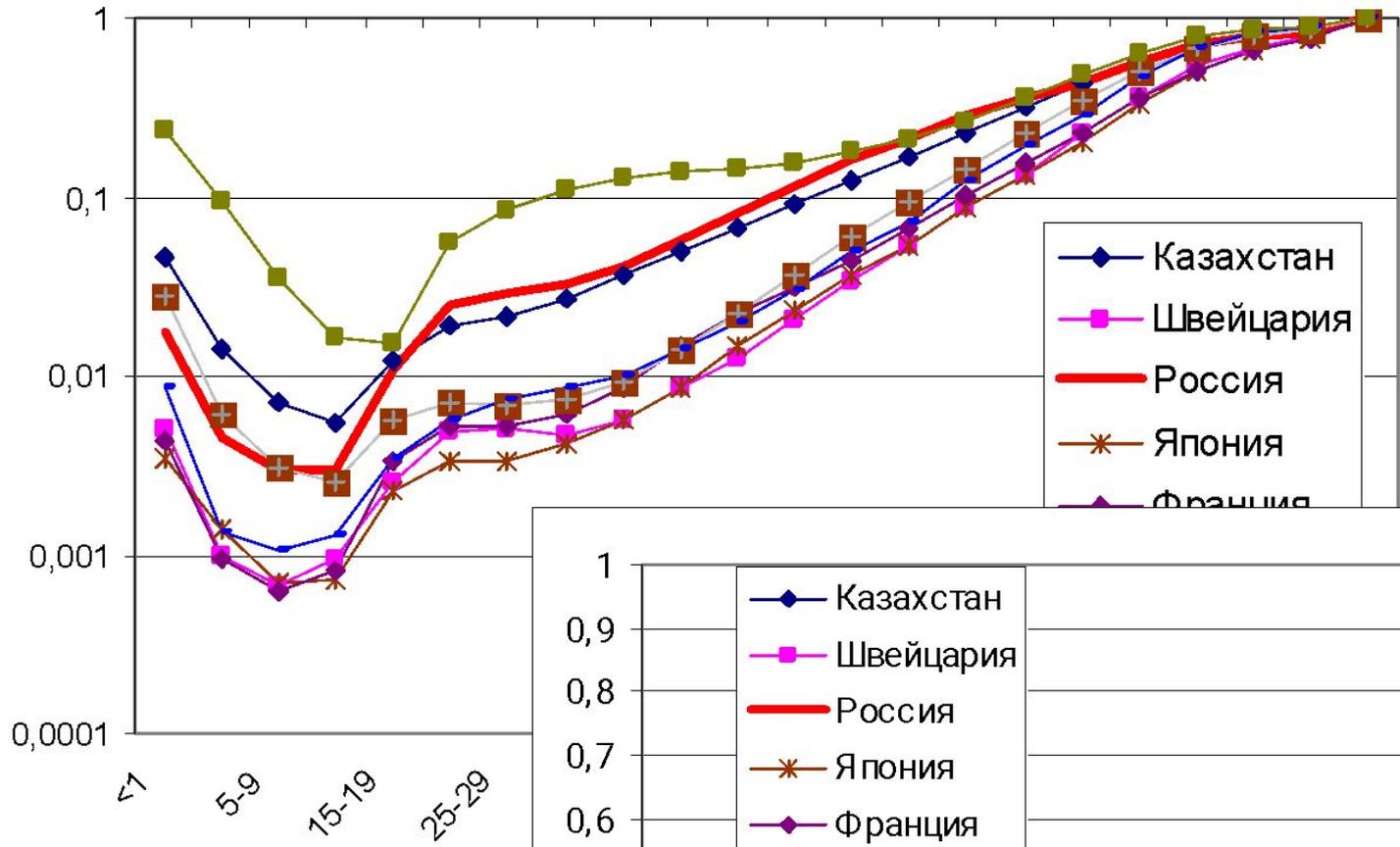
<sup>41</sup> возрастного интервала

Величина вероятности  
зависит от длины

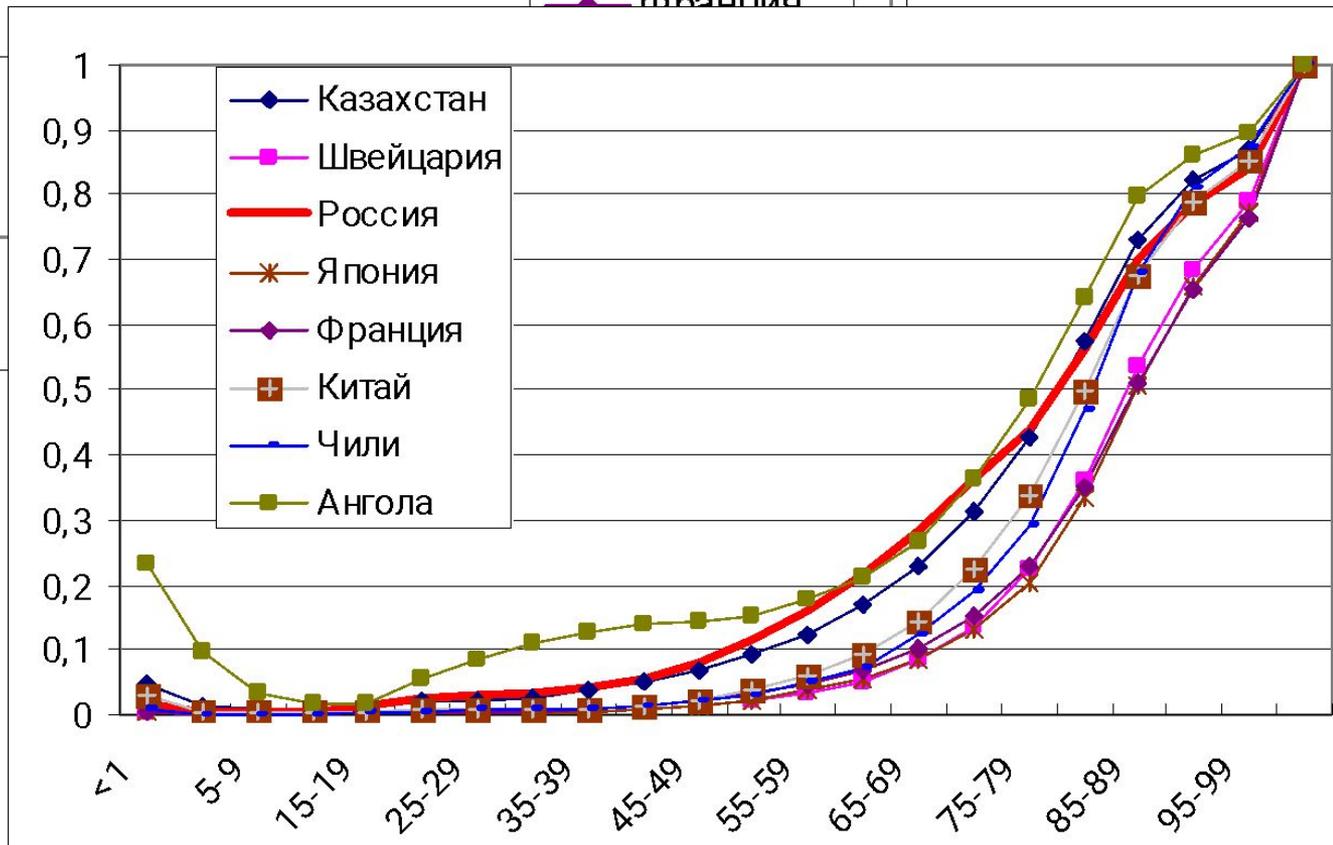
возрастного интервала

# q(x), мужчины, Россия





$q(x)$



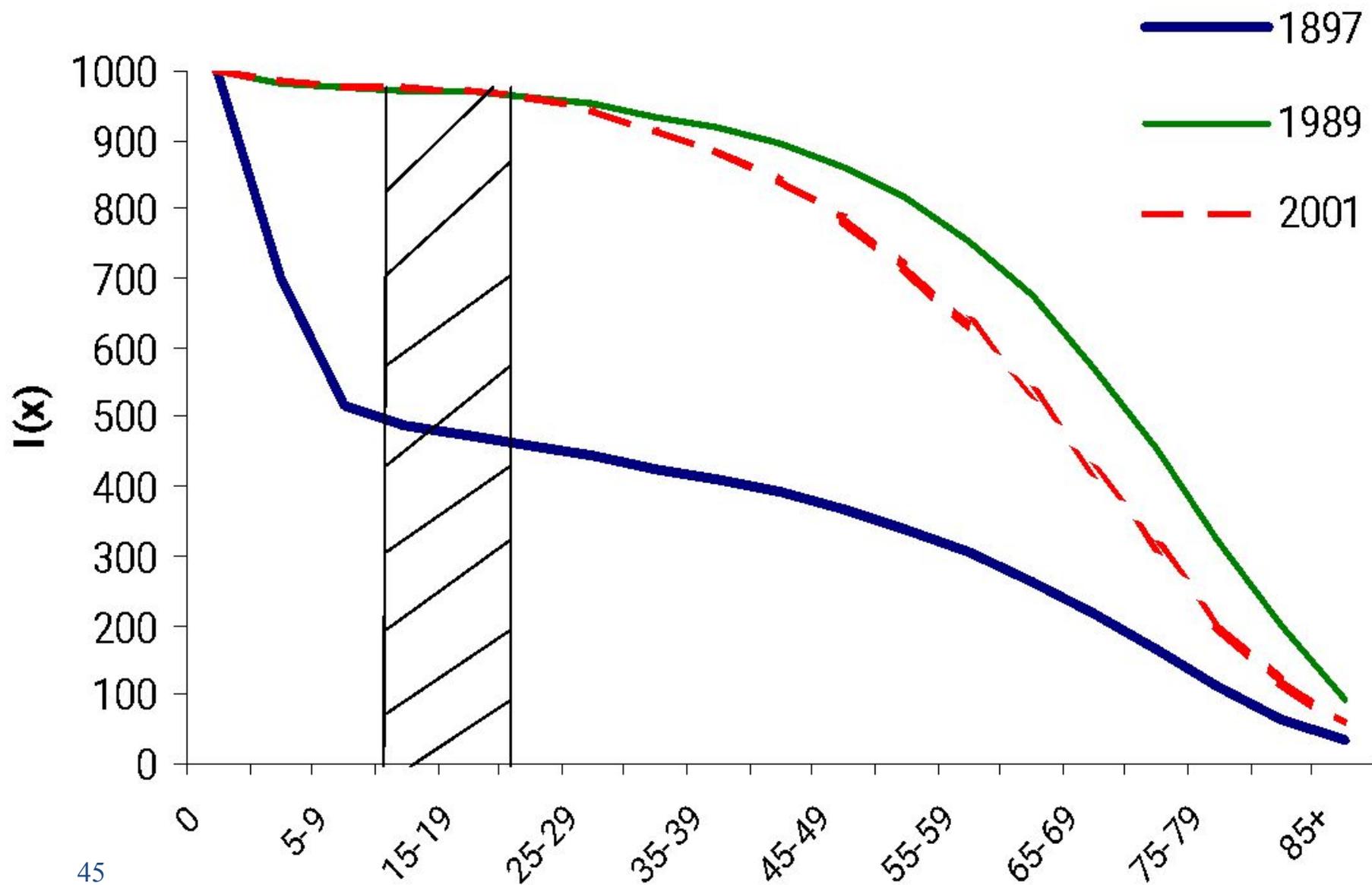
$${}_nL_x -$$

1. Число человеко-лет, прожитых в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$  теми, кто дожил до начала этого интервала
2. Число живущих в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$  в стационарном населении

**Упрощенная формула для гипотезы равномерного распределения смертей в возрастном интервале от  $x$  до  $x+n$ :**

$${}_nL_x = \frac{l_x + l_{x+n}}{2} n$$

# мужчины, Россия

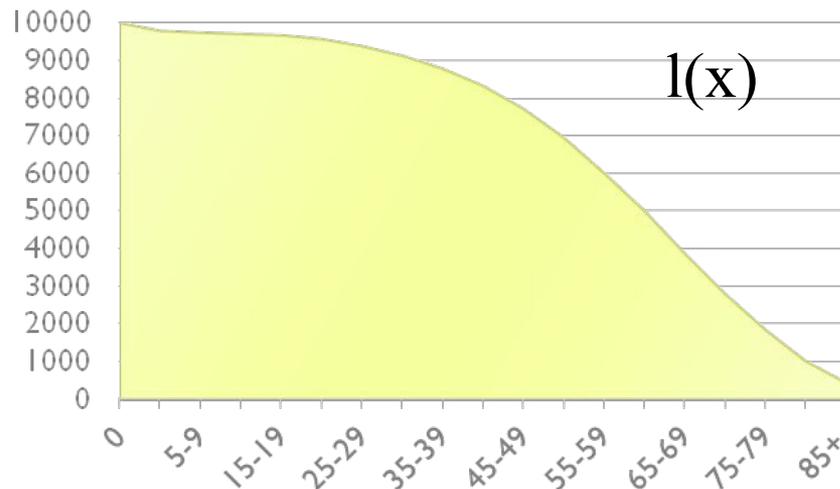


$T_x$  –

Число человеко-лет жизни, которые предстоит прожить от возраста  $x$  до  $w$  (*предельного возраста таблицы*) тем, кто дожил до возраста  $x$

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_{x+n} + \dots + L_w$$

$$T_x = \sum_x^w L_x$$



# «Закрытие» таблицы смертности: последний интервал таблицы

Пусть возраст начала последнего интервала таблицы равен  $a$  (в нашем примере  $a=85$ ).

$${}_{\infty}q_a = 1$$

В последнем интервале таблицы вероятность умереть равна 1:

Поскольку число умерших в последнем интервале равно числу доживших до его начала, то число человеко-лет жизни в этом интервале равно:

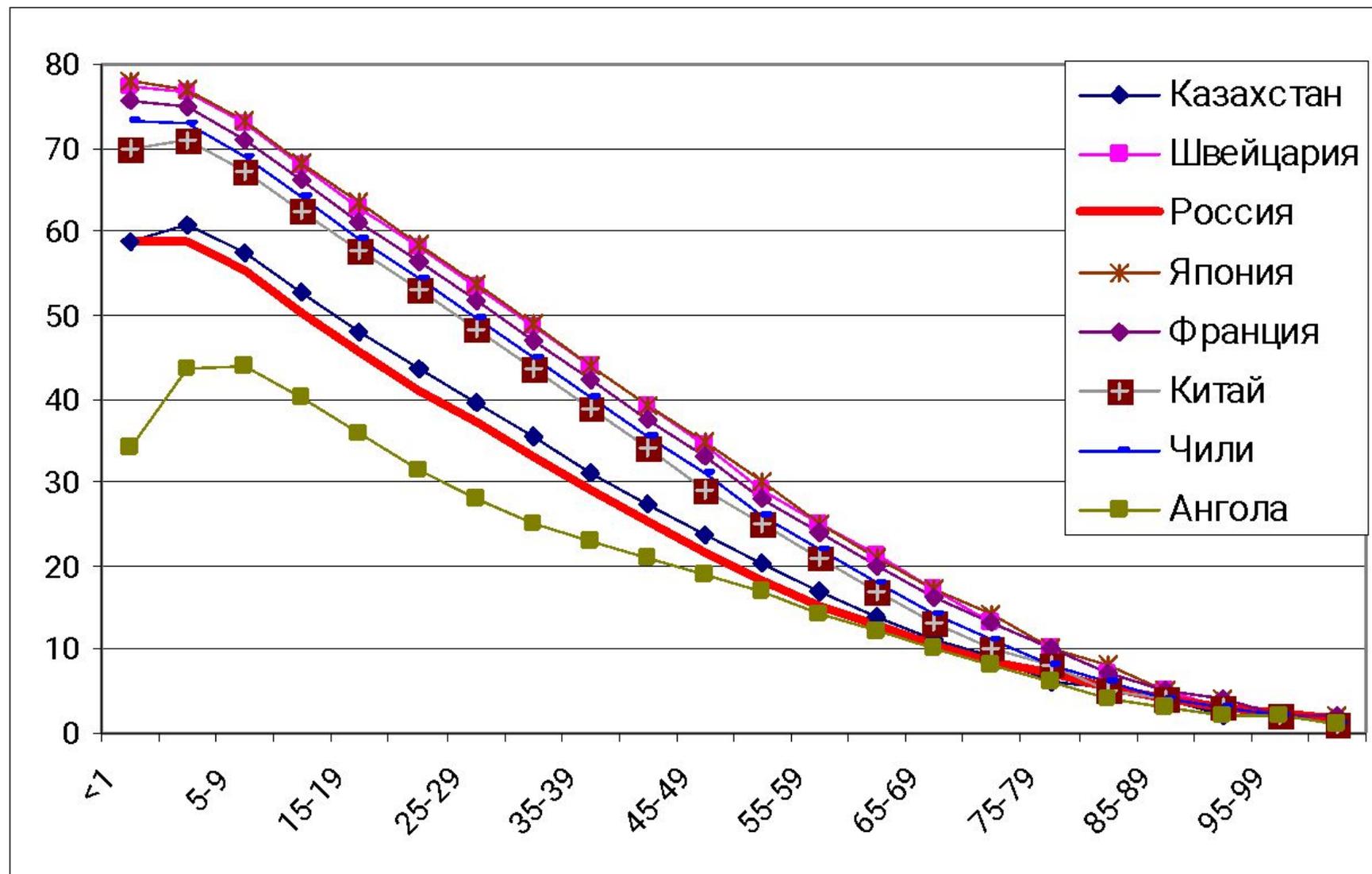
$${}_{\infty}L_a = \frac{{}_{\infty}d_a}{{}_{\infty}m_a} = \frac{l_a}{{}_{\infty}m_a} = {}_{\infty}T_a$$

$E_x$  –

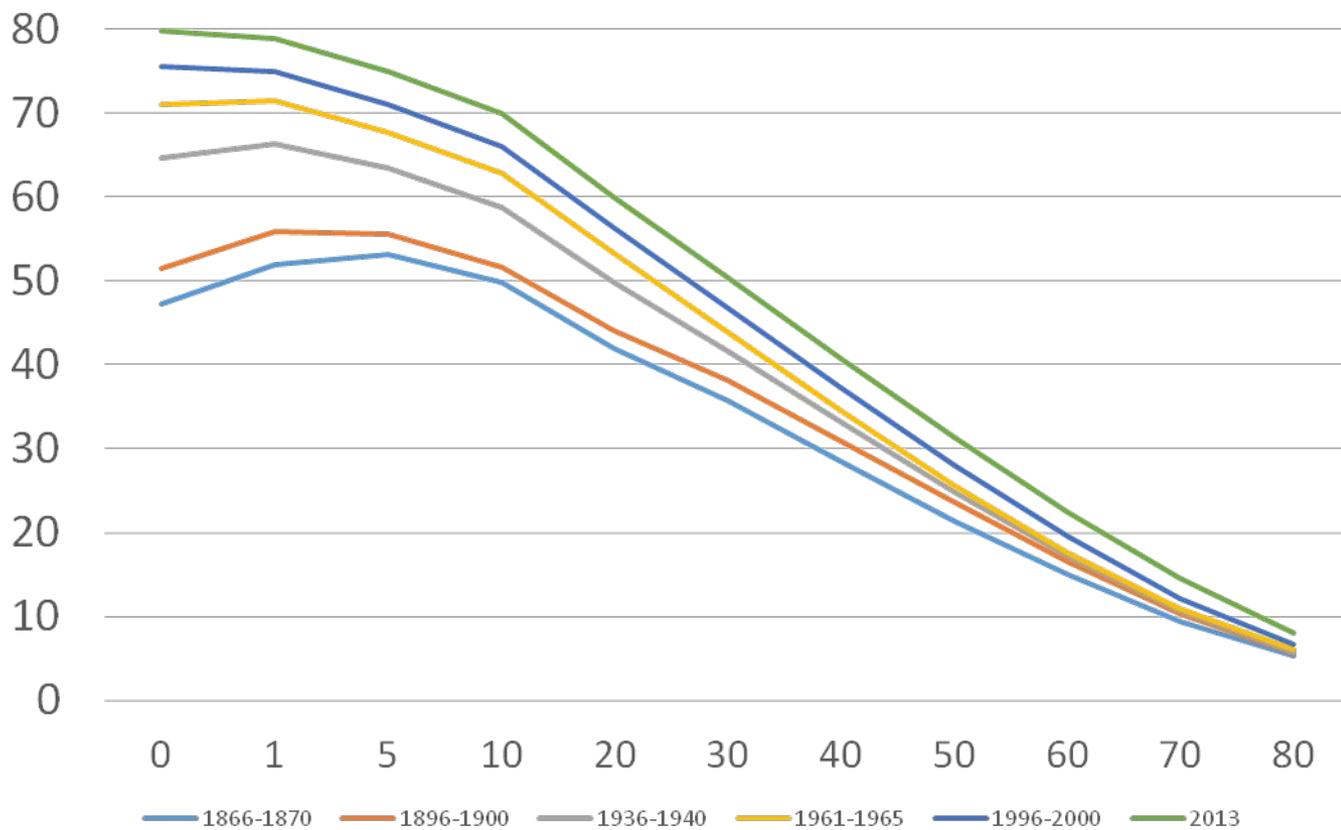
ожидаемая продолжительность  
жизни в возрасте  $x$

$$E_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\sum_n^w L_x}{l_x} = \frac{\sum_n^w d_x \left(x + \frac{n}{2}\right)}{l_x}$$

# E(x)

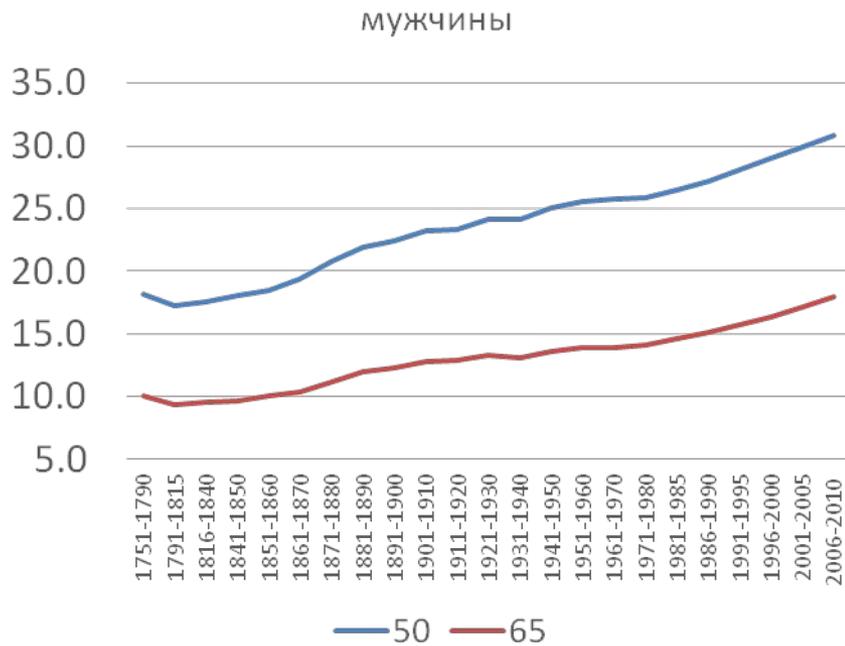


# Динамика продолжительности жизни $E(x)$ , Норвегия, мужчины



# E<sub>65</sub>

50



[http://www.scb.se/Pages/TableAndChart\\_25831.aspx](http://www.scb.se/Pages/TableAndChart_25831.aspx)

Россия:

	Мужчины			Женщины		
	2000	2005	2010	2000	2005	2010
50	18,73	18,5	20,71	26,6	26,84	28,45
65	10,9	11,02	12,07	15	15,44	16,45

# ожидаемая продолжительность жизни при рождении

$$E_0 = \frac{T_0}{l_0}$$

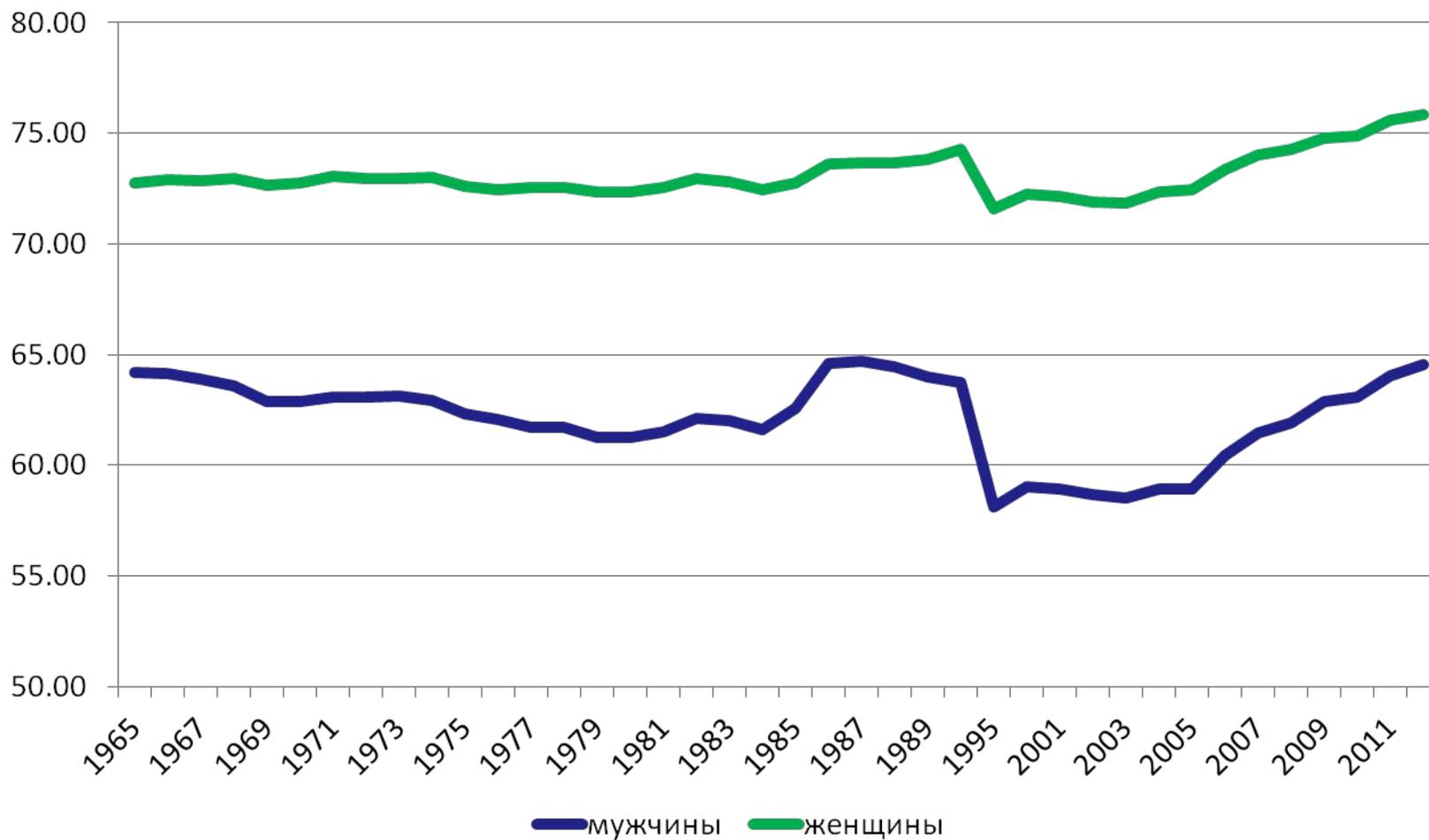
Для реального поколения:

Среднее число лет, которое прожили лица, родившиеся в определенном году (или временном периоде) = Средний возраст смерти

Для условной когорты:

Среднее число лет, которое предстоит прожить новорожденному данного года, **ЕСЛИ** на протяжении всей жизни его поколения сохранится данный порядок вымирания (или данная таблица смертности)

## Динамика $E_0$ в России, 1965 – 2012 гг.



# ПАРАДОКС МЛАДЕНЧЕСКОЙ (ДЕТСКОЙ) СМЕРТНОСТИ

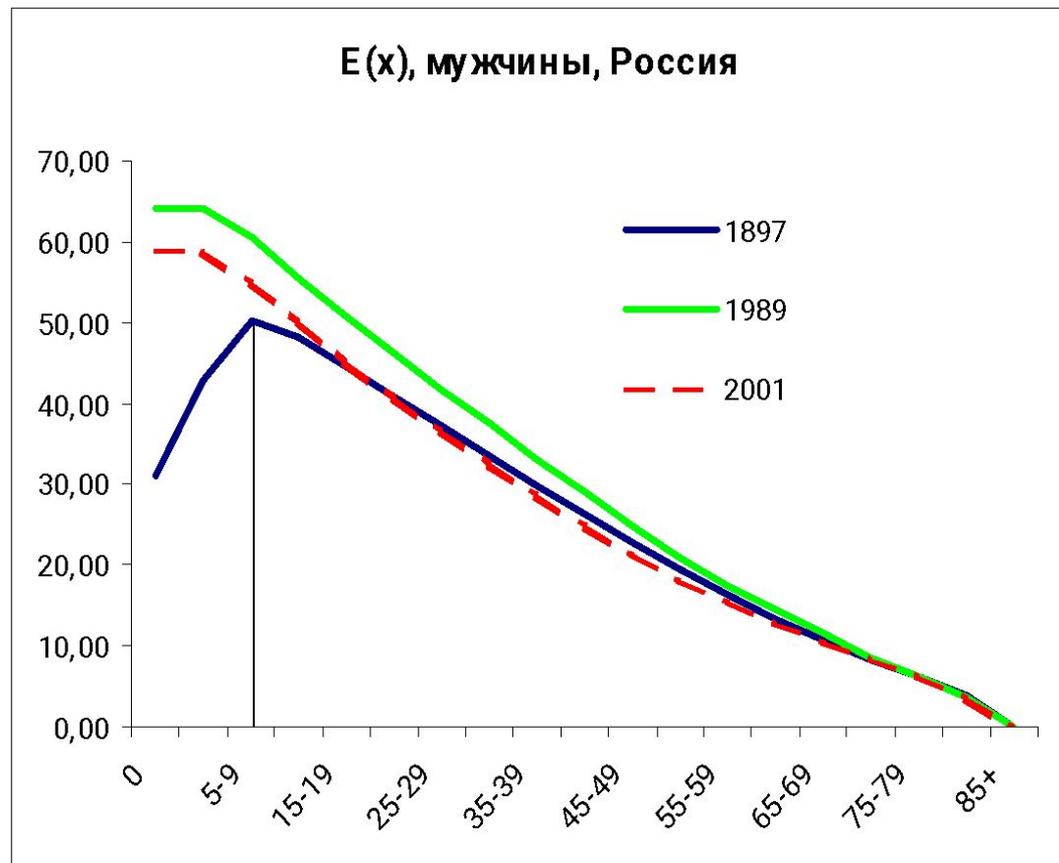
$$E_1 > E_0 \text{ при } q_0 > I/E_0$$

В России в 1897 году:

$$E_0 = 32 \text{ года}$$

$$I/E_0 = 0,03$$

$q_0 = 300\%$ , т.е. в 10 раз больше



# Отличие $E_0$ от среднего возраста смерти в данном году

$E_0$

1. **Не зависит** от возрастной структуры населения

${}_n P_x$

2. **Зависит** от порядка вымирания, т.е.  ${}_n m_x$

$$E_0 = \frac{T_0}{l_0} = \frac{\sum_0^w {}_n L_x}{l_0} = \frac{\sum_0^w {}_n d_x (x + \frac{n}{2})}{l_0}$$

Средний возраст умерших

1. **Зависит** от возрастной структуры населения

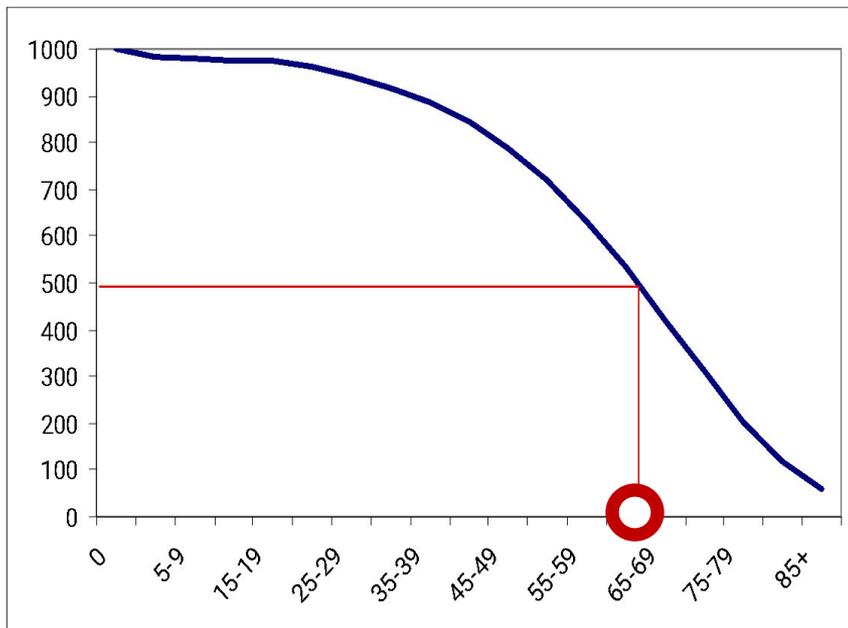
${}_n P_x$

2. **Зависит** от порядка вымирания  ${}_n m_x$

$$\bar{x} = \frac{\sum_0^w {}_n M_x (x + \frac{n}{2})}{\sum_0^w {}_n M_x}$$

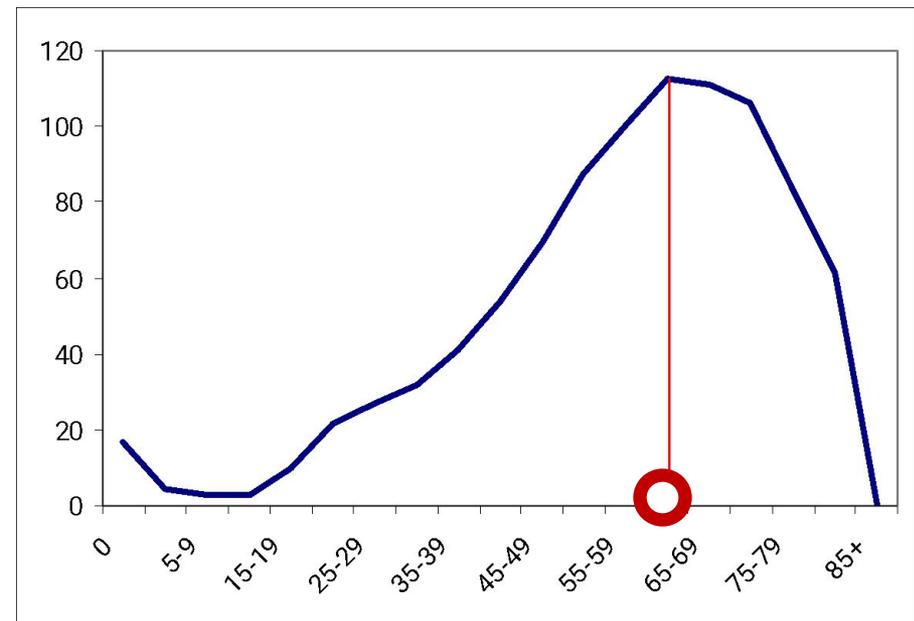
## Медианная продолжительность жизни

Для новорожденных –  
возраст, до которого  
доживет ровно половина  
исходной численности  
поколения ( $0,5I_0$ )

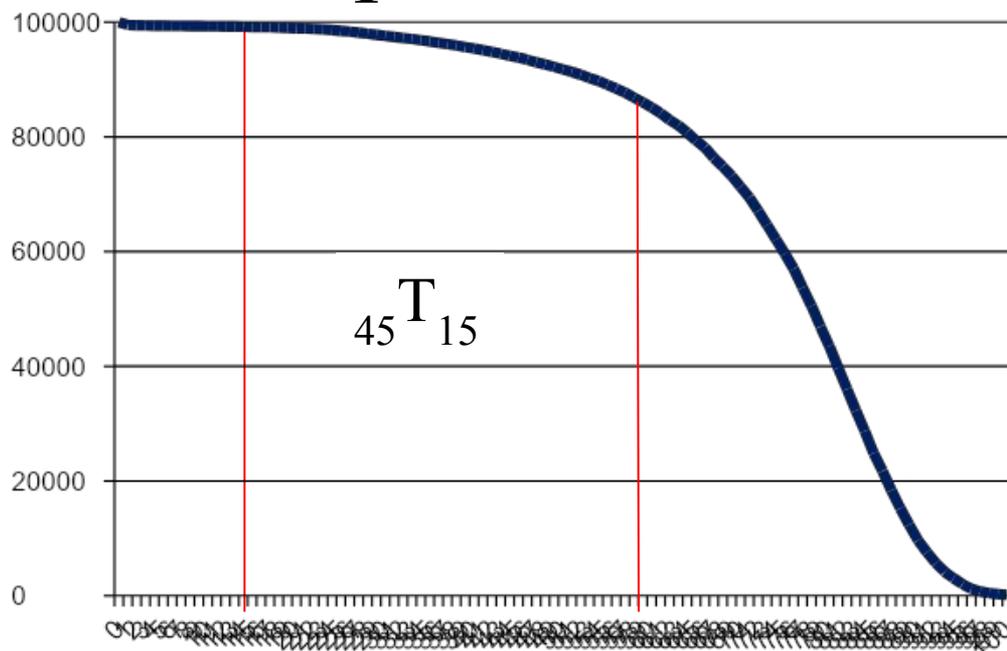


## Модальная продолжительность жизни

Значение, при котором  
 $I(x)$  убывает с  
максимальной  
скоростью,  $d(x)$   
достигает максимума.



# Отсроченная или интервальная продолжительность жизни



$$\frac{T_{15} - T_{60}}{l_{15}}$$

Самарская область, 2008 год,  
женщины

$$\frac{5935985 - 1664860}{99156} = 43,1$$

Таблица смертности для календарного года строится на основе повозрастных коэффициентов смертности, которые наблюдаются в реальном населении. Эти коэффициенты смертности преобразуют в вероятности, а затем разворачивается вся таблица.

# Литература:

- Денисенко М.Б., Калмыкова Н.М. Демография, раздел 3
- Wunsch G., Termote M. Introduction to demographic analysis. Principles and Methods. Plenum Press, 1976. Разделы 1.2, 3.2
- Preston S., Heuveline P., Guillot M. Demography: Measuring and Modeling Population Processes, главы 2 и 3
- Дарский Л.Е., Тольц М.С. Демографические таблицы. М., 2013. Раздел II  
[http://www.demoscope.ru/weekly/knigi/darskij\\_tolc/darskij\\_tolts.pdf](http://www.demoscope.ru/weekly/knigi/darskij_tolc/darskij_tolts.pdf)
- The Human Mortality Database: <http://www.mortality.org/>