Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Функция n переменных

Переменная u называется функцией n переменных (аргументов) $x,y,z,\ldots,t$, если каждой системе значений $x,y,z,\ldots,t$, из области их изменений (области определения), соответствует определенное значение u.

Областью определения функции называется совокупность всех точек, в которых она имеет определенные действительные значения.

Для функции двух переменных $z=f(x,y)$ область определения представляет некоторую совокупность **точек плоскости**, а для функции трех переменных $u=f(x,y,z)$ –некоторую совокупность **точек пространства**.

Функция двух переменных

Функцией двух переменных называется *закон,* по которому каждой паре значений *независимых переменных* **x,y** (аргументов) из ***области определения*** соответствует значение зависимой переменной **z** (функции).

Данную функцию обозначают следующим образом: $z = z(x,y)$ **либо** $z= f(x,y)$, или же другой стандартной буквой: $u=f(x,y)$, $u = u(x,y)$

Частные производные первого порядка

Частной производной от функции ***z =f(x,y)*** по независимой переменной x называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x{}'(x, y)$$

вычисленный при постоянной y

Частной производной по у называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y{}'(x, y)$$

вычисленный при постоянной x

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Полный дифференциал

Полный дифференциал функции *z =f(x,y)* вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Полный дифференциал функции *трех аргументов u =f(x,y,z)* вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Частные производные высших порядков

Частными производными второго порядка от функции ***z =f(x,y)*** называются частные производные от ее частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x,y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}''(x,y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}''(x,y);$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f_{xxx}'''(x,y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=f_{xxy}'''(x,y)\ и\ т.д.$$

Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом второго порядка от функции *z=f(x,y)* называется дифференциал от ее пологого

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Дифференциалы высших порядков вычисляются по формуле

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

Имеет место символическая формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

Дифференцирование сложных функций

Пусть $z=f(x,y)$, где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и функции $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Дифференцирование неявных функций

Производные неявной функции двух переменных *z=f(x,y),* заданной с помощью уравнения *F(x,y,z)=0,* могут быть вычислены по формулам

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F / dx}{\partial F / dz}, \frac{dz}{dy} = -\frac{\partial F / dy}{\partial F / dz} \quad \textit{при условии} \ \frac{dF}{dz} \neq 0$$

Экстремум функции

Функции $z=f(x,y)$ имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0;y_0)$ если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x;y)$ некоторой окрестности точки M_0.

Если дифференцируемая функция $z=f(x,y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0;y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т.е.

$$\frac{df(x_0,y_0)}{dx}=0, \quad \frac{df(x_0,y_0)}{dy}=0$$

(**необходимые условия экстремума**).

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ - стационарная точка функции $z=f(x,y)$. Обозначим

$$A = \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{dx^2}, \quad B = \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{dxdy}, \quad C = \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{dy^2}$$

И составим дискриминант $\Delta=AC-B_2$. Тогда:

Если $\Delta>0$, то функция имеет в точке M0 экстремум, а именно максимум при $A<0$ (или $C<0$) и минимум $A>0$ (или $C>0$);

Если $\Delta<0$, то в точке M_0 экстремума нет (**достаточные условия наличия или отсутствия экстремума**);

Если $\Delta=0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

Неопределённый интеграл

Первообразная функция

- Функция ***F***(***x***) называется первообразной для функции ***f***(***x***) на интервале ***X***=(***a***,***b***), если в каждой точке этого интервала ***f***(***x***) является производной для ***F***(***x***), т.е.

$$F'(x) = f(x)$$

- Из этого определения следует, что задача нахождения первообразной обратна задаче дифференцирования: по заданной функции ***f***(***x***) требуется найти функцию ***F***(***x***), производная которой равна ***f***(***x***).

Неопределённый интеграл

- Множество всех первообразных функции $F(x)$+С для $f(x)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

где C - произвольная постоянная;

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение;

x - переменная интегрирования;

$\int$ - знак неопределенного интеграла.

Свойства неопределённого интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \neq 0 - постоянная$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывной функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$ где $u=\varphi(x)$- произвольная функция, имеющая непрерывную производную

Таблица неопределённых интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$
4. $\int \dfrac{1}{x} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$
6. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x+\pi/2}{2}\right| + C$
13. $\int \dfrac{1}{x^2+a^2} dx = \int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$
14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C$
16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$
17. $\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \dfrac{\alpha}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$
18. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

- Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредственным интегрированием**.

- При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «*подведения под знак дифференциала*»):

$$du = d(u + a), \quad a - число,$$

$$du = \frac{1}{a} d(au), \quad a \neq 0 - число,$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2),$$

$$\cos u du = d(\sin u),$$

$$\sin u du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = d(tgu).$$

Замена переменной в неопределённом интеграле (интегрирование подстановкой)

- Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.
- Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку *x = φ(t),* где *φ(t)* - функция, имеющая непрерывную производную.
- Тогда *dx=φ'(t)dt* и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем ***формулу интегрирования подстановкой***

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям

- ***Формула интегрирования по частям***

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \quad \text{или} \quad \int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

- Формула дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование рациональных дробей

- Рациональной дробью называется дробь вида P(x)/Q(x), где P(x) и Q(x) – многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена P(x) ниже степени многочлена Q(x); в противном случае дробь называется неправильной.
- Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}, m \geq 2;$

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}, \ p^2-4q<0;$

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m}, m \geq 2 \ , \ p^2-4q<0.$

где *A*, *B*, *p*, *q*, *a* – действительные числа.

Найдем интегралы от простейших дробей

$$I.\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C;$$

$$II.\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = \frac{A}{-m+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C;$$

$$III.\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

$$III.\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

$$IV.\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}$$

Первый интеграл простейшей дроби IV типа в правой части равенства легко находится с помощью подстановки $x^2+px+q=t$, а второй преобразуем так:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^m}$$

Полагая $x+p/2=t$, $dx=dt$ и обозначая $q-p^2/4=a^2$, получим

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m} = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$$

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби

Перед интегрированием рациональной дроби P(x)/Q(x) надо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1)Если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

где M(x)-многочлен, а $P_1(x)/Q(x)$ – правильная рациональная дробь;

2) Разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^m \ldots\ldots (x^2+px+q)^n \ldots\ldots,$$

где $p^2/4-q<0$, т.е. трехчлен x^2+px+q имеет комплексные сопряженные корни;

3) Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-a} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots. + \frac{B_n x + C_n}{x^2+px+q} + \ldots.;$$

4) Вычислить неопределенные коэффициенты A_1, A_2, …, A_m, …, B_1, B_2, …, B_m, …, C_1, C_2, …, C_m, …, для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

Интегрирование простейших иррациональных функций

1.Интегралы вида

$$\int R(x,(ax+b)^{m_1/n_1},(ax+b)^{m_2/n_2},\ldots)dx$$

где R – рациональная функция; $m_1,n_1,m_2,n_2,\ldots$- целые числа. С помощью подстановки $ax+b=t^s$, где s- наименьшее общее кратное чисел $n_1,n_2,\ldots$, указанный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

2. Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Такие интегралы путем выделения квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам 15 или 16

3. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Для нахождения этого интеграла выделим в числителе производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и разложим интеграл на сумму интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + (B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

4.Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

С помощью подстановки x-α=1/t этот интеграл приводится к рассмотренному п.2

5. Интеграл вида $\int \frac{P_n(x)dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

где Pn(x) – многочлен n-й степени. Интеграл такого вида находится с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен (n-1)-й степени с неопределенными коэффициентами, λ- число.

Дифференцируя указанное тождество и приводя результат к общему знаменателю, получим равенство двух многочленов, из которого можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

6. Интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

где m, n, p – рациональные числа.

Как доказал П.Л. Чебышев, интегралы от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в трех случаях:

1) p – целое число, тогда данный интеграл сводится к интегралу от рационнальной функции с помощью подстановки $x=t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.
2) (m+1)/n – целое число, в этом случае данный интеграл рационализируется с помощью подстановки $a+bx^n=t^s$;
3) (m+1)/n+p – целое число, в этом случае к той же цели ведет подстановка $ax^{-n}+b=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

где R – рациональная функция.

Под знаком интеграла находится рациональная функция от синуса и косинуса. В данном случае применима универсальная тригонометрическая подстановка tg(x/2)=t, которая сводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции нового аргумента t (таблица п.1).

Существуют и другие подстановки, представленные в следующей таблице:

№	$f(x)$	Рационализирующая подстановка	Формулы
1	2	3	4
1	$R(\sin x, \cos x)$	Универсальная $tg\frac{x}{2} = t$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
2	$R(\sin^2 x; \sin x \cdot \cos x; \cos^2 x)$	$tgx = t$	$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ $dx = \frac{dt}{1+t^2}$
3	$R(tgx)$	$tgx = t$	$x = arctgt \; dx = \frac{dt}{1+t^2}$

1	2	3	4
4	$R(\sin^m x; \cos^n x)$		
4.1	$\left[\begin{array}{l} m = 2k < 0 \\ n = 2p < 0 \end{array}\right.$	$tgx = t$	$x = arctgt\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$
4.2	$\left[\begin{array}{l} m = 2k > 0 \\ n = 2p > 0 \end{array}\right.$	Формулы понижения степени	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
4.3	$\left[\begin{array}{l} m = 2k+1 \\ n = 2k \end{array}\right.$	$\cos x = t$	$\sin^2 x = 1 - t^2$ $\sin x dx = dt$
4.4	$\left[\begin{array}{l} n = 2k+1 \\ m = 2k \end{array}\right.$	$\sin x = t$	$\cos^2 x = 1 - t^2$ $\cos x dx = dt$
5	$R(\sin x)\cos x$	$\sin x = t$	$\cos x dx = dt$
6	$\sin ax \cdot \cos bx$ $\sin ax \cdot \sin bx$ $\cos ax \cdot \cos bx$	Формулы преобразования произведения в сумму	$\sin ax \cdot \cos bx =$ $\dfrac{1}{2}(\sin(a+b)x +$ $\sin(a-b)x$

Определенный интеграл

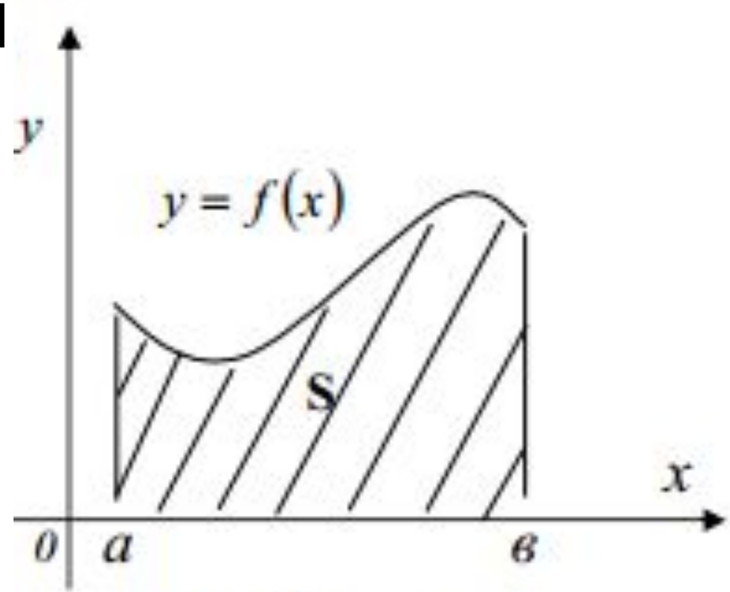
Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a;b] называется предел интегральных сумм при условии, что длина наибольшего частичного отрезка *Δx*$_i$ стремится к нуль.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Числа a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Теорема Коши. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то определенный интеграл существует

Если f(x)>0 на отрезке [a;b], то определенный интеграл геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции - фигуры, ограничен , x=a, x=b, y=0



$$S = \int_{a}^{в} f(x)dx$$

Свойства определенного

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, a < c < b$

7. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке [a;b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \leq 0$ для всех точек

$x \in$ [a;b], то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

8. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке [a;b], то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

9. Если M - наибольшее, m - наименьшее значение $f(x)$ на [a;b], то

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

10. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), c \in [a;b]$ (теорема о среднем)

11. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

12. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$

Правила вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная для f(x), т.е. F(x)‘= f(x).

2. Интегрирование по частям:

$$\int_a^a udv = uv\Big|_a^b - \int_a^a vdu$$

где u=u(x), v=v(x) – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке [a;b].

3. Замена переменной

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt$$

где *x=φ(t)* – функция, непрерывная вместе со своей производной *φ‘ (t)* на отрезке *α≤t≤*β*, a= φ(a), b= φ(*β*),*
f[φ(t)] – функция непрерывна на [α; β]

4. Если f(x) – нечетная функция, т.е. f(-x)=-f(x), то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Если f(x) –четная функция, т.е. f(-x)=f(x), то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются:

1) интегралы с бесконечными пределами;

2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции f(x) в пределах от a до +бесконечности определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности, - расходящимися

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

Если функция *f(x)* имеет бесконечный разрыв в точке с отрезка *[a;b]* и непрерывна при *a≤x<c* и *c<x≤b*, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to 0}\int_{c+\beta}^{b} f(x)dx$$

При исследовании сходимости несобственных интегралов пользуются одним из признаков сравнения.

1. Если функции *f(x)* и *φ(x) определены для всех x≥a и интегрируемы на отрезке [a;A], где A≥a, и если 0≤f(x)≤φ(x) для всех x≥a, то из сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty}f(x)dx$, причем $\int_a^{+\infty}f(x)dx \le \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$

2.1 Если при x→+∞ функция *f(x)≤0 является бесконечно малой порядка p>0 по сравнению с 1/x, то интеграл* $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ *сходится при p>1 и расходится при p≤1.*

2.2 Если функция *f(x)≥0 определена и непрерывна в промежутке a ≤ x<b и является бесконечно большой порядка p по сравнению с 1/(b-x)* при x→b-0, то интеграл $\int_a^{b}f(x)dx$ сходится при *p<1 и*

Вычисление площади плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой y=f(x) [f(x)≥0], прямыми x=a и x=b и отрезком [a;b] оси OX вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ $[f_1(x)\le f_2(x)]$ и прямыми x=a и x=b находится по формуле

$$S=\int_a^b \left[f_1(x)\right]-f_2(x)dx$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями x=x(t), y=y(t), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми x=a, x=b и отрезком [a;b] оси OX вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнения $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ $[y(t)\ge 0$ при $t_1\le t\le t_2]$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением ρ=ρ(θ) и двумя полярными радиусами θ=α, θ=β (α<β), находятся по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$$

Вычисление длины дуги плоской кривой

Если кривая y=f(x) на отрезке [a;b] – гладкая (т.е. производная y’=f’(x) непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

При параметрическом задании кривой x=x(t), y=y(t) [x(t) и y(t) – непрерывно дифференцируемые функции] длина дуги кривой, соответствующая, монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dt$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением ρ=ρ(θ), α≤θ≤β, то длина дуги равна

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$$

Вычисление объема тела

1. **Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений**. Если площадь сечения тела плоскость, перпендикулярной оси ОХ, может быть выражена как функция от x, т.е. в виде S=S(x) (a≤x≤b), объем части тела, заключенный между перпендикулярными оси ОХ плоскостями x=a и x=b, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

2. **Вычисление объема тела вращения**. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой y=f(x) и прямыми y=0, x=a, x=b, вращается вокруг оси ОХ, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$$

Если фигура, ограниченная кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ $[0 \le f_1(x) \le f_2(x)]$ и прямыми x=a, x=b, вращается вокруг оси ОХ, то объем тема вращения равен

$$V_x = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx$$

Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга гладкой кривая y=f(x) ($a \le x \le b$) вращается вокруг оси OX, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями x=x(t), y=y(t) ($t_1 \le t \le t_2$), то

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x^2+y^2}\,dt$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия

- **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.
- Если независимая переменная одна, то уравнение называется **обыкновенным**, если же независимых переменных две или больше, то уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных**.

Уравнение первого порядка

Функциональное уравнение $F(x,y,y') = 0$ или $y'= f(x,y)$, связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**.

Решением уравнения первого порядка называется всякая функция $y=\phi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместе со своей производной $y'=\phi(x)$, обращает его в тождество относительно x.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка

- Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y = \phi(x,C)$, которая при любом значении параметра C является решением этого дифференциального уравнения. Уравнение $\Phi(x,y,C)=0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Уравнение, разрешенное относительно производной

Если уравнение 1-го порядка разрешить относительно производной, то оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x, y)$$

Его общее решение геометрически представляет собой семейство интегральных кривых, т. е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной *C*.

Постановка задачи Коши

Задача отыскания решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$ называется задачей Коши для уравнения 1-го порядка.

Геометрически это означает: найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, проходящую через данную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение

$$f(x)dx = g(y)dy$$

называется уравнением с разделенными переменными.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно имеет вид:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

Для решения уравнения делят обе его части на произведение функций $N_1(y)M_2(x)$, а затем интегрируют.

Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно привести к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

или к виду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одного порядка .

Линейные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если оно содержит *y* и *y‘* в первой степени, т.е. имеет вид $y' + P(x)y = Q(x)$.

Решают такое уравнение с помощью подстановки *y=uv*, где *u* и *v*-вспомогательные неизвестные функции, которые находят, подставляя в уравнение вспомогательные функции и на одну из функций налагают определенные условия.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение 1-го порядка, имеющее вид

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{m}$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$

Его, как и линейное уравнение решают с помощью подстановки

$$y = uv$$

Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Уравнение 2-го порядка имеет вид

$$F(x,y,y',y'')=0$$

Или $y''= f(x, y, y')$

Общим решением уравнения второго порядка называется такая функция $y=\varphi(x,c_1,c_2)$, которая при любых значениях параметров c_1, c_2 является решением этого уравнения.

Задача Коши для уравнения 2-го порядка

Если уравнение 2-го порядка разрешить относительно второй производной, то для такого уравнения имеет место задача: найти решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$,

удовлетворяющее начальным условиям:

$y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$

Эту задачу называют *задачей Коши* для дифференциального уравнения 2-гопорядка.

Теорема существования и единственности решения уравнения 2-го порядка

Если в уравнении $y'' = f(x, y, y')$ функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные по аргументам y и y' непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0, y_0'), то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$.

Уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка

Простейшее уравнение 2-го порядка $y'' = f(x)$ решают двукратным интегрированием.

Уравнение $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее явно y, решают с помощью подстановки $y' = p$, $y'' = p'$

Уравнение $F(y, y', y'') = 0$ не содержащее x, решают заменой $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$.

Линейные однородные уравнения

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

Если все коэффициенты этого уравнения постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами .

Свойства решений линейного однородного уравнения

Теорема 1. Если *$y(x)$* является решением уравнения , то и С$y(x)$, где С-константа, также является решением этого уравнения.

Свойства решений линейного однородного уравнения

Теорема 2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения уравнения, то и их сумма также является решением этого уравнения.

Следствие. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения уравнения, то функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

-также решение этого уравнения.

Линейно зависимые и линейно независимые функции

Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **линейно зависимыми** на некотором промежутке, если можно подобрать такие числа α и β, не равные нулю одновременно, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю на этом промежутке, т. е.

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0$$

Если таких чисел подобрать нельзя, то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на указанном промежутке.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут линейно зависимыми тогда и только тогда, когда их отношение постоянно, т. е.

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$$

Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения 2-

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ -линейно независимые частные решения ЛОУ 2-го порядка, то их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

где C_1 и C_2 -произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ *называется характеристическим уравнением* линейного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Оно получается из ЛОУ заменой соответствующей порядку производной степенью k .