Основные понятия

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 - неизвестные, a_{ij} - коэффициенты ($i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$), b_1, b_2, b_3 - свободные члены.

Тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется решением системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, если при подстановке их в уравнения системы вместо x_1, x_2, x_3 получают верные числовые равенства.

Если система трёх линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**.

Если система трёх линейных уравнений решений не имеет, то она называется **несовместной**.

Если система трёх линейных уравнений имеет единственное решение, то ее называют **определенной**; если решений больше одного, то – **неопределенной**.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю , то система называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Метод Крамера

Метод Крамера—способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно). Создан Габриэлем Крамером в 1751 году.

Метод Крамера

Пусть нам требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \qquad (1)$$

в которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) Δ≠0, а определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы Δ≠0, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=9, \\ x_1-2x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_3=2. \end{cases}$$

Решение:

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 0=-13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2. Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=9\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 3\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\cdot 2-3\cdot 3\cdot 2-9\cdot 1\cdot 0=-52,$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 2+9\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 2-(-1)\cdot 3\cdot 1-9\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 2=0,$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 3\cdot 1+9\cdot 1\cdot 0-9\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 3\cdot 0=13.$$

Матричный метод (с помощью обратной матрицы)

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

В матричной форме записи эта система уравнений имеет вид $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $|A| \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Если умножить обе части равенства $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения матрицы-столбца неизвестных переменных, т.е. $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

или $X = A^{-1} \cdot B$.

Так мы получили решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными матричным методом.

Метод Гаусса

Ранее рассмотренный метод можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad\qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

Метод Гаусса

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

x_1 , x_2, …, x_n – неизвестные.

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных.

b_i - свободные члены (или правые части)

Элементарные преобразования

К элементарным преобразованиям системы отнесем следующее:

1. перемена местами двух любых уравнений;
2. умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
3. прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Общий случай

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

1-ый шаг метода Гаусса

На первом шаге исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент . Назовем его ведущим элементом. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}. Получим уравнение:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \qquad (2)$$

где

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}; \quad j = 1,2,3; \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при x_1 (соответственно a_{21} и a_{31}).

Система примет вид:

$$\begin{matrix} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = b_3^{(1)} \end{matrix} \qquad (3)$$

Верхний индекс $^{(1)}$ указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы.

2-ой шаг метода Гаусса

На втором шаге исключим неизвестное x_2 из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент . Выберем его за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \qquad (4)$$

где $a_{23}^{(2)} = \dfrac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \qquad b_2^{(2)} = \dfrac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на $a_{33}^{(1)}$.
Получим уравнение: $a_{33}^{(2)} \bullet x_3 = b_3^{(2)}$

Предполагая, что $a_{33}^{(2)} \neq 0,$ находим $x_3 = \dfrac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_3^{3}$

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}^{(1)} x_2 + a_{13}{}^{(1)} x_3 = b_1{}^{(1)} \\ \qquad\qquad x_2 + a_{23}{}^{(2)} x_3 = b_2{}^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 = b_3{}^{(3)} \end{cases} \qquad (5)$$

Система вида (5) называется ***треугольной*.**

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют ***прямым ходом метода Гаусса*.**

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют ***обратным ходом метода Гаусса.***

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2. Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1.

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида *0 = b*, где *b* ≠ 0, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

<u>Треугольная система</u> имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = d_n \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится в результате проведения обратного хода метода Гаусса.

<u>Ступенчатая система</u> имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

Такая система имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим на примере

1. Покажем последовательность решения системы из трех уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + 2{,}5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

2. Поделим первое уравнение на 2, затем вычтем его из второго (a_{21}=1, поэтому домножение не требуется) и из третьего, умножив предварительно на a_{31}=3

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_2 + 4x_3 = 16 \\ 4{,}5x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

3. Поделим второе уравнение полученной системы на 2, а затем вычтем его из третьего, умножив предварительно на 4,5 (коэффициент при x_2)

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad\quad -14x_3 = -42 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_3=-42/(-14)=3; \\ x_2=8-2x3=2 \\ x_1=8-0{,}5x2-2x3=1 \end{cases}$$

Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение умножим на $-\frac{a_{11}}{a_{21}} = -2$, а затем сложим с 1-ым уравнением.

   Аналогично третье уравнение умножим на $-\frac{a_{11}}{a_{31}} = -2$, а затем сложим с первым.

   В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение умножим на $-\frac{a'_{22}}{a'_{32}} = -\frac{7}{3}$, и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 7x_2 - 3x_3 = 3, \\ 8\frac{2}{3}x_3 = -8\frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

3. На этом прямой ход метода Гаусса закончен, начинаем обратный ход.
   Из последнего уравнения полученной системы уравнений находим x_3:

$$x_3 = \frac{-8\frac{2}{3}}{8\frac{2}{3}} = -1.$$

Из второго уравнения получаем:

$$x_2 = \frac{1}{7}\left(3 + 3x_3\right) = \frac{1}{7}\left(3 + 3\cdot(-1)\right) = 0.$$

Из первого уравнения находим оставшуюся неизвестную переменную и этим завершаем обратный ход метода Гаусса:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(9 - 3x_2 + x_3\right) = \frac{1}{2}\left(9 - 3\cdot 0 + (-1)\right) = 4\,.$$

Ответ:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$$