Переменные и непрерывные ренты. Конверсия рент.

Члены ***переменной ренты*** изменяются согласно определенным законам или условиям развития.

Ренты с постоянным абсолютным приростом платежей.

$$R,\ R+a,\ R+2a,\ \ldots,\ R+(n-1)a$$

$$A=\frac{R}{(1+i)}+\frac{R+a}{(1+i)^2}+\frac{R+2a}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{R+(n-1)a}{(1+i)^n};$$

$$(1+i)A=R+\frac{R+a}{(1+i)}+\frac{R+2a}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{R+(n-1)a}{(1+i)^{n-1}};$$

$$(1+i)A-A=iA=R+\frac{a}{(1+i)}+\frac{a}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{a}{(1+i)^{n-1}}-$$

$$-\frac{R+(n-1)a}{(1+i)^n}=R\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)+a\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{(1+i)^t}-\frac{na}{(1+i)^n}+\frac{a}{(1+i)^n};$$

$$iA = R\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) + a\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{(1+i)^t} - \frac{na}{(1+i)^n} + \frac{a}{(1+i)^n};$$

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{a}{i}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{na}{i(1+i)^n};$$

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right)a(n;i) - \frac{na}{i(1+i)^n}$$

$$S = A(1+i)^n = \left(R + \frac{a}{i}\right)s(n;i) - \frac{na}{i}$$

Какова зависимость современной стоимости от абсолютного прироста?

$$A = \left(R + \frac{a}{i} \right) a(n;i) - \frac{na}{i(1+i)^n} =$$

$$= Ra(n;i) + \frac{a(n;i) - n(1+i)^{-n}}{i} a;$$

$$S = R\,s(n;i) + \frac{s(n;i) - n}{i} a$$

Пример. Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 15 тыс. руб. Последующие платежи увеличиваются на 2 тыс. руб. Начисление производится по ставке 20% годовых. Срок выплат – 10 лет. Определить современную и наращенную величину потока.

<u>Решение.</u> $R = 15000$; $a = 2000$; $n = 10$; $i = 0{,}2$.

$$A=\left(15000+\frac{2000}{0{,}2}\right)\cdot\frac{1-(1+0{,}2)^{-10}}{0{,}2}-\frac{10\cdot 2000}{0{,}2\cdot(1+0{,}2)^{10}}=$$

$$=15000\cdot\frac{1-(1+0{,}2)^{-10}}{0{,}2}+\frac{a(10;20)-10\cdot 1{,}2^{10}}{0{,}2}\cdot 2000=$$

$$=62\,887{,}08+25\,774{,}16=\underline{88\,661{,}24};$$

$$S=A(1+i)^{n}=88661{,}24\cdot 1{,}2^{10}=\underline{548\,967{,}05}$$

$$S=15000\cdot\frac{(1+0{,}2)^{10}-1}{0{,}2}+\frac{s(10;20)-10}{0{,}2}\cdot 2000=$$

$$=389\,380{,}23+159\,586{,}82=\underline{548\,967{,}05}$$

Решение. Если же рента предполагает сокращение платежей по 1 тыс. руб. в год, т.е. $a = -1000$, то

$$A = 15000 \cdot \frac{1-(1+0{,}2)^{-10}}{0{,}2} + \frac{a(10;0{,}2) - 10 \cdot 1{,}2^{10}}{0{,}2} \cdot (-1000) =$$

$$= 62887{,}08 - 12887{,}08 = \underline{50000};$$

$$S = 15000 \cdot \frac{(1+0{,}2)^{10} - 1}{0{,}2} + \frac{s(10;0{,}2) - 10}{0{,}2} \cdot (-1000) =$$

$$= 389380{,}23 - 79793{,}41 = \underline{309586{,}82}$$

Ренты с постоянным относительным приростом платежей.

$$R, Rq, Rq^2, \ldots, Rq^{n-1}$$

$$A = \frac{R}{(1+i)} + \frac{Rq}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{Rq^{n-1}}{(1+i)^n} =$$

$$= R(1+i)^{-1}\frac{q^n(1+i)^{-n}-1}{q(1+i)^{-1}-1} = R\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{q-(1+i)}$$

$$A = R\frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{q-(1+i)};$$

Пусть $q = 1 + k$, где k – темп прироста платежей (прирост может быть как положительным, так и отрицательным).

$$A = R\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k};$$

$$S = R\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)} = R\frac{(1+k)^n-(1+i)^n}{k-i}$$

Пример. Пусть в предыдущем примере члены ренты увеличиваются каждый год на 12% (k =0,12).

$$A = 15000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+0{,}12}{1+0{,}2}\right)^{10}}{0{,}2 - 0{,}12} = 93447{,}78;$$

$$S = 15000 \cdot \frac{(1+0{,}12)^{10} - (1+0{,}2)^{10}}{0{,}12 - 0{,}2} = 578604{,}04$$

Если же платежи уменьшаются с темпом прироста k = – 0,1 (– 10%), то

$$A = 15000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-0{,}1}{1+0{,}2}\right)^{10}}{0{,}2 - (-0{,}1)} = 47184{,}32;$$

$$S = A \cdot 1{,}2^{10} = 47184{,}32 \cdot 1{,}2^{10} = 292152{,}90$$

Конверсии рент.

- замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты*);
- замена разового платежа рентой (*рассрочка платежа*);
- объединение рент с разными характеристиками в одну (*консолидация рент*).

Общий случай конверсии: замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями.

Конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности.

Общее правило консолидации: находятся современные величины заменяемых рент и складываются; затем подбирается рента-сумма с такой современной величиной и нужными остальными параметрами.

Как изменится правило, если при консолидации среди рент есть отложенные?

Выкуп ренты, т.е. замена ренты единовременным *платежом*.

$$V = A = Ra(n,i)$$

Рассрочка платежей – задача, обратная выкупу ренты, которая обычно заключается в определении одного из параметров этой ренты – R или n (остальные параметры заданы).

Объединение (консолидация) рент.

Для заменяющей ренты нужно четко определить ее вид и все параметры, кроме одного (как правило, *R* или *n*).

$$A = \sum_{q} A_q$$

Если заменяющая рента постнумерандо является немедленной и задан ее срок *n*, то

$$R = \frac{\sum_{q} A_q}{a(n,i)}.$$

Если задается сумма платежа и его периодичность, то срок определяется из уравнения (формула дана для немедленной ренты постнумерандо):

$$a(n,i)=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{\sum_q A_q}{R}$$

$$n=\frac{-\ln\left(1-\frac{\sum_q A_q}{R}i\right)}{\ln(1+i)} \qquad \left(\frac{i\sum_q A_q}{R}<1\right).$$

Пример. Три ренты постнумерандо – немедленные, годовые – заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: R_1=100 тыс. руб., R_2=120 тыс. руб., R_3=300 тыс. руб., сроки этих рент: 6; 11 и 8 лет. При расчете использовать ставку 8% годовых.

Решение.

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{A}{(1+i)^3}$$

Рента	Платеж (R, тыс. руб.)	Срок (n)	Ставка (i, %)	$a(n, i)$	$A= Ra(n, i)$
1	100	6	8	4,62288	462,288
2	120	11	8	7,13896	856,6757
3	300	8	8	5,74664	1723,992
Итого	520				3042,955

Размер заменяющего платежа:

$$R = \frac{A}{a(n,i)} = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)(1+i)^3}{a(7;8)} =$$

$$= \frac{3042{,}955 \cdot 1{,}08^3}{5{,}20637} = 736{,}261$$

Если задан не срок, а сумма годового платежа, например, R = 800 тыс. руб., то необходимо найти срок заменяющей ренты.
Находим современную стоимость ренты:

$$A = 3042{,}955 \cdot (1{,}08)^3 = 3833{,}2474$$

Тогда срок определяется по формуле:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R} i\right)}{\ln(1+i)} = \frac{-\ln\left(1 - \frac{3833.2474}{800} \cdot 0{,}08\right)}{\ln 1{,}08} \approx 6{,}28;$$

т.е. 6 годовых платежей по 800 тыс. руб. и платеж в конце 7го года 231,27 тыс. руб.
Или 5 годовых платежей по 800 тыс. руб. и платеж в конце 6го года 1014,14 тыс. руб.