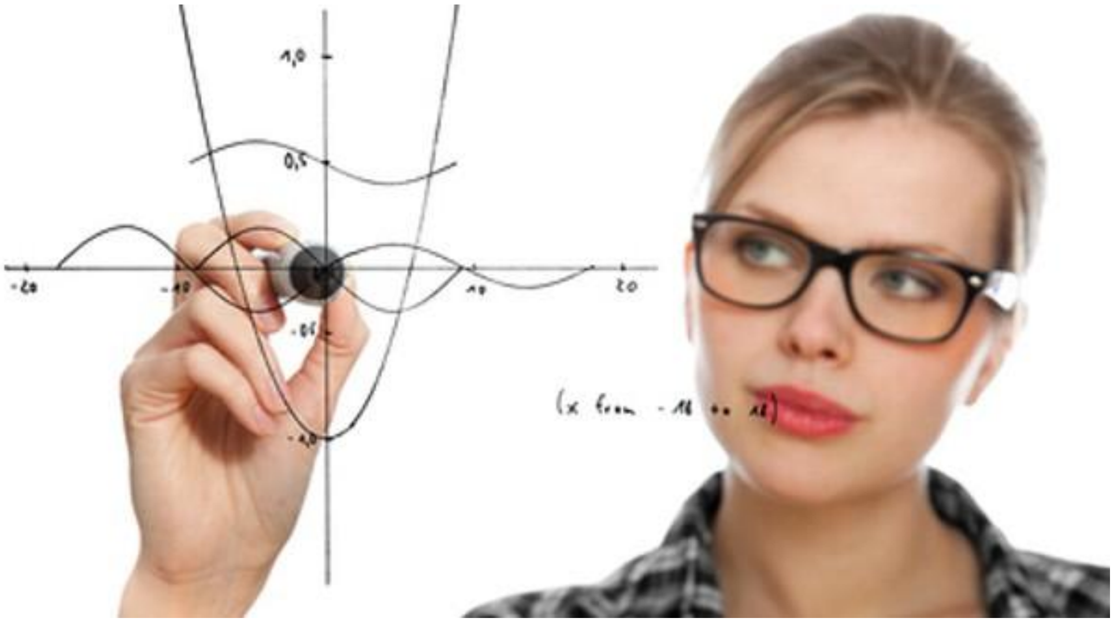
ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ



Основные элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями считаются следующие:

1) **степенные функции** $y = x^k$, где k – любое действительное число;

2) **показательные функции** $y = a^x$, где a – любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0$, $a \neq 1$;

3) **логарифмические функции** $y = \log_a x$, где a – любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0$, $a \neq 1$;

4) **тригонометрические функции** $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) **обратные тригонометрические функции** $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и операции образования сложной функции (т.е. операции композиции), называются элементарными функциями.

Так, например, элементарными являются функции:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sin x},$$

$$y = \log_3\left(\sqrt[7]{\operatorname{tg} x + 5^x}\right),$$

$$y = \operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} 8x\right)$$

Линейная функция

Линейной функцией называют функцию вида

$$y = ax + b. \tag{1}$$

При $b = 0$ она принимает вид

$$y = ax. \tag{2}$$

В этом случае говорят, что ***y прямо пропорционально x*** **(*с коэффициентом пропорциональности a*);** равенство (2) задает ***прямую пропорциональную зависимость*** **между *x* и *y*.**

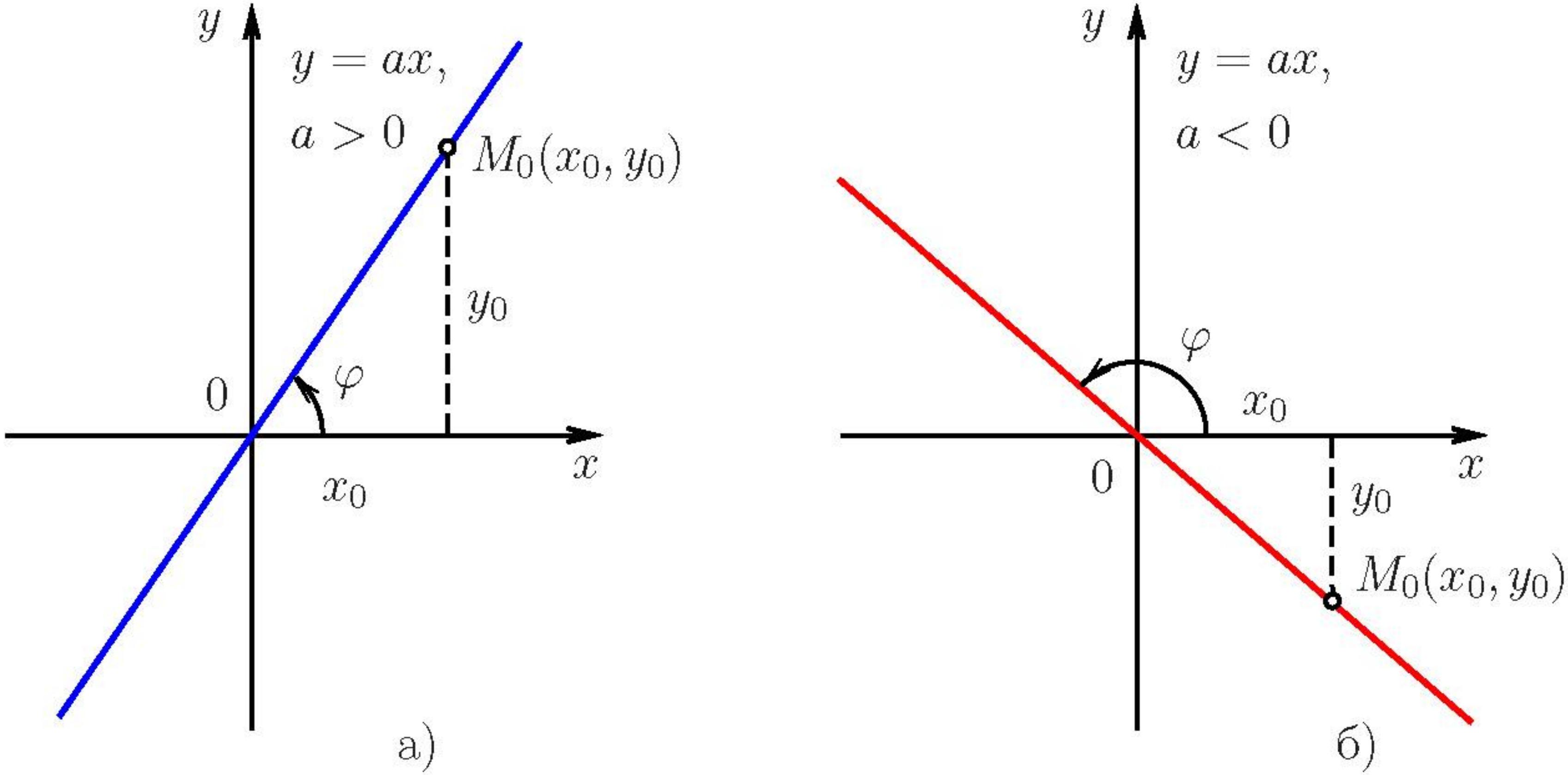
Отметим простейшие свойства функции $y = ax$.

1. Функция определена при всех значениях x.

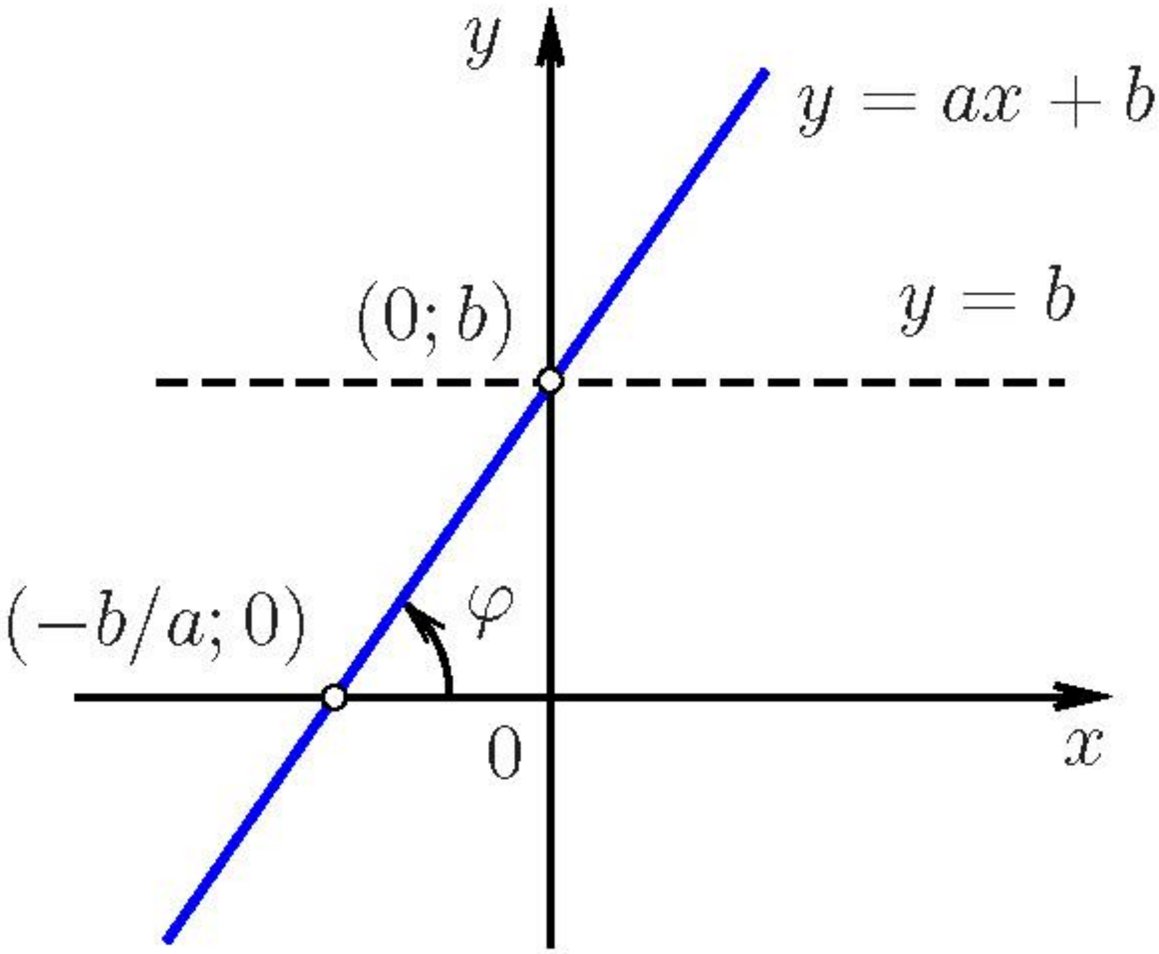
2. График функции проходит через начало координат (при $x = 0$ имеем $y = 0$.

3. Функция нечетная, график ее симметричен относительно начала координат, так как $a \cdot (-x) = -(ax)$.

График функции $y = ax$ есть прямая, проходящая через начало координат под углом ϕ (где tg ϕ = a) к оси Ox. В связи с этим коэффициент a прямой пропорциональности называют ***угловым коэффициентом*** прямой, служащей графиком нашей функции.



Графиком линейной функции y = ax + b является прямая линия, пересекающая ось Oy в точке с ординатой b и наклоненная к оси Ox под углом, тангенс которого равен a.



Квадратичная функция

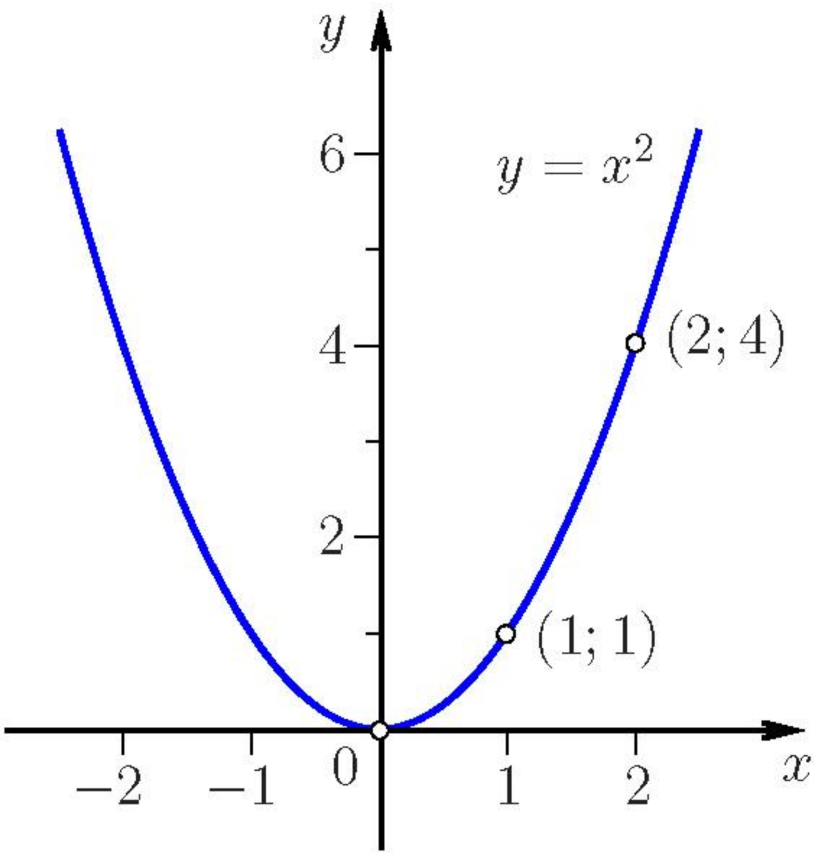
Рассмотрим функцию

$$y = x^2,$$

установим ее простейшие свойства и построим график этой функции.

1. Функция определена при всех значениях x; значения функции неотрицательны: она равна нулю при $x = 0$ и положительна при любых других значениях x. Следовательно, ***график функции проходит через начало координат и располагается выше оси Ox*** (имея с ней общую точку $O(0, 0)$).

2. Функция четная: $(-x)^2 = x^2$; график функции симметричен относительно оси Oy. ***Поэтому достаточно построить его для x ≥ 0 и затем зеркально отразить относительно Oy***.



3. При $x \geq 0$ функция $y = x^2$ — возрастающая; действительно, при $0 \leq x_1 < x_2$ имеем $x_1^2 < x_2^2$, т.е. $y_1 < y_2$. Для отрицательных x, т. е. в интервале $(-\infty, 0]$, функция убывает.

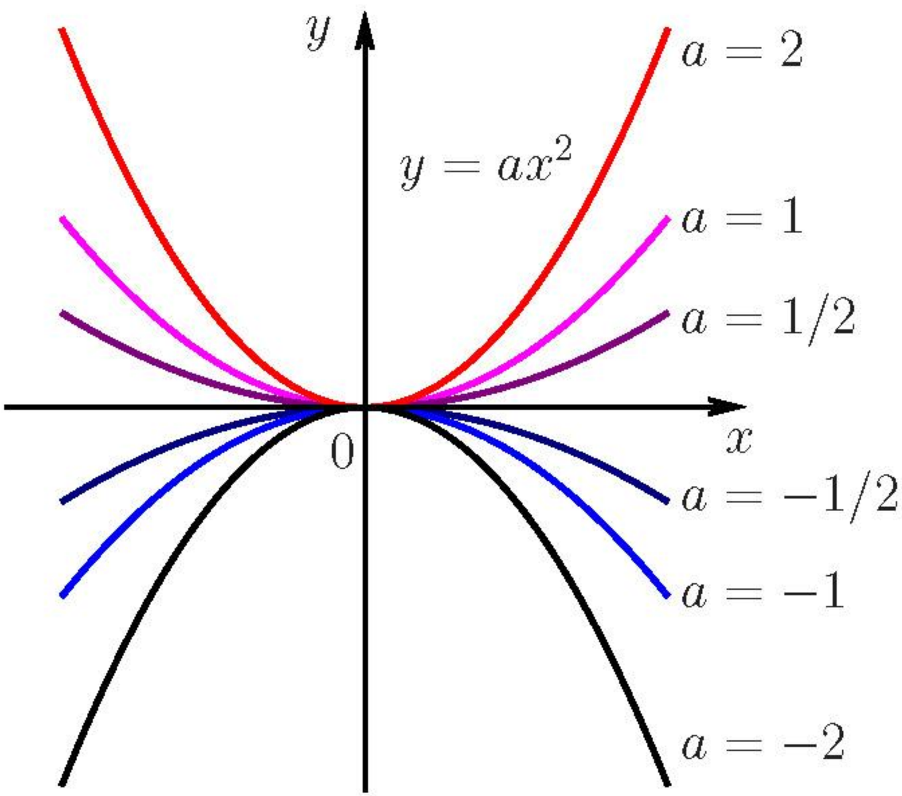
Всего имеем два интервала монотонности:

— интервал убывания $(-\infty, 0]$,

— интервал возрастания $[0, +\infty)$.

Точка О(0, 0) — точка минимума функции. В ней функция принимает свое наименьшее значение, равное нулю. Ее называют ***вершиной параболы***.

Графики функций $y = ax^2$ имеют такой же характер; при $a > 0$ ординаты графика функции $y = ax^2$ отличаются множителем a от ординат графика функции $y = x^2$. При $a < 0$ получается график, симметрично расположенный с графиком $y = |a|\ x^2$ относительно оси Ox.



На рисунке показаны графики функций $y = ax^2$ при $a = 1$, ½, 2, – 1, – ½, – 2.

График функции вида $y = ax^2$ называется ***параболой***; ось симметрии графика называется ***осью параболы*** (здесь она совпадает с осью Oy), точка пересечения параболы со своей осью — ***вершиной параболы*** (здесь вершина совпадает с началом координат).

Степенная функция

Рассмотрим теперь функцию

$$y = x^n$$

при любом натуральном n.

Некоторые общие свойства рассматриваемых функций.

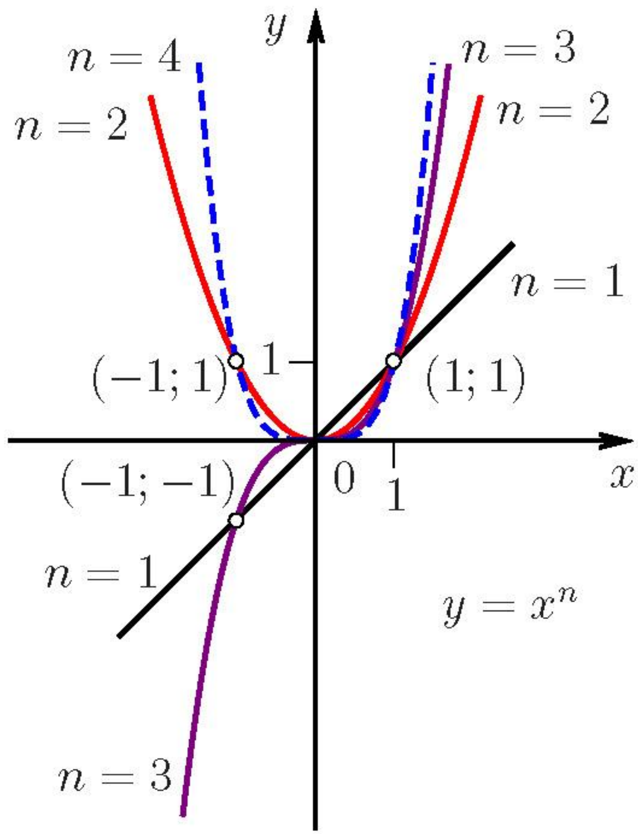
1. Все они принимают ***нулевое значение при x = 0*** (их графики проходят через начало координат).

2. При четном $\boldsymbol{n = 2k}$ функция $\boldsymbol{y = xn = x^{2k}}$ ***четная***, так как $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

3. График симметричен относительно оси Oy.

4. Если n – нечетное, $\mathbf{n = 2k + 1}$, то и ***функция нечетная***, так как $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$. В этом случае график симметричен относительно начала координат.

5. Для $\boldsymbol{x \geq 0}$ все степенные функции являются ***возрастающими***. При этом, чем больше показатель n, тем больше значения x^n для $x > 1$; напротив, при $\mathbf{0 < x < 1}$ функции с ***бóльшим показателем степени n принимают меньшие значения***. Для $\boldsymbol{x = 1}$ все функции $y = x^n$ принимают значения, **равные 1**.



На рисунке показаны графики функций $y = x^n$ для $n = 1, 2, 3, 4$.

Обратная пропорциональная зависимость

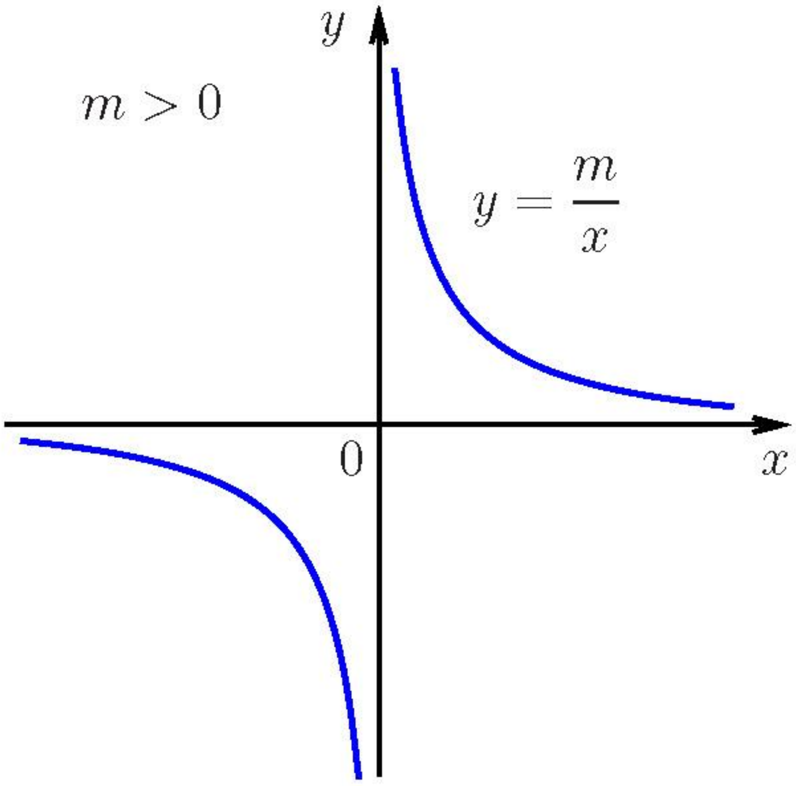
$$y = \frac{m}{x}, (m \neq 0)$$

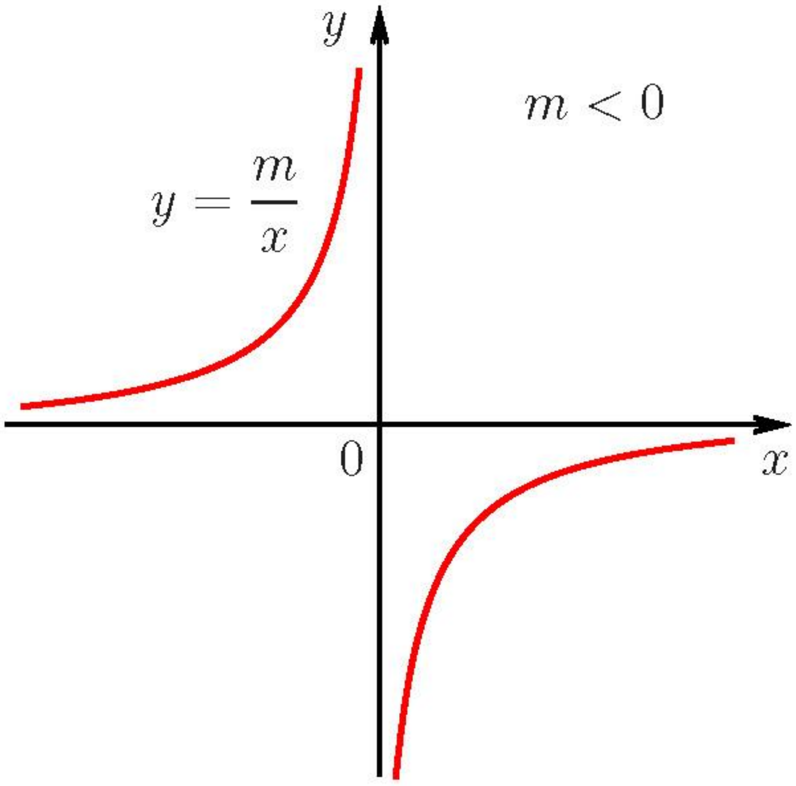
В этом случае говорят, что x и y находятся в ***обратной пропорциональной зависимости***, а число m называют ***коэффициентом обратной пропорциональности***. Обратную пропорциональную зависимость записывают также в симметричной относительно x и y форме:

$$\boldsymbol{xy = m.}$$

Таким образом, ***произведение величин, находящихся в обратной пропорциональной зависимости, постоянно и равно коэффициенту пропорциональности.***

На рисунке показаны графики обратной пропорциональной зависимости





Отметим свойства функции в случае $m > 0$.

1. ***Функция определена для всех действительных чисел,*** кроме $x = 0$: эта область определения функции является объединением двух бесконечных открытых интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

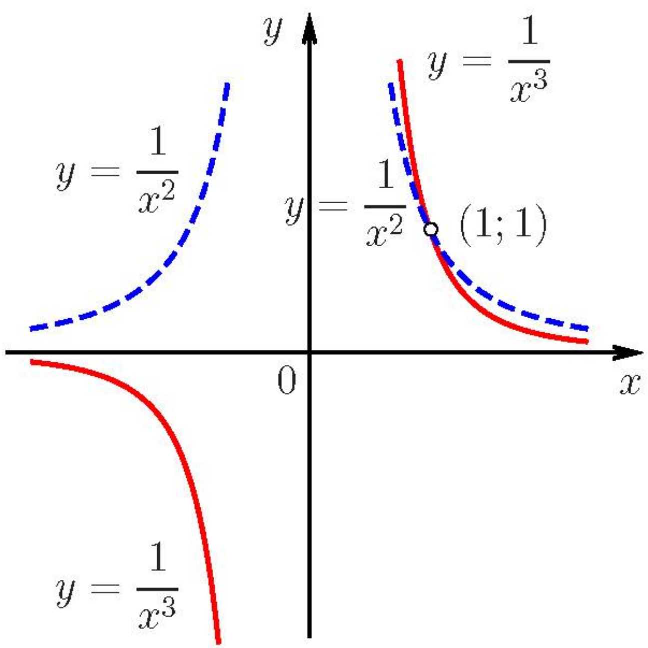
2. ***Функция не обращается в нуль***. Если $x > 0$, то (поскольку $m > 0$) и $y > 0$, для отрицательных x функция также принимает отрицательные значения. Множеством значений функции является множество всех действительных чисел, кроме нуля.

3. ***Функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат***. Достаточно поэтому рассмотреть лишь ту его часть, которая соответствует интервалу $(0, +\infty)$.

4. ***При $x > 0$ функция убывающая***; действительно, из $0 < x_1 < x_2$ следует $m/x_1 > m/x_2$, т. е. $y_1 > y_2$. Функция является убывающей и в интервале $(-\infty, 0)$ Имеется два интервала ее монотонности: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, в каждом из которых она убывает.

5) ***График имеет и вторую асимптоту — ось Oy*** (последнее ясно также из наличия асимптоты Ox и симметрии относительно прямой $y = x$).

Кривая, служащая графиком обратной пропорциональной зависимости, называется ***равнобочной гиперболой***. В обоих случаях $m > 0$ и $m < 0$ гипербола состоит из двух отдельных частей называемых ***ветвями гиперболы***. Гипербола имеет оси симметрии (здесь они совпадают с биссектрисами координатных углов), две асимптоты (они совпали с координатными осями), центр симметрии (помещающийся в точке пересечения осей симметрии и асимптот).



На рисунке показаны графики функций $y = 1/x^n$ при $n = 2$, $n = 3$

Показательная функция

Функция вида

$$y = a^x,$$

при $a > 0$, $a \neq 1$ называется ***показательной функцией***.

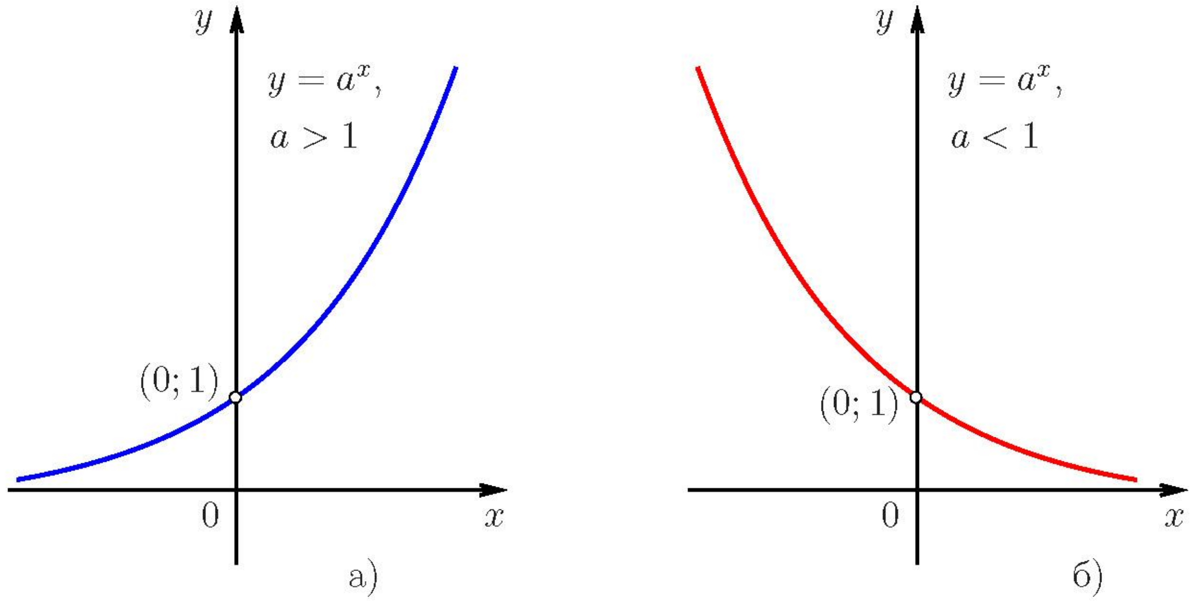
Исследуем эту функцию.

1. Областью определения показательной функции является ***множество всех действительных чисел***.

2. Показательная функция ***не является ни четной, ни нечетной***.

3. Функция $y = a^x$ ***положительна при всех значениях аргумента***, поэтому ее график весь располагается ***выше оси абсцисс***.

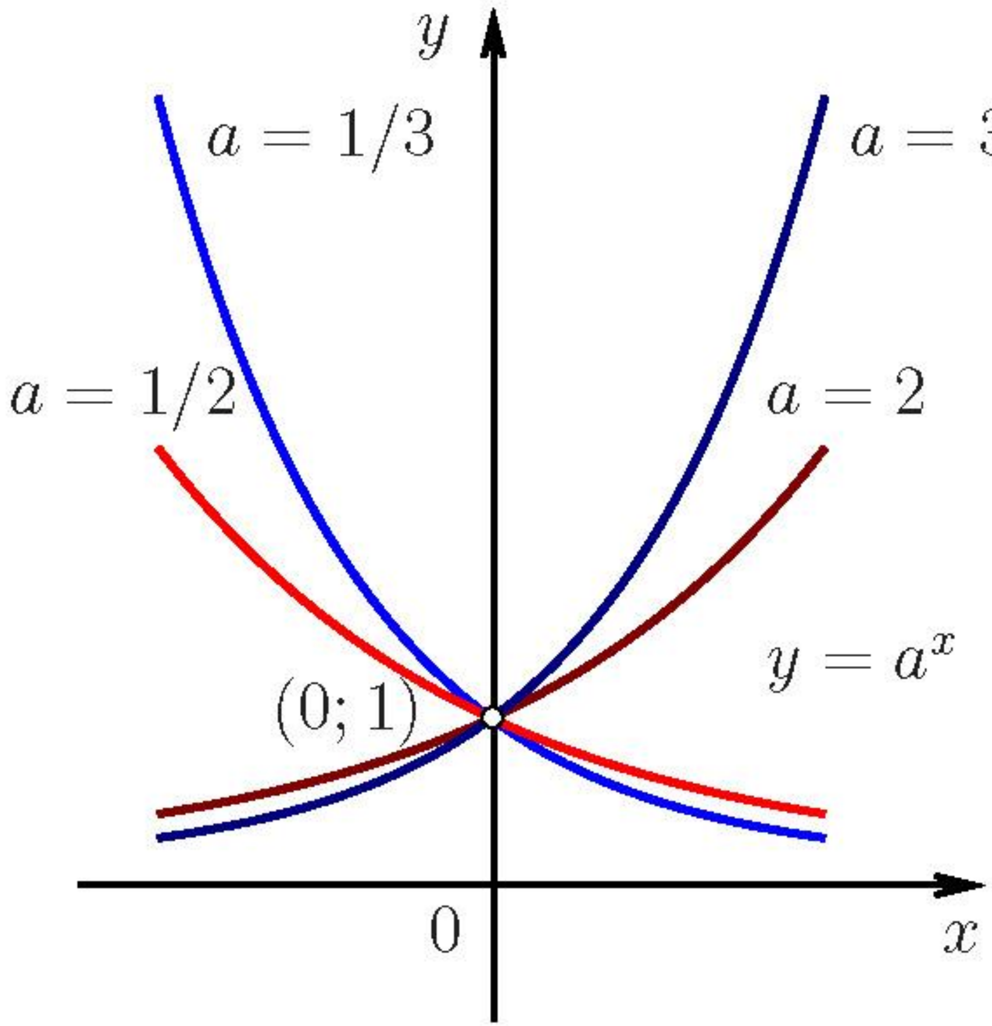
4. Если $\boldsymbol{a > 1}$, то функция $y = a^x$ возрастающая; если $\boldsymbol{a < 1}$, то она ***убывающая***.



5. Пусть ***а* > 1**. Из рисунка видно, что функция $y = a^x$ ***возрастает***. Можно показать, что при этом ее значения по мере возрастания x становятся сколь угодно большими. График функции круто поднимается вверх при движении точки x по оси абсцисс вправо. В случае когда ***а* < 1** функция $y = a^x$ ***убывает***, по мере возрастания x ее значения быстро приближаются к нулю. Отрицательным значениям x теперь соответствуют значения функции, больше единицы.

6. Ось ***Ох*** является ***горизонтальной асимптотой*** графика показательной функции. Это также показано на рисунке.

Графики показательной функции $y = a^x$ при значениях основания a = 2, 3, ½, 1/3.



Логарифмическая функция

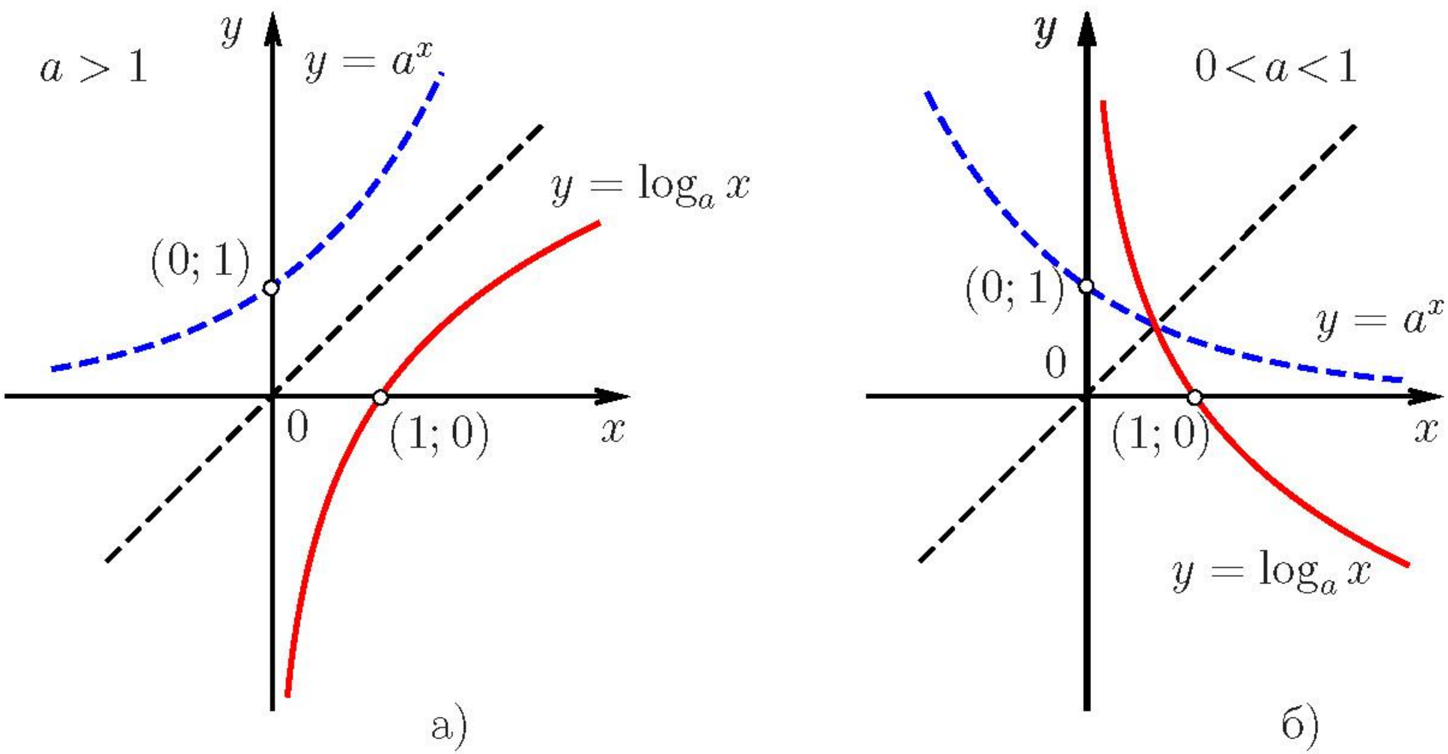
Функция вида

$$y = \log_a x,$$

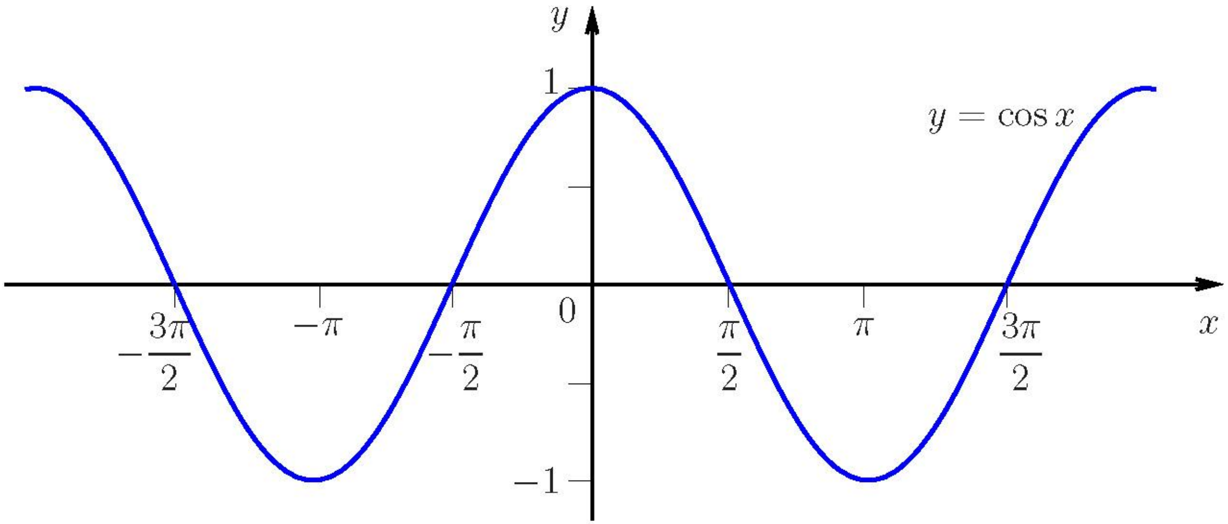
где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется ***логарифмической функцией***.

Чтобы построить график логарифмической функции, проще всего заметить, что она является обратной функцией для показательной функции. Действительно, если $y = \log_a x$, то $x = a^y$, и обратно. Функции $y = \log_a x$ и $y = a^x$ — взаимно обратные функции, их графики расположены зеркально-симметрично относительно биссектрисы I – III координатных углов.

Отметим, что графики логарифмических функций в обоих случаях расположены правее оси ординат Oy, поскольку логарифмическая функция определена лишь для положительных значений независимой переменной x. При всяком основании a ($a > 1$ или $0 < a < 1$) графики проходят через точку (1, 0). Число $x = 1$ служит нулем логарифмической функции $y = \log_a x$ при любом a.



Функция $y = \cos x$



Перечислим основные свойства функции $y = \cos x$.

1. ОДЗ — множество R всех действительных чисел.
2. Множество значений — отрезок [-1;1].
3. Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π.
4. Функция $y = \cos x$ чётная.

5. Функция $\boldsymbol{y = \cos x}$ принимает:

– значение, равное 0, при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

– наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, $n \in Z$;

– наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

– положительные значения на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

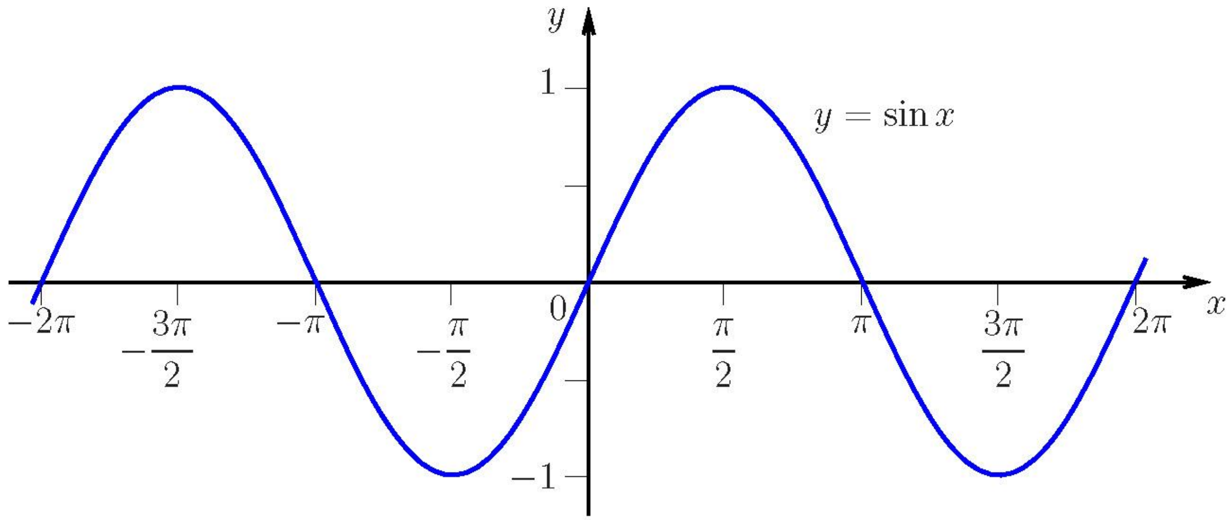
– отрицательные значения на интервале $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

6. Функция $\boldsymbol{y = \cos x}$

– возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

– убывает на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Функция $y = \sin x$



Перечислим основные свойства функции $y = \sin x$.

1. ОДЗ — множество *R* всех действительных чисел.

2. Множество значений — отрезок [–1;1].

3. Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π.

4. Функция $y = \sin x$ нечётная.

4. Функция **$y = \sin x$** принимает:

– значение, равное 0, при $x=\pi n$, $n \in Z$;

– наибольшее значение, равное 1, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ при $n \in Z$;

– наименьшее значение, равное -1, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ при $n \in Z$;

– положительные значения на интервале $(0;\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n=\pm1, \pm2, \ldots$;

– отрицательные значения на интервале $(\pi;2\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n=\pm1, \pm2, \ldots$.

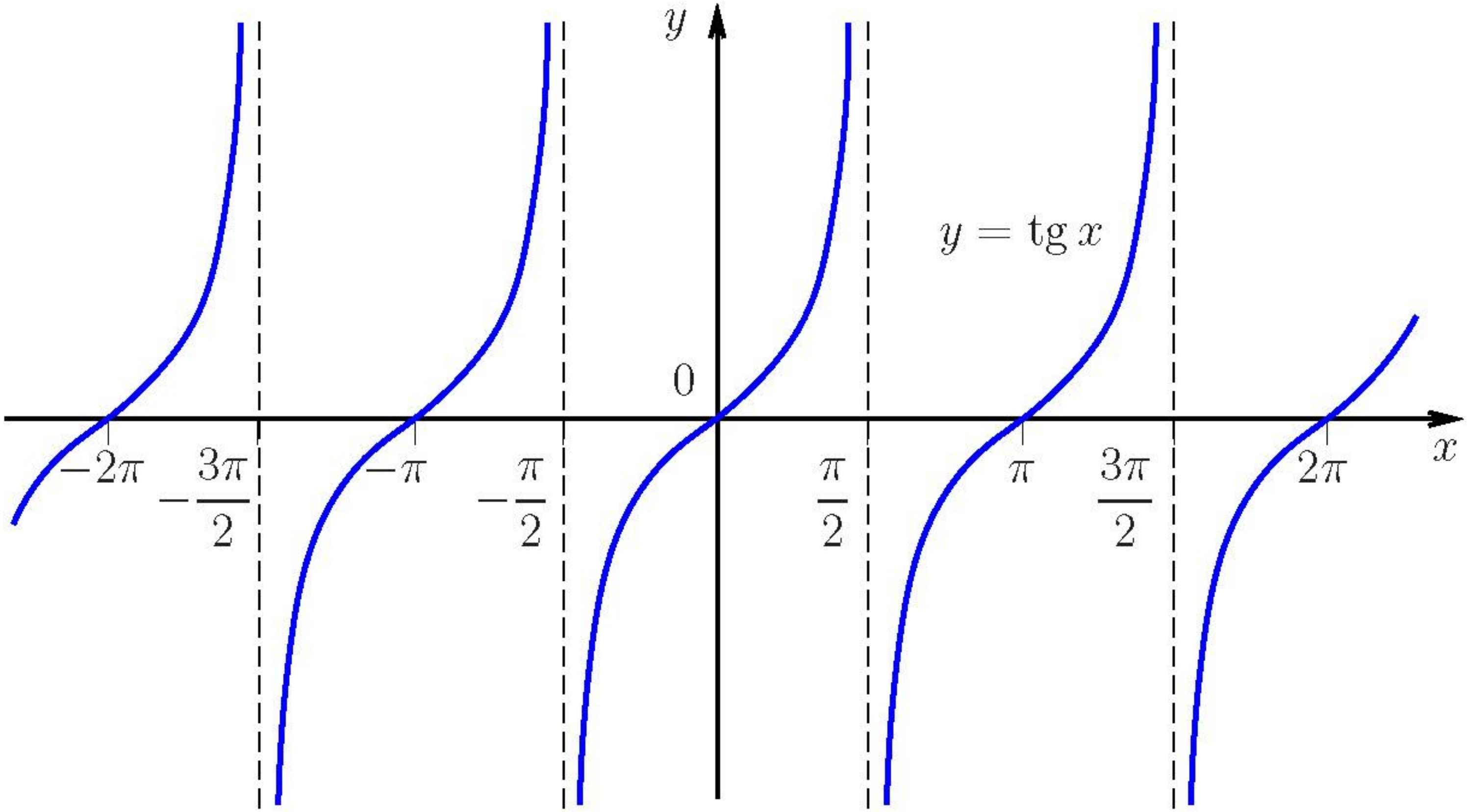
5. Функция **$y = \sin x$**:

– возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n=\pm1, \pm2, \ldots$;

– убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n=\pm1, \pm2, \ldots$.

Функции $y = \mathrm{tg}\, x$

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1. Область определения функции - множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$.

2. Множество значений — множество R всех действительных чисел.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π.

4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечётная.

5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:

— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in Z$;

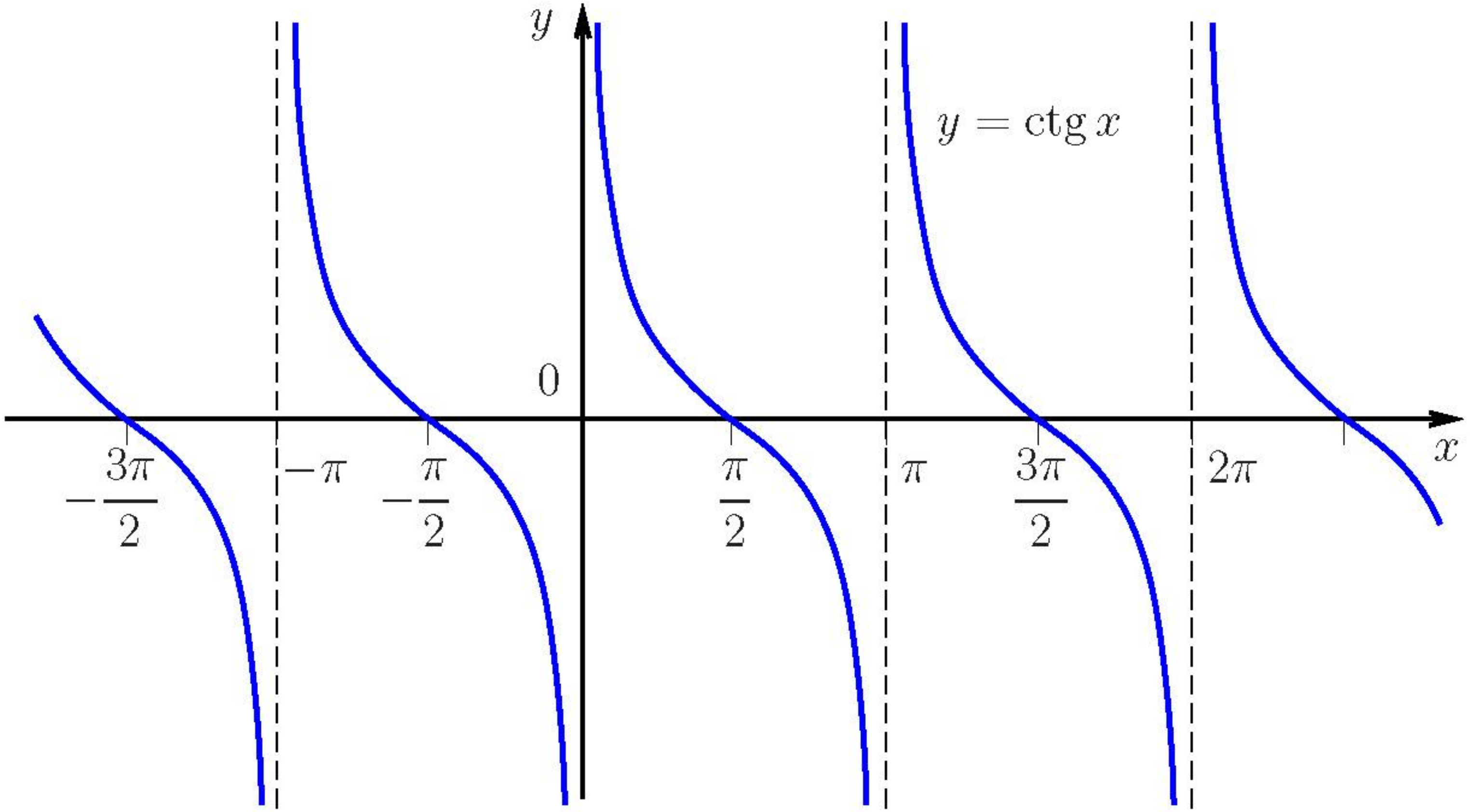
— положительные значения на интервалах $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$ $n \in Z$;

— отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right),$ $n \in Z$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$ $n \in Z$.

Функция $y = \text{ctg}\, x$

$$\text{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

1. Область определения функции — множество всех действительных чисел $x \neq \pi n, n \in Z$.

2. Множество значений — множество R всех действительных чисел.

3. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом π.

4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечётная.

5. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает:

– значение, равное 0, при, $n \in Z$;

– положительные значения на интервалах $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$;

– отрицательные значения на интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in Z$.

6. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на интервалах $(\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$.